República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA I
Libro del Estudiante
Décimo grado

10

Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

MATEMÁTICA I - Libro del Estudiante - Décimo grado
10

El **Libro del Estudiante - Matemática I - del Décimo grado de Educación Media**, es propiedad de la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras, C.A.

Presidencia de la República de Honduras

Secretaría de Estado en el Despacho de Educación

Sub Secretaría de Asuntos Técnico Pedagógicos

Sub Secretaría de Asuntos Administrativos y Financieros

Dirección General de Desarrollo Profesional

Esta obra fue elaborada y revisada en el marco del **Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM Fase III)**, que ejecutó la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación en coordinación con la **Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM)**, con el apoyo técnico de la **Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)**.

Autores - UPNFM
Luis Antonio Soto Hernández
Karla Valesca Matute Colindres

Equipo Técnico de Revisión – UPNFM – 2018
Luis Antonio Soto Hernández
Flavia María Romero Camacho

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2017
Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Carlos Antonio Mejía
José Hipólito Vásquez Rodríguez

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2018
Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Luisa Naomi Herrera Torres

Revisión Técnico Gráfico y Pedagógico 2017, 2018
Dirección General de Innovación Tecnológica y Educativa

1ª Calle entre 2ª y 4ª Avenida,
Comayagüela, M.D.C. Honduras, C.A.
www.se.gob.hn
Libro del Estudiante, Matemática I, Décimo grado
Primera Edición 2017
Revisión 2018

ISBN 978-99979-53-74-2
9 789997 953742

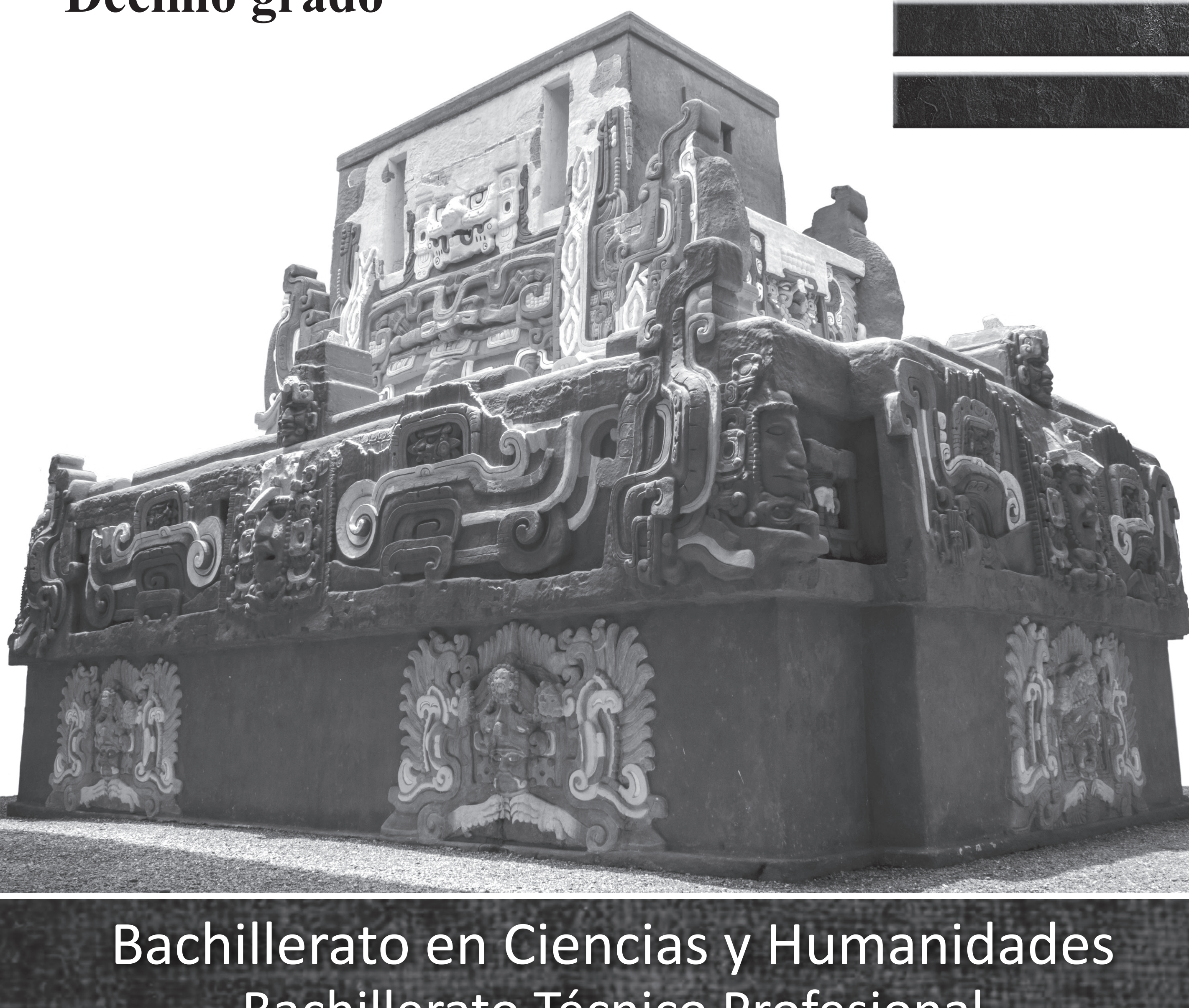
República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA I

Libro del Estudiante

Décimo grado

10



Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en este Libro, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

Jóvenes de HONDURAS:

Es una gran satisfacción para la Secretaría de Educación, presentar este Libro del Estudiante que ha sido elaborado para ustedes con mucho esmero y con el propósito de que encuentren en él la oportunidad de aprender matemática.

El Libro del Estudiante que tienen en sus manos, está diseñado de manera sencilla considerando sus experiencias diarias, sus capacidades y habilidades y sobre todo haciendo énfasis en la realización de actividades que les permitan aprender y aprender a hacer, mediante la aplicación de conceptos, resolución de problemas y ejercicios.

La orientación oportuna de sus docentes, el apoyo de sus padres y fundamentalmente sus esfuerzos por aprender, son la vía para el logro del derecho universal que les asiste: Educación de Calidad. Derecho estimado como el tesoro más preciado de nuestra querida Patria.

Como autoridades educativas tenemos un gran compromiso con ustedes, asegurarles un mejor futuro y para eso estamos trabajando con mucho esfuerzo, para encaminarlos en la formación de valores, hábitos, actitudes, habilidades y conocimientos que le permitan integrarse a la vida social como personas capacitadas e independientes; que sepan ejercer su libertad con responsabilidad, para convertirse cada día en mejores ciudadanos.

Se espera que este Libro del Estudiante se convierta en una herramienta de aprendizaje de mucha utilidad en su proceso de formación.

SECRETARIA DE ESTADO
EN EL DESPACHO DE EDUCACIÓN

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

***La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación** de Honduras con mucha satisfacción le entrega este **Libro del Estudiante**, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo: por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:*

1. *Forre el **Libro del Estudiante** con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.*

2. *Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del **Libro**, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.*

3. *Todos los ejercicios propuestos en el **Libro** debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.*

4. *Está permitido llevar a su casa el **Libro**, cuidando que otras personas que conviven con usted se lo manchen, rayen o rompan.*

5. *Recuerde llevar el **Libro** al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.*

6. *Antes de usar su **Libro**, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.*

7. *Tenga cuidado de usar su **Libro** como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.*

8. *Al pasar las hojas o buscar el tema en el **Libro**, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.*

Recuerde que este Libro es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

ESTIMADO DOCENTE: POR FAVOR EXPLIQUE A SUS ESTUDIANTES LA FORMA DE CUIDAR Y CONSERVAR EL LIBRO DEL ESTUDIANTE, YA QUE PERTENECE AL CENTRO EDUCATIVO.

Índice

Explicación de iconos en el libro

Cada ícono representa:

El desarrollo de un ejemplo.

La propuesta de ejercicios o problemas.

Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro a la vez algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.

Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.

Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.

Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

Matemáticas I

Unidad I

Fundamentos de aritmética y álgebra

- Lección 1: Números reales
- Lección 2: Ecuaciones e inecuaciones
- Lección 3: Coordenadas planas

Algo de historia

Karl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

Gauss fue un físico matemático y astrónomo alemán, desde muy temprana edad mostró tener muchas capacidades en matemática, hizo sus estudios secundarios y universitarios en la Universidad de Gotinga en Alemania. Contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

Era llamado el príncipe de los matemáticos y considerado como el matemático más grande desde la antigüedad, teniendo mucha influencia en la matemática y en la historia. Gauss hizo sus primeros descubrimientos siendo un adolescente y completó su primera obra (Disquisitiones arithmeticae) a los 21 años la que publicó en 1801, considerándose un trabajo fundamental para que se consolidara la teoría de los números.

Gauss mostró una pasión por la aritmética, denominándola la reina de las matemáticas, también demostró que se puede dibujar un polígono regular de 17 lados con regla y compás; fue el primero en demostrar de manera rigurosa el teorema fundamental del álgebra y predijo con exactitud la órbita de Ceres.

Karl Friederich Gauss murió en Gotinga el 23 de febrero de 1855.

Fuente: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/g/gauss.htm

Lección 1. Números reales

Clase 1, 2 y 3. Números racionales y reales

Ejemplo 1.1. Qué tipo de número utilizamos para representar las siguientes situaciones. Escriba el número con el que se representa cada una de ellas:

a) Número de estudiantes en el aula de clase
b) Cantidad de profesores en el instituto
c) El número de computadoras en el laboratorio de computo
d) Número de miembros de su familia

Solución:

El tipo de números que se utiliza son números enteros positivos.
Cuando se tienen situaciones que se pueden representar solo con números enteros positivos utilizamos el conjunto de números naturales

Definición 1.1
El conjunto de los números naturales son los números que se utilizan para contar, se representan con la letra $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{1,2 ,3 ,4 ,...\}$

Los números naturales nos permiten contar elementos de un conjunto, por lo que cuando se realizan operaciones con ellos se puede dar el caso que los resultados sean números naturales o no.

- Si se suman dos números naturales el resultado es un numero natural
- Si se multiplican dos números naturales, el resultado es un numero natural
- Si se restan dos números naturales el resultado ¿será siempre un numero natural?

De aquí surge otro conjunto que se le llama conjunto de números enteros.

Ejemplo 1.2. Represente las siguientes situaciones utilizando números

a) 5°C bajo cero
b) 15 km al oeste
c) 30 minutos antes de ahora
d) Deuda de 35 lempiras
e) 8 metros de profundidad bajo el nivel del mar

Solución: a) -5 b) -15 c) -30 d) -35 e) -8

Definición 1.2
El conjunto de números enteros se representa por la letra $\mathbb{Z}$ y consiste en los enteros positivos, el número cero y los enteros negativos.

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

* Al dividir dos números naturales ¿el resultado siempre será un número natural?

[A]

Los números naturales surgen por la necesidad del hombre de ordenar y saber la cantidad de elementos en un conjunto.

$\mathbb{N}$ es un conjunto infinito y cada número tiene sucesor.

$3 - 5 = ?$ ¿Es un número natural?

Hay situaciones que no se pueden representar con los números naturales por lo que se hace uso de los enteros negativos.
Número negativo: son números que son menores que cero.

Números positivos: son números que son mayores que cero.

$3 \div 5 = ?$ ¿Es un número natural?, ¿es un número entero?

Se sabe que no siempre es posible porque hay divisiones que no son exactas, por lo que se tiene otro conjunto de números llamado el conjunto de números racionales.

Ejemplo 1.3. Represente con números las siguientes situaciones:

a) La mitad de un lempira
b) Repartir tres galletas entre cuatro amigos
c) Repartir 8 confites entre dos amigos
d) La tercera parte de una docena de huevos
e) Repartir un pastel de forma equitativa entre 5 amigos

Solución: a) $\frac{1}{2}$ ó 0.50 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{8}{2}$ ó 4 d) $\frac{12}{3}$ ó 4 e) $\frac{1}{5}$

> **Definición 1.3**
> Los números racionales se representan por la letra $\mathbb{Q}$ y consiste en los números que se escriben de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$
> $$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Todos los números que pueden representarse como } \frac{a}{b}, \\ \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números enteros y } b \text{ es distinto de 0.} \end{array} \right\}$$

Algunas divisiones son exactas, por lo que los números enteros también son números racionales.

Todo número entero puede ser representado como una fracción

$-3 = \frac{-3}{1}, \frac{-6}{2}, \frac{-9}{3}, \ldots,$

$4 = \frac{4}{1}, \frac{8}{2}, \frac{12}{3}, \frac{16}{4}, \ldots,$

Todo número entero es racional: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Ejercicio 1.1.

a) Dados los siguientes números escríbalos en forma de fracción.

a_1) -5 a_2) 2 a_3) -8 a_4) 7

b) Represente las siguientes situaciones utilizando números

b_1) Una deuda de 1000 lempiras
b_2) 8°C bajo cero
b_3) 7 metros sobre el nivel del mar
b_4) 15 minutos después de ahora
b_5) 400 lempiras de préstamo
b_6) 80 metros de velocidad por minuto hacia el norte
b_7) Juan ganó 1300 lempiras
b_8) La mitad de cinco
b_9) Repartir 3 pasteles entre 5 personas
b_{10}) Dos quintos de ciento cincuenta

Ejemplo 1.4. Se tienen 6 barras rectangulares de chocolate y se quieren repartir entre 12 personas ¿cuánto chocolate le toca a cada persona?
Solución:

$$\frac{6}{12} \overset{\div 2}{=} \frac{3}{6} \overset{\div 3}{=} \frac{1}{2}$$

A cada persona le corresponde $\frac{1}{2}$ de la barra de chocolate.
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Al simplificar la fracción a su mínima expresión se le conoce como fracción simplificada. $\frac{1}{2}$ es la fracción sinplificada de $\frac{6}{12}$.

En los números reales se puede tener fracciones que no estén simplificadas como ser: $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{18}{2}$, $-\frac{100}{25}$, $-\frac{84}{12}$

Definición 1.4
Una fracción simplificada es la fracción que está escrita en su mínima expresión es decir que no hay ningún divisor común entre el numerador y el denominador. A este tipo de fracción se llama irreductible.

Ejercicio 1.2. Simplifique las siguientes fracciones

a) $\frac{10}{35}$ b) $\frac{3}{6}$ c) $\frac{40}{45}$ d) $-\frac{14}{18}$ e) $-\frac{5}{30}$ f) $1\,\frac{10}{18}$ g) $-3\,\frac{6}{12}$

Ejemplo 1.5. Convierta las siguientes fracciones a números decimales

a) $\frac{5}{4}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $-\frac{5}{9}$ e) $-\frac{5}{22}$ f) $\frac{7}{6}$

Solución: Para convertir una fracción a número decimal se divide el numerador entre el denominador.

a) $\frac{5}{4} = 1.25$

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 4\,\overline{)\,5} \\ \underline{4} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

b) $-\frac{3}{5} = -0.6$

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5\,\overline{)\,3} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

c) $\frac{7}{3} = 2.\overline{3}$

$$\begin{array}{r} 2.333... \\ 3\,\overline{)\,7} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \end{array}$$

d) $-\frac{5}{9} = -0.\overline{5}$

$$\begin{array}{r} 0.555... \\ 9\,\overline{)\,5} \\ \underline{45} \\ 50 \\ \underline{45} \\ 50 \\ 45 \end{array}$$

e) $-\frac{5}{22} = -0.2\overline{27}$

$$\begin{array}{r} 0.22727... \\ 22\,\overline{)\,5} \\ \underline{44} \\ 60 \\ \underline{44} \\ 160 \\ \underline{154} \\ 60 \\ \underline{44} \\ 160 \end{array}$$

f) $\frac{7}{6} = 1.1\overline{6}$

$$\begin{array}{r} 1.166... \\ 6\,\overline{)\,7} \\ \underline{6} \\ 10 \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 4 \end{array}$$

Los números decimales se pueden clasificar en:
Decimales finitos: son aquellos números que tienen fin; es decir un número limitado de cifras decimales. Dentro de los decimales finitos tenemos:
Decimal exacto: son aquellos decimales cuya parte decimal tiene un número finito de cifras.

Las fracciones reductibles e irreductibles son números racionales.

[B]

Los incisos a, b son decimales exactos c y d se les llama decimal periódico puro, e y f se les llama decimal periódico mixto

Los números decimales que son exactos periódicos puros y mixtos son números racionales.

Decimales infinitos: son aquellos números que tienen un número ilimitado de cifras decimales. Dentro de los decimales infinitos se tiene:
Decimal periódico: son aquellos decimales cuya parte decimal tiene un número infinito de cifras que se repiten siguiendo un patrón llamado periodo.

Hay dos tipos de decimales periódicos
a) **Periódico puro:** cuando el periodo comienza inmediatamente después del punto decimal.
b) **Periódico mixto:** cuando el periodo comienza después del ante período.

Ejercicio 1.3. Convierta las siguientes fracciones a decimales y exprese ¿Qué tipo de número decimal es?
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{13}{6}$ d) $\frac{19}{7}$ e) $-\frac{22}{5}$ f) $\frac{17}{12}$

Ejemplo 1.6. Escriba dos fracciones diferentes para expresar los siguientes números:
a) -8 b) 4 c) $\sqrt{2}$ d) $-\sqrt{7}$

Solución: a) -8: $-\frac{8}{1}, -\frac{16}{2}$ b) 4: $\frac{8}{2}, \frac{12}{3}$

$\sqrt{2}$ y $-\sqrt{7}$ no se pueden expresar como una fracción cuyo numerador y denominador sean número enteros, por lo que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{7}$ no son números racionales.
$\sqrt{2}$ y $-\sqrt{7}$ en su forma decimal

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{2} = 1.414213562\ldots \\ -\sqrt{7} = -2.645751311\ldots \end{array}\right\} \text{son decimales infinitos no periódicos}$$

A este tipo de decimal se le llama número irracional.

Definición 1.5
Números irracionales son los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, no se pueden expresar como una fracción. Este conjunto se representa con la letra $\mathbb{I}$.
$\mathbb{I}$ = {Todos los números decimales no periódicos}

Ejercicio 1.4. Determine a que conjunto pertenece cada uno de los siguientes números:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-7					
$\sqrt{5}$					
$\frac{12}{3}$					
1.6					
5					
$4.3\overline{21}$					

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
π					
$\frac{6}{5}$					
$\frac{8}{2}$					
$-\frac{15}{3}$					

Todo número decimal que se pueda expresar como una fracción con denominador 10 ó potencia de 10 es un número racional.

Anteperíodo son números que no se repiten mediante un patrón.

En octavo grado se estudiaron las raíces cuadradas.

En $\mathbb{I}$ se encuentran todas las raíces inexactas. Un número racional no puede ser un número irracional.

Ejemplo 1.7. Determine cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales. **[C]**

$3,\ \sqrt{2},\ 0.2,\ \frac{8}{3},\ -\sqrt{12},\ \pi,\ \sqrt{36},\ -0.5,\ \frac{9}{100},\ \sqrt{8},\ \sqrt{21}$

Solución:

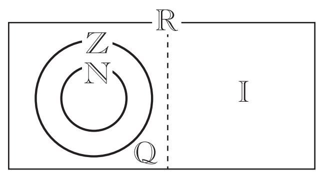
Racionales: $3,\ 0.2,\ \frac{8}{3},\ \sqrt{36},\ -0.5,\ \frac{9}{100}$

Irracionales: $\sqrt{2},\ -\sqrt{12},\ \pi,\ \sqrt{8},\ \sqrt{21}$

$\left\{3,\ 0.2,\ \frac{8}{3},\ \sqrt{36},\ -0.5,\ \frac{9}{100},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{12},\ \pi,\ \sqrt{8},\ \sqrt{21}\right\}$ son números reales.

Definición 1.6
El conjunto de los números reales es la unión de los números racionales y los números irracionales. Se representan por la letra $\mathbb{R}$ y corresponden a todos los puntos en la recta numérica.

La relación entre los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ se denota en el siguiente diagrama.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
Todo número entero y natural es racional pero no todo racional es natural y entero.

Ejercicio 1.5. ¿A cuál conjunto pertenecen los siguientes números? $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ ó $\mathbb{R}$?

a) 9 b) $\frac{13}{6}$ c) $\sqrt{6}$ d) $-\frac{2}{5}$ e) $0.2166666\ldots$

f) $\frac{17}{12}$ g) -5 h) $2+\sqrt{2}$ i) $\frac{12}{4}$ j) $-\frac{25}{5}$

Ejemplo 1.8. Resuelva las siguientes operaciones **[D]**

a) $\frac{7}{2} - \frac{5}{4}$

Solución:

$= \frac{14}{4} - \frac{5}{4}$ fracciones con un denominador común (mcm)

$= \frac{9}{4} \longrightarrow$ es un número racional y real

b) $2 + 5\sqrt{2} - \left\{\frac{2}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{1}{6}\right\}$

Solución:

$2 + 5\sqrt{2} - \frac{2}{3} - 4\sqrt{2} + \frac{1}{6}$

$(2 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}) + (5\sqrt{2} - 4\sqrt{2})$ agrupando términos semejantes

$\frac{3}{2} + \sqrt{2} \longrightarrow$ es un número irracional y real

Al sumar o restar dos o más números reales el resultado será un número real

Ejercicio 1.6. Calcule.

a) $3.2 + 1.4$ b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ c) $-11.2 + 3.5$

d) $2 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)$ e) $-3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$

Ejemplo 1.9. Calcule.

a) -9×40 b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)$ c) $2\sqrt{3}\ (-5\sqrt{6})$ d) $-184 \div 23$

Solución:

a) $-9 \times 40 = -360 \longrightarrow$ número racional y real

b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)$

$= -\frac{8}{6}$

$= -\frac{4}{3} \longrightarrow$ número racional y real

c) $2\sqrt{3}\ (-5\sqrt{6})$

$= -10\sqrt{3 \times 6}$

$= -10 \times 3\sqrt{2}$

$= -30\sqrt{2} \longrightarrow$ número irracional y real

d) $-184 \div 23$

$= -8$

Al multiplicar o dividir dos números reales el resultado será un número real

Del Ejemplo 1.8 y 1.9 se infiere la siguiente propiedad de cierre o clausura.

Definición 1.7
Si a y b son números reales entonces:
$a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ y $a \div b$ son números reales.
Es decir $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ y $a \div b \in \mathbb{R}$

La suma, resta, multiplicación y división de dos o más números reales en un número real.

$a \cdot b$ significa $a \times b$.

Ejercicio 1.7. Calcule.

a) $-5 \times 4 \div 10$

b) $\frac{4}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{5}$

c) $2\sqrt{7}\ (3 + \sqrt{5})$

Clase 4. La recta numérica

Ejemplo 1.10. Represente en la recta numérica los siguientes números.

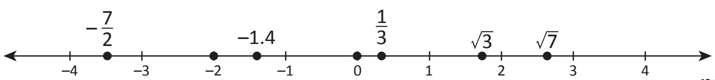
$\{-2, 0, \sqrt{3}, -1.4, \sqrt{7}, \frac{1}{3}, -\frac{7}{2}\}$

Solución:

Para graficar las raíces inexactas: $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$ en la recta numérica se utiliza una aproximación decimal

$\sqrt{3} = 1.732050808...$ $\sqrt{7} = 2.645751311...$

$\sqrt{3} \approx 1.7$ $\sqrt{7} \approx 2.6$



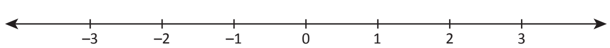
recta numérica real

En la recta numérica real se pueden representar números naturales, enteros, racionales e irracionales.

- Para representar números naturales o enteros basta con ubicar el punto sobre el número que se desea representar
- Para representar números racionales:
  Fracciones: si la fracción es propia quedará ubicada entre 0 y 1 si es positiva o entre 0 y –1 si es negativo, si la fracción es mixta se toman las unidades del número entero y luego en la unidad contigua posterior se ubica la fracción propia
  Decimales: para representar decimales se utilizan aproximaciones a décimas.
- Para representar números irracionales, de igual manera que los números decimales se usan aproximaciones a décimas.

Definición 1.8

La recta numérica real es una representación gráfica del conjunto de números reales, tiene su origen en el cero y se extiende infinitamente en ambas direcciones los números positivos hacia la derecha y los números negativos hacia la izquierda.



Recta numérica real

Ejercicio 1.8. Grafique en la recta numérica real los siguientes valores

a) $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, -2\frac{1}{3}, \frac{9}{3}\right\}$

b) $\{2.5, 0, -0.8, 1.43, -3.78, -1.\overline{6}\}$

c) $\{\sqrt{5}, \sqrt{8}, -\sqrt{3}, -\sqrt{7}\}$

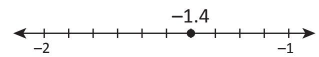
d) $\left\{-1, \sqrt{6}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{4}, 0.5, \frac{12}{3}\right\}$

e) $\left\{\pi, \sqrt{11}, -3, \sqrt{4}, -\frac{8}{2}, \frac{1}{7}\right\}$

[A]

Los números reales completan la recta numérica.

Graficar –1.4



Divide la unidad en 10 partes iguales y toma 4

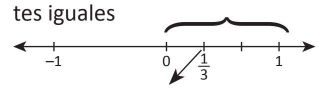
Fracción propia $\frac{a}{b}$, $a < b$

Impropia $\frac{a}{b}$, $a > b$

Número mixto es de la forma $a\frac{b}{c}$, donde a es un entero y $\frac{b}{c}$ una fracción propia.

Fracción propia: $\frac{1}{3}$

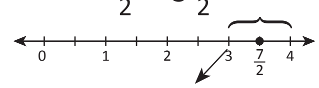
se divide la unidad en tres partes iguales



Se toma una de las tres partes.

Fracción impropia:

$\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$



Se toman 3 unidades y luego se divide la unidad siguiente en dos partes iguales.

A todo número real le corresponde un punto en la recta numérica real y viceversa.

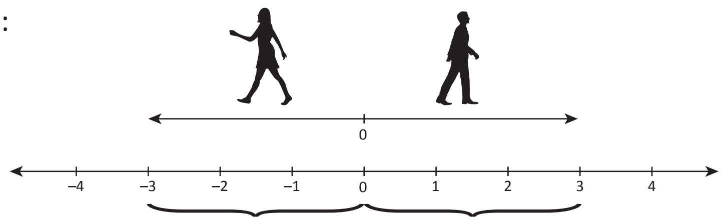
Al ubicar números reales en la recta numérica podemos determinar cuál es mayor o menor.

En Ejercicio 1.8, para cada inciso haga una recta numérica.

Clase 5. Valor absoluto

Ejemplo 1.11. Carlos y María corrieron en una maratón, Carlos corrió 3 metros hacia el este y María corrió 3 metros hacia el oeste ¿Quién corrió más?

Solución:



Distancia 3m 3m

La distancia que recorrieron ambos es la misma.

Para representar distancias entre el cero y un punto en la recta numérica se utiliza valor absoluto del número y este se indica colocando el número entre dos barras

$|3| = 3$ $\qquad |-3| = 3$

[A]

3 metros al este es +3
3 metros al oeste es –3
3 y –3 estan a la misma distancia de 0 en la recta numérica.
La distancia nunca es negativa por lo que el valor absoluto de un número nunca es negativo.

Definición 1.9. Valor absoluto

Es la distancia entre un número y cero en la recta numérica y este se define como: Sea x un número real

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.9. Encuentre:

a) $|-8|$ b) $|-5|$ c) $-|-3|$ d) $|1.4|$

e) $|-2.6|$ f) $\left|-\frac{2}{3}\right|$ g) $-\left|-\frac{1}{5}\right|$ h) $-|5|$

Ejemplo 1.12. Elimine las barras de valor absoluto de los siguientes números aplicando la definición.

a) $|-8|$ b) $-|-4|$

Solución: aplicando la definición

a) $|-8| = -(-8)$ $\qquad -8 < 0$ por lo que $|x| = -x$ si $x < 0$
$= 8$ $\qquad |-8| = -(-8)$

b) $-|-4|$ $\qquad -4 < 0$ por lo que $|-4| = -(-4)$
$= -4$ $\qquad = 4$

- Si x es un número positivo ó 0 entonces el valor absoluto es el mismo x, sin embargo, si x es un número negativo, entonces su valor absoluto es el inverso aditivo de x.

[B]

En b) como el signo está fuera de las barras del valor absoluto este se copia: $-[-(-4)] = -4$.

Ejercicio 1.10. Simplifique lo siguiente eliminando los símbolos de valor absoluto.

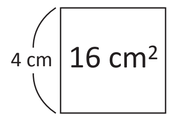
a) $|3|$ b) $|-7|$ c) $-|6|$ d) $-|2-4|$

e) $|12-5|$ f) $|-(3-1)|$ g) $\left|-\frac{12}{5}\right|$ h) $|-1.9|$

i) $-|-(5-2)|$ j) $\left|-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right|$ k) $|2.5-3|$ l) $-|-7.2-8.3|$

Clase 6 y 7. Raíz cuadrada

Ejemplo 1.13. Encuentre el lado de un cuadrado que tiene como área 16 cm²
Solución:
El área de un cuadrado está dada por la fórmula: $A = \ell^2$
Para obtener el lado del cuadrado tenemos:
$16 = \ell^2$
$\sqrt{16} = \sqrt{\ell^2}$ ⟶ aplicar la raíz cuadrada para eliminar la potencia
$\ell = \pm 4$
El lado del cuadrado es 4



> **Definición 1.10. Raíz cuadrada**
> Si a es un número no negativo, la raíz cuadrada de a, es un número b tal que $b^2 = a$; la raíz cuadrada de a se denota por $\sqrt{a}$.

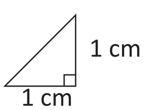
Las raíces cuadradas de 16 son 4 y –4, porque 4 × 4 = 16 y (–4) × (–4) = 16.

Las raíces cuadradas de 16 usando el signo $\sqrt{\ }$ se expresan como $\sqrt{16}$ y $-\sqrt{16}$, esto es, $\sqrt{16} = +4$ y $-\sqrt{16} = -4$.

Ejercicio 1.11. Encuentre las raíces cuadradas de:

a) 36 b) 144 c) 25 d) $\frac{4}{9}$ e) 1.44
f) 0.04 g) $\frac{16}{9}$ h) 81 i) $\frac{1}{4}$ j) 10.24

Ejemplo 1.14. Encuentre la hipotenusa del siguiente triangulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.



Solución:
Al aplicar el teorema de Pitágoras se sabe que la hipotenusa está dada por la siguiente fórmula
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
$c = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$c = \sqrt{2}$
Por tanto, la medida de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ cm

- La raíz cuadrada de un número real a positivo no siempre será un número entero o racional también tenemos raíces cuadradas que pertenecen al conjunto de los números irracionales.
  Por tanto, se puede concluir que:

[A]

16 = 4 × 4

En la solución solo se toma el número positivo porque se trata del lado de un cuadrado.

Partes de una raíz:
$\sqrt{a} = b$
*índice: 2
Cuando se trata de raíces cuadradas no es necesario colocar el índice.
*Radicando: a
*Raíz: b

La radicación es la operación inversa a la potenciación. Por lo tanto, se puede expresar de la forma:
$b^2 = a$
$\sqrt{0} = 0$ cero solo tiene una raíz cuadrada.

[B]

En el triángulo rectángulo c es hipotenusa, a y b son catetos.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

La raíz cuadrada de 2 es $-\sqrt{2}$ y $+\sqrt{2}$

No se puede calcular las raíces cuadradas de números negativos.

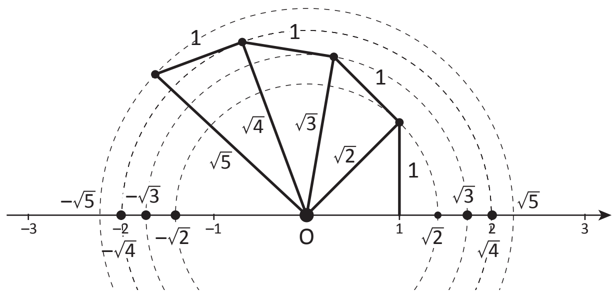
$\sqrt{a} = b$ si y solo si $b^2 = a$, $a \geq 0$. Al número a se le llama radicando o cantidad sub radical y al número b se le llama raíz cuadrada de a.

Ejercicio 1.12. Exprese los siguientes números con el signo radical ($\sqrt{\ }$). Ejemplo $\sqrt{3}$.

a) 3 b) 7 c) 0.5 d) 1.9 e) 1.8

Ejemplo 1.15. Represente en la recta numérica los siguientes números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$

Solución:
Cuando las raíces cuadradas son números irracionales se pueden utilizar el siguiente método para detener una mejor aproximación. (Ver la columna)



Ejercicio 1.13. A partir de la gráfica del Ejemplo 1.15 grafique.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$

Ejemplo 1.16. Dado el valor de a represente $\sqrt{a^2}$

$a = 5$, $a = -5$

Solución:

$a = 5$ $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

$a = -5$ $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

De lo que surge la siguiente propiedad:

Sea a un número real si se tiene $\sqrt{a^2} = |a|$

Ejemplo 1.17. Encontrar la raíz cuadrada de: $\sqrt{(2-x)^2}$ si $2 - x < 0$

Solución:

Aplicando la propiedad se tiene:

$$\begin{aligned}\sqrt{(2-x)^2} &= |2-x| \\ &= -(2-x) \\ &= x-2\end{aligned}$$

Ejercicio 1.14. Encuentre el valor de los siguientes números

a) $\sqrt{(10)^2}$ b) $-\sqrt{36}$ c) $(\sqrt{8})^2$ d) $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2$ e) $(-\sqrt{21})^2$

f) $\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2}$ g) $\sqrt{(-7)^2}$ h) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ i) $\sqrt{(a-3)^2}$ si $a - 3 < 0$

La raíces cuadradas de 4 son 2 y −2. Sin embargo, al usar el símbolo de "raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$)", se refiere únicamente a la raíz positiva que es $\sqrt{4} = 2$. Por tanto, $\sqrt{4} \neq -2$.

[C]

Cuando las raíces cuadradas son exactas resultan números racionales y es fácil ubicar en la recta numérica pero cuando las raíces cuadradas son inexactas generalmente se ubican utilizando aproximaciones decimales.

***Pasos para graficar las raíces**

1. Comenzar ubicando $\sqrt{2}$ como el lado de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: 1.
   $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$
2. Con el compás hacer la abertura del tamaño de la hipotenusa y trazar un arco que cruce la recta en el lado positivo y en el lado negativo. Ubicar $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$
3. Trazar un segmento perpendicular a la hipotenusa del triángulo con medida de 1cm y luego unir el otro extremo con el punto cero de la recta numérica y luego repetir el paso 2 con el otro triángulo formado y ubica $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$
4. Repetir los pasos 3 y 2 en este orden para graficar las demás raíces.

Clase 8 y 9. Cálculo con raíces cuadradas

Ejemplo 1.18. Simplifica la siguiente expresión

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ b) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}$

Solución:

Cuando se tiene un producto de raíces cuadradas el signo de multiplicación se obvia

a) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3}\ \sqrt{5}$
$= \sqrt{3 \times 5}$
$= \sqrt{15}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt{7}$
$= \sqrt{42}$

En el ejemplo anterior se aplica la siguiente propiedad

Si $a > 0$, $b > 0$ se da que: $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Ejercicio 1.15. Calcule

a) $\sqrt{2}\ \sqrt{7}$ b) $\sqrt{2}\ \sqrt{8}$ c) $\sqrt{12}\ \sqrt{3}$ d) $\sqrt{10}\ \sqrt{3}\ \sqrt{2}$ e) $\sqrt{7}\ \sqrt{5}\ \sqrt{3}$

[A]

En octavo grado se estudió estas propiedades con raíces cuadradas.

Ejemplo 1.19. Simplifique la siguiente expresión $\sqrt{\frac{9}{16}}$

Solución:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

En el ejemplo anterior se aplica la siguiente propiedad

Si $a > 0$ y $b > 0$ se da que: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Ejercicio 1.16.

a) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$ c) $\sqrt{\frac{36}{25}}$ d) $\sqrt{\frac{12}{4}}$ e) $\sqrt{\frac{49}{81}}$ f) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$

[B]

Ejemplo 1.20. Simplifique las siguientes expresiones aplicando las propiedades anteriores si es necesario.

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{\frac{3}{25}}$

Solución:

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2}$

$= \sqrt{9} \times \sqrt{2}$ aplicando la propiedad de la multiplicación de raíces.

$= 3\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ se le llama simplificación de raíces.

b) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{\frac{3}{25}}$

$= 2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}}$ simplificando $\sqrt{12}$, $\sqrt{75}$ y aplicando la propiedad de división de raíces.

$= 2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{5}$ obtener la $\sqrt{25}$

$= (2+5-\frac{1}{5})\sqrt{3}$ sumando términos semejantes

$= \frac{34\sqrt{3}}{5}$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Para sumar o restar raíces cuadradas estas deben tener la misma cantidad subradical.

Ejercicio 1.17. Simplifique las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{288}$ d) $\sqrt{\frac{3}{81}}$

e) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{100}}$ f) $\sqrt{504}$ g) $\sqrt{75}-\sqrt{192}$ h) $\sqrt{24}+\sqrt{96}-\sqrt{150}$

j) $\sqrt{320}-\sqrt{80}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{9}}$ k) $\sqrt{20}+5\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{9}}+\sqrt{50}$

Ejemplo 1.21. Aplicando los productos notables simplifique las siguientes expresiones.

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$ b) $(\sqrt{7}-2\sqrt{5})(\sqrt{7}+2\sqrt{5})$

Solución:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$
$= 3 + 2\sqrt{15} + 5$
$= 8 + 2\sqrt{15}$

b) $(\sqrt{7}-2\sqrt{5})(\sqrt{7}+2\sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{5})^2$
$= 7 - 4(\sqrt{5})^2$
$= 7 - 20$
$= -13$

[C]

Para simplificar esta expresión se debe aplicar:
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejercicio 1.18. Simplifique

a) $(2\sqrt{2}+3)^2$ b) $(-\sqrt{6}+3)^2$ c) $(5\sqrt{3}-\sqrt{2})(5\sqrt{3}+\sqrt{2})$

d) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{10}-\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{5})$

Clase 10. Racionalización del denominador

Ejemplo 1.22. Simplifique la siguiente expresión $\frac{1}{\sqrt{20}}$.
Solución:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 5}}}_{1^{\text{ero}}\text{ Simplificar}} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}}_{2^{\text{do}}\text{ Racionalizar}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

recuerda que $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5$

Ejercicio 1.19. Racionalice:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{32}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$

e) $12\sqrt{12} \div 16\sqrt{18}$

En el proceso de racionalización del denominador cuando este es una expresión de suma o resta se multiplica la expresión dada por un número obtenido de la siguiente manera:

> Si el denominador es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, entonces se multiplica por una fracción cuyo numerador y denominador es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ó $-\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
>
> Si el denominador es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, entonces se multiplica la expresión por una fracción cuyo numerador y denominador es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ó $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Ejemplo 1.23. Racionalice $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$
Soución:

Multiplicar la expresión por $\frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{1-2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-1} = -2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2$$

Ejercicio 1.20. Racionalice

a) $\frac{4}{5-\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}+3}$ d) $\frac{-4}{-3\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ f) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ g) $\frac{4}{2\sqrt{3}-3}$ h) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

[A]

En el proceso de racionalización de raíces en el denominador se simplifica primero si se puede y luego se racionaliza el denominador.

Este proceso consiste en convertir expresiones que llevan el signo $\sqrt{\ }$ en el denominador en la forma cuyo denominador no tenga $\sqrt{\ }$

[B]

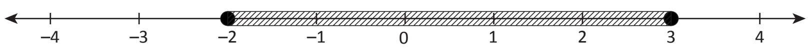
$2(1 - \sqrt{2})$ es multiplicación de raíces aplicando la propiedad distributiva.
$2(1) - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2}$

Al multiplicar un número racional a por un número irracional de la forma $\sqrt{b}$ se expresa como: $a\sqrt{b}$

Clase 11 y 12. Intervalos

Ejemplo 1.24. Grafique en la recta numérica real todos los números que se encuentran entre –2 y 3 incluyéndolos.
Solución:

Notación gráfica



Al segmento desde el punto –2 hasta el punto 3 se le llama Intervalo real y se puede escribir de la siguiente forma:

$\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 3\}$ Notación conjuntista

$[-2, 3]$ Notación de intervalo

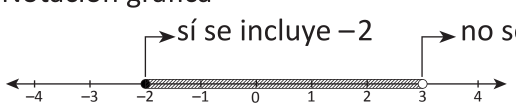
La notación conjuntista significa: el conjunto de los elementos x que pertenecen a los números reales que son mayores o iguales que –2 y menores o iguales que 3.

Ejemplo 1.25. Utilizando el ejemplo 1.24 represente en sus tres notaciones

a) Cuando se incluye solo –2
b) Cuando se incluye solo 3
c) Cuando no se incluye –2 y 3

Solución:

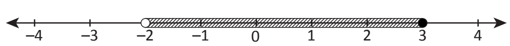
a) Notación gráfica



$\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 3\}$ N. Conjuntista

$[-2, 3[$ N. Intervalo

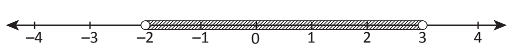
b) Notación gráfica



$\{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 3\}$ N. Conjuntista

$]-2, 3]$ N. Intervalo

c) Notación gráfica

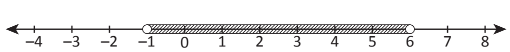


$\{x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}$ N. Conjuntista

$]-2, 3[$ N. Intervalo

Ejercicio 1.21. Escriba los intervalos dados en las otras dos notaciones:

a) $]-6, 2]$ b) $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ c) $\{x \in \mathbb{R}, -1.3 < x \leq 1.3\}$

d) 

[A]

La recta numérica real está compuesta por el conjunto de los números reales.

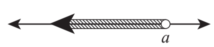
Intervalo real es un subconjunto de números reales en los que se incluyen signos de relación de orden estricta: >, < y las de orden amplia: ≥, ≤

Los intervalos reales se pueden representar mediante tres notaciones:

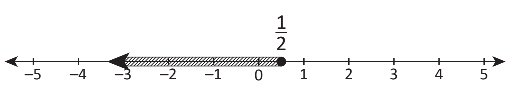
- Gráfica
- Conjuntista
- Intervalo

–2 y 3 se les conoce como extremos del intervalo.
En la notación de intervalo se usan [ ] cuando los extremos se incluyen] [cuando no se incluyen los extremos
En la notación conjuntista se utiliza: ≥, ≤ cuando se incluyen los extremos, >, <.
Cuando no se incluyen los extremos.

Clasificación de los intervalos
Los intervalos se clasifican en cuatro grupos
a) Intervalos cerrados: es el intervalo que incluye los extremos
b) Intervalos semiabiertos o semicerrardo: es el intervalo que no incluye uno de los extremos.
c) Intervalos abiertos: es el intervalo que no incluye los extremos
d) Intervalos infinitos: son los intervalos que solo tienen un extremo y tienden al infinito positivo o negativo.

N°	Tipo de intervalo	Notación gráfica	Notación conjuntista	Notación de intervalo
1	Cerrado		$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
2	Semiabierto por la izquierda		$\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$]a, b]$ ó $(a, b]$
3	Semiabierto por la derecha		$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a$, b[ó $[a, b)$
4	abierto		$\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	$]a, b[$ ó (a, b)
5	Infinitos		$\{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a, +\infty[$ ó $[a, +\infty)$
			$\{x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$]a, +\infty[$ ó $(a, +\infty)$
			$\{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	$]-\infty, a]$ ó $(-\infty, a]$
			$\{x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$]-\infty, a[$ ó $(-\infty, a)$

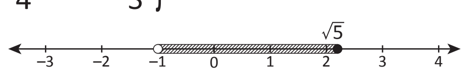
Ejemplo 1.26. Represente en notación conjuntista y gráfica el siguiente intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$
Solución:



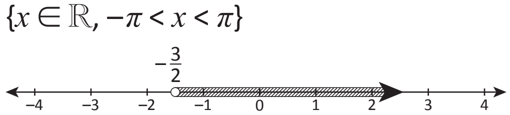
$\{x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{1}{2}\}$

Ejercicio 1.22.
a) Determine qué tipo de intervalo es:

a_1) $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$ a_2) $\left\{x \in \mathbb{R}, -\frac{3}{4} < x < \frac{2}{3}\right\}$ a_3) $]-\infty, 3]$

a_4) $\{x \in \mathbb{R}, x \geq -5\}$ a_5) 

a_6) $\{x \in \mathbb{R}, -\pi < x < \pi\}$

a_7) 

a_8) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right]$

a_9) $\{x \in \mathbb{R}, x \leq 1.5\}$ a_{10}) $]-2.41, \sqrt{7}\,]$

b) Escriba los intervalos dados en las otras dos formas.

[B]

El ejemplo 1.24 es un intervalo cerrado.

En el ejemplo 1.25 a) y b) son intervalos semiabiertos.

Para intervalos abiertos y semiabiertos se pueden usar los paréntesis ( ), ( ], [ ).

Clase 13. Notación científica

Ejemplo 1.27. Juan midió el peso de una piedra, la aguja indica un punto cerca de 14 kg 400 g. Es decir, que la piedra pesó un poco más de 14 kg 350 g y menos de 14 kg 450 g

Si Juan representa el peso de la piedra con 14 kg 400 g no se sabe con exactitud lo que midió, es decir, no se puede saber si el peso queda entre 14 kg 350 g y 14 kg 450 g o entre 14 kg 395 g y 14 kg 405 g etc.

[A]

¿De qué manera puede Juan representar el peso con una escala de exactitud?

Solución:

14.4 kg

Si se quiere representar el peso con la unidad de medida g se hace lo siguiente

$$\begin{aligned} 14 \text{ kg } 400 \text{ g} &= 14400 \text{ g} \\ &= 1.44 \times 10000 \text{ g} \\ &= 1.44 \times 10^4 \text{ g} \end{aligned}$$

A este tipo de notación (1.44×10^4)se le llama notación científica.

Definición 1.11
Un numero está escrito en notación científica si tiene la forma $a \times 10^n$ donde $1 \leq a < 10$ y n es un número entero.

La notación $1 \leq a < 10$ significa que a puede tomar el valor de 1 ó valores entre 1 y 10 sin incluir el 10.
En la expresión 1.44×10^4 el número de cifras significativas es 3.
Las cifras significativas indican la exactitud de la escala de medición.

A las cifras que aparecen en la expresión del número a se les llama cifras significativas.

Ejemplo 1.28.

- Si una distancia es de 3.2×10^4 m (con 2 cifras significativas) significa que esta distancia mide entre 3.15×10^4 y 3.25×10^4 (es decir 31500 m y 32500 m)
- Si la distancia es de 3.20×10^4m (con 3 cifras significativas) la medida está entre 3.195×10^4m (31950m) y 3.205×10^4m (32050m)
- Si fuera de 3.200×10^4 m (4 cifras significativas) estaría entre 3.1995×10^4m (31995 m) y 3.2005×10^4 m (32005 m). Esta última medición es más exacta ya que tiene más cifras significativas.

Para escribir un número en notación científica, este se multiplica y divide por una misma potencia de base 10 de modo que la primera cifra sea entera y las demás son decimales.

Ejemplo 1.29. Escribir en notación científica

a) 53617 b) 0.00034

Solución:

a) $53617 = \frac{53617 \times 10^4}{10^4} = [53617 \div 10^4] \times 10^4 = 5.3617 \times 10^4$

b) $0.00034 = \frac{0.00034 \times 10^4}{10^4} = \frac{0.00034 \times 10000}{10^4} = 3.4 \times \frac{1}{10^4} = 3.4 \times 10^{-4}$

Del ejemplo anterior se puede concluir:

> Si el exponente es un número entero negativo entonces la cantidad es menor que 1.

Ejercicio 1.23. Escriba las siguientes cantidades en notación científica. La cantidad de las cifras significativas está dada entre corchetes

a) 5869713600 millas (años luz) [8]
b) 2000000000000 (2 billones) [1]
c) 0.000001 metros (tamaño aproximado del VIH) [1]
d) 59000000 libros (libros de la biblioteca del congreso de USA) [4]
e) 0.000001 metros (un nanómetro) [2]

Ejemplo 1.30. Convertir las siguientes cantidades de notación científica a notación ordinaria

a) 4.3×10^4
b) 4.3×10^{-4}

Solución:

Para convertir una cantidad de notación científica a notación ordinaria se multiplica el número a por una potencia de base 10

a) $4.3 \times 10^4 = 4.3 \times 10000$
$= 43000$

b) $4.3 \times 10^{-4} = 4.3 \times \frac{1}{10^4} = \frac{4.3}{10000} = 0.00043$

Ejercicio 1.24. Escriba en notación ordinaria las siguientes cantidades

a) 1.84×10^3 b) 3.014×10^{-2} c) 9.9×10^5
d) 5.08×10^{-7} e) 8.371×10^{10} f) 4.123×10^{-3}

[B]

En a) se tienen 5 cifras significativas.
En b) se tienen 2 cifras significativas.

En la expresión 3.4×10^{-4} el exponente -4 indica que la cantidad es menor que 1, es decir $0.00034 < 1$
Si el punto decimal se desplaza hacia la izquierda, el exponente es positivo, si se desplaza hacia la derecha el exponente es negativo.
$325000 = 3.25 \times 10^5$
$0.0000325 = 3.25 \times 10^{-5}$

[C]

La notación científica se emplea con mucha frecuencia y es muy útil en diferentes ciencias ya que es utilizado para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Ejercicios de la lección

1. Dados los siguientes números marque a que conjunto pertenecen. Clase 1, 2 y 3

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-3					
$\frac{12}{4}$					
$-\pi$					
$-\frac{15}{3}$					
1.2					
$\frac{3}{2}$					
$-\frac{1}{5}$					
$\sqrt{7}$					
1.136666...					
$-\sqrt{36}$					
$-\sqrt{11}$					

2. Simplifique las siguientes fracciones a su mínima expresión. Clase 1, 2 y 3

a) $-\frac{18}{30}$ b) $\frac{16}{48}$ c) $-\frac{7}{21}$ d) $-\frac{162}{24}$

e) $-2\frac{5}{75}$ f) $3\frac{24}{36}$

3. Convierta las siguientes fracciones a decimales y marque que tipo de decimal es. Clase 1, 2 y 3

		Tipo de número decimal		
Fracción	**Número decimal**	**Periódico puro**	**Periódico mixto**	**Exacto**
$\frac{27}{4}$				
$-\frac{17}{3}$				
$-\frac{15}{8}$				
$\frac{29}{6}$				
$\frac{8}{3}$				

4. Resuelva las siguientes operaciones para verificar la propiedad de cierre.

Clase 1, 2 y 3

a) $-5 + 4 - 2 + 8$ b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

c) $-9.2 + 4.3 - 12.6$ d) $5 + \{4 - (\frac{2}{5} + \frac{1}{4})\}$

e) -12×15 f) $\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \times (-\frac{2}{3})$

g) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$ h) $2\sqrt{3}\,(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

5. Grafique en la recta numérica los siguientes números.

Clase 4

$\left\{-\frac{7}{4}, -3, 2.5, \frac{3}{2}, -1.2, \frac{1}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{6}\right\}$

6. Encuentre

Clase 5

a) $|-2|$ b) $|-8|$ c) $-|3|$ d) $|-3+0|$ e) $-|-1-2|$

7. Calcule

Clase 6, 7, 8 y 9

a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt{3^2}$ c) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$ d) $\sqrt{7} \times \sqrt{3}$

e) $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ f) $\sqrt{\frac{9}{5}}\sqrt{\frac{2}{3}}$ g) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ h) $\sqrt{\frac{28}{7}}$

8. Racionalice

Clase 10

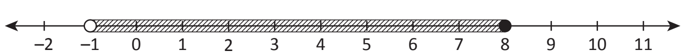
a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ d) $\frac{-5}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ g) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

9. Represente los intervalos en las otras dos formas

Clase 11 y 12

a) $[-3, 4]$

b) 

c) $\{x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3} \leq x < 5\}$

d) $]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$

10. Escriba las siguientes cantidades en notación científica

Clase 13

a) 34000000000
b) 0.000001
c) 374100
d) 0.008193

11. Escriba las siguientes cantidades en notación ordinaria

Clase 13

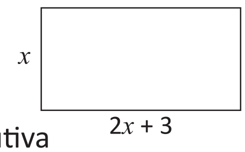
a) 2.3×10^5
b) 1.3×10^{-4}
c) 7.3143×10^{-8}
d) 3.235×10^3

Lección 2. Ecuaciones e inecuaciones

Clase 1. Ecuaciones lineales

Ejemplo 2.1. El largo de un rectángulo es el doble de su ancho aumentado en 3. Si su perímetro mide 30 cm ¿Cuánto mide su ancho?

Solución: x: ancho; $2x + 3$: largo



$$2x + 2(2x + 3) = 30$$
$$2x + 4x + 6 = 30 \quad \text{… propiedad distributiva}$$
$$2x + 4x = 30 - 6$$
$$6x = 24$$
$$x = 4$$

R: El ancho mide 4 cm.

La expresión $2x + 2(2x + 3) = 30$ es una **ecuación lineal** o **ecuación de primer grado en una variable**.

Definición 2.1
Una ecuación lineal o de primer grado en una variable es toda ecuación de la forma: $ax + b = 0$ donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo 2.2. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $4x - 8 = -6x + 12$

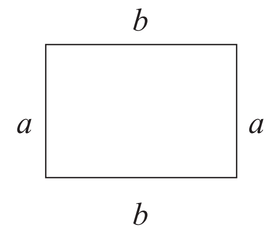
Solución:
$$4x - 8 = -6x + 12$$
$$4x + 6x = 12 + 8$$
$$10x = 20$$
$$x = 2$$

b) $-5x + 4 + 3x = -6$

Solución:
$$-5x + 4 + 3x = -6$$
$$-5x + 3x = -6 - 4$$
$$-2x = -10$$
$$x = 5$$

c) $3x + 9 = 5(2x + 3)$

Solución:
$$3x + 9 = 5(2x + 3)$$
$$3x + 9 = 10x + 15$$
$$3x - 10x = 15 - 9$$
$$-7x = 6$$
$$x = -\frac{6}{7}$$



Perímetro $= a + b + a + b$
$= 2a + 2b$

Al resolver las ecuaciones lineales se aplican las propiedades de la igualdad:
Si A = B entonces:
a) A + C = B + C
b) A – C = B – C
c) AC = BC
d) $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$; C ≠ 0

Resolver una ecuación es encontrar su conjunto solución.

El conjunto solución de una ecuación, son los valores que la hacen verdadera.

d) $-2(3x + 4) - 1 = 3 - (-2x + 3)$

Solución:
$$-2(3x + 4) - 1 = 3 - (-2x + 3)$$
$$-6x - 8 - 1 = 3 + 2x - 3$$
$$-6x - 2x = 8 + 1 + 3 - 3$$
$$-8x = 9$$
$$x = -\frac{9}{8}$$

e) $0.2x - 9 = 0.4x + 3$

Solución 1:
$$0.2x - 9 = 0.4x + 3$$
$$0.2x - 0.4x = 3 + 9$$
$$-0.2x = 12$$
$$x = \frac{12}{-0.2}$$
$$x = -60$$

Solución 2:
$$0.2x - 9 = 0.4x + 3$$
$$10(0.2x - 9) = 10(0.4x + 3)$$
$$2x - 90 = 4x + 30$$
$$2x - 4x = 30 + 90$$
$$x = -60$$

Se pueden convertir los números decimales en números enteros multiplicando por 10 (o 100… según el número de cifras decimales), para evitar operar con los números decimales.

f) $-\frac{2}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - 3$

Solución 1:
$$-\frac{2}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - 3$$
$$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = -5 - 3$$
$$\frac{1}{12}x = -8$$
$$x = -96$$

Solución 2:
$$-\frac{2}{3}x + 5 = -\frac{3}{4}x - 3$$
$$12\left(-\frac{2}{3}x + 5\right) = 12\left(-\frac{3}{4}x - 3\right)$$
$$-8x + 60 = -9x - 36$$
$$-8x + 9x = -60 - 36$$
$$x = -96$$

Se pueden convertir los números racionales en números enteros multiplicando por el mcm de los denominadores, para evitar operar con los números racionales.

Ejercicio 2.1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales.

a) $5x + 4 = -2x - 24$

b) $-3x + 2 = -10x - 5$

c) $2(3x - 4) = -5(2x - 7)$

d) $-4 - 3(5x - 6)= -4(-x - 1) + 6$

e) $-0.4x - 3 = -0.2 + 8x$

f) $4x - 0.3 = 0.5x - 6$

g) $\frac{1}{3}x - 9 = \frac{1}{5}x - 7$

h) $\frac{3}{4}x - 1 = 2x - \frac{1}{2}$

Resuelva los siguientes problemas con ecuaciones lineales:

i) El lado mayor de un triángulo es 8 cm más largo que el lado a. El lado b tiene 12 cm menos que el doble de la longitud del lado a. Si el perímetro es de 40 cm ¿Cuál es la longitud de cada lado?

j) Pedro tiene 4 años más que Juan ¿Qué edad tienen si 5 veces la edad de Juan es tres veces la edad de Pedro?

Clase 2. Despeje de fórmulas

La fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ se usa para calcular la resistencia total R_T de un circuito de dos resistencias R_1 y R_2 colocadas en paralelo.

En el despeje de fórmulas hay que aplicar las propiedades de la igualdad.

Ejemplo 2.3. Calcule la resistencia total de un circuito en paralelo, formado por dos resistencias de 4 ohms y 6 ohms.

Solución: R_1 = 4 ohms R_2 = 6 ohms

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{3+2}{12}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{5}{12} \qquad \rightarrow \ 1(12) = 5(R_T)$$

$$R_T = \frac{12}{5} = 2.4$$

R: La resistencias total es 2.4 ohms.

Ejemplo 2.4. En la fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, despeje para R_T.

Solución: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_T}$

$$\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_T}$$ calculando el mcm de los denominadores

$$R_T\,(R_2 + R_1) = 1(R_1\,R_2)$$

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$$

Ejercicio 2.2. En la fórmula $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ despeje para:

a) R_1 b) R_2

Ejemplo 2.5. En las siguientes ecuaciones despeje para la variable x.

a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$

Solución: $ac = bx$

$$x = \frac{ac}{b}$$

b) $\frac{ab}{x} = r + 1$

Solución: $ab = x(r + 1)$

$$\frac{ab}{r+1} = x$$

c) $\frac{a}{x+1} = r$

Solución: $a = r(x + 1)$

$$a = rx + r(1)$$

$$a - r = rx$$

$$\frac{a-r}{r} = x$$

Ejercicio 2.3. En cada ecuación despeje para la variable indicada.

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ despeje para d

b) $\frac{a}{bc} = \frac{d}{e}$ despeje para b

c) $\frac{ax}{y} = \frac{bc}{e}$ despeje para e

d) $\frac{5x}{y} = a + e$ despeje para y

e) $x + 5 = \frac{3m}{y}$ despeje para y

f) $\frac{2n}{x-4} = m$ despeje para x

g) $\frac{x}{5-y} = m - 1$ despeje para y

h) $k - y = \frac{e-b}{x+a}$ despeje para x

Clase 3. Inecuaciones

Ejemplo 2.6. Un autobús puede transportar hasta 1500 libras. Lleva una carga de 300 libras y varias personas que en promedio pesan 150 libras cada una. Si x es el número de personas, escriba una expresión que establezca esa relación.

Solución:

$150x + 300 \leq 1500$ $\quad x$: número de personas

La expresión $150x + 300 \leq 1500$ es una inecuación lineal en una variable.
La relación de orden entre dos números se puede establecer utilizando los siguientes 4 símbolos de desigualdad:

Símbolo	Ejemplo	Sentido	Nota
$<$	$a < 4$	a es menor que 4	a no puede ser 4
$\leq$	$a \leq 4$	a es menor o igual que 4	a puede ser 4
$>$	$a > 4$	a es mayor que 4	a no puede ser 4
$\geq$	$a \geq 4$	a es mayor o igual que 4	a puede ser 4

Definición 2.2
Una inecuación lineal o de primer grado en una variable es una expresión con uno o más símbolos de desigualdad y una variable con exponente 1.

$3 < 5$ es una desigualdad numérica.
$a < 5$ es una inecuación, porque lleva una variable y uno de los signos de desigualdad.

Ejemplo 2.7. Exprese con una inecuación las siguientes situaciones:

a) 3 veces un número disminuido en 6 es mayor que 40.

Solución: x: número $\quad 3x - 6 > 40$

b) El sueldo base de un empleado es L 10 000. Por cada moto vendida se le da una comisión sobre venta de L 250. El mes pasado obtuvo un salario arriba de los L 15 000.

Solución: x: número de motos $\quad 250x + 10\,000 > 15\,000$

c) En un elevador cuya capacidad no sobrepasa las 1320 libras, se sube una carga de 495 libras y varias personas que, en promedio, pesan 165 libras cada una.

Solución: x: cantidad de personas $165x + 495 \leq 1320$

d) El perímetro de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden cada uno el triple del lado desigual, es igual o mayor que 70 cm.

Solución: x: medida del lado desigual $x + 3x + 3x \geq 70$

Clase 4. Propiedades de las desigualdades

Ejemplo 2.8. Sume y reste 3 a ambos lados de $2 < 5$. ¿Qué obtiene?

Solución: Sumando 3 a ambos lados: $2 + 3 < 5 + 3$ se obtiene $5 < 8$

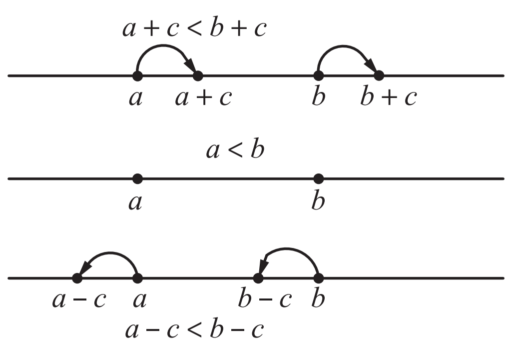
Restando 3 a ambos lados: $2 - 3 < 5 - 3$ se obtiene $-1 < 2$

Sumando 3 a ambos lados de $2 < 5$ se obtiene $5 < 8$ y la relación de dimensión entre los números no cambia, lo mismo ocurre si se resta 3 a ambos lados.

Si se suma o resta un mismo número a ambos miembros de una desigualdad se obtiene otra desigualdad con la misma relación de dimensión.

En séptimo grado se estudiaron las propiedades de las igualdades para resolver ecuaciones lineales. Ahora se estudiarán las propiedades de las desigualdades para resolver inecuaciones.

Lo anterior se visualiza de la forma siguiente:



Propiedad 1:

Si $a < b$ entonces:

i) $a + c < b + c$

ii) $a - c < b - c$

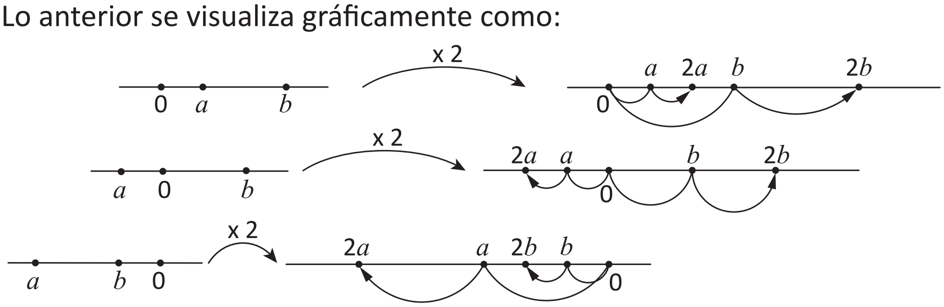
Se llama transponer el pasar un término de un lado al otro de la inecuación.

Ejemplo 2.9. Multiplique por 2 ambos lados de $2 < 5$ ¿Qué observa?

Solución: Al multiplicar por 2 ambos lados: $2(2) < 5(2)$ se obtiene $4 < 10$.

Si se multiplica por 2 ambos lados de $2 < 5$ se obtiene $4 < 10$; la relación de dimensión entre los números no cambia.

Lo anterior se visualiza gráficamente como:



Ejemplo 2.10. Divida entre 2 ambos lados de $2 < 5$, ¿Qué obtiene?

Solución: Al dividir entre 2 ambos lados: $2 \div 2 < 5 \div 2$ se obtiene: $1 < \frac{5}{2}$.

Si se divide por 2 ambos lados de $2 < 5$ se obtiene $1 < \frac{5}{2}$; la dimensión entre los números no cambia.

> Si se multiplica o divide entre un mismo número positivo ambos miembros de una desigualdad se obtiene otra desigualdad con la misma relación de dimensión.

Propiedad 2:
Si $a < b$ y $c > 0$ entonces:
i) $ac < bc$
ii) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplo 2.11. Multiplique y divida por -2 ambos lados de $2 < 5$.

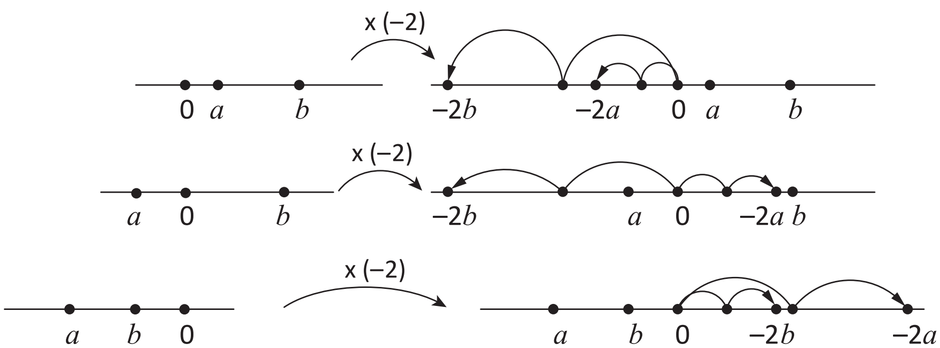
Solución: Al multiplicar por -2 ambos lados: $2(-2) = -4$ y $5(-2) = -10$ se obtiene $-4 > -10$.

Al dividir entre -2 ambos lados: $\frac{2}{-2} = -1$ y $\frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$ se obtiene $-1 > -\frac{5}{2}$.

La relación de dimensión cambia pues al multiplicar $2 < 5$ por -2, se obtiene $-4 > -10$. Lo mismo sucede al dividir entre -2, se obtiene $-1 > -\frac{5}{2}$.

> Cuando ambos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen entre un mismo número negativo, la relación de dimensión cambia.

Lo anterior se puede visualizar gráficamente así:



Propiedad 3: Si $a < b$ y $c < 0$ entonces:
i) $ac > bc$
ii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Ejercicio 2.4. Si $a < b$ escriba el signo adecuado en la casilla

a) $-2a$ $\square$ $-2b$

b) $5a$ $\square$ $5b$

c) $\frac{5}{7}a$ $\square$ $\frac{5}{7}b$

d) $-\frac{1}{3}a$ $\square$ $-\frac{1}{3}b$

e) $-a$ $\square$ $-b$

f) $2a$ $\square$ $2b$

Clase 5 y 6. Solución de inecuaciones lineales

Ejemplo 2.12. Complete la tabla de la izquierda que muestra los valores de x en la inecuación $x + 2 < 5$. ¿Qué valores satisfacen la inecuación?

Valor de x	Valor de $x + 2$	¿$x + 2 < 5$?
0	2	Sí
1		
2		
3		
4		
5		

Solución:

Valor de x	Valor de $x + 2$	¿$x + 2 < 5$?
0	2	Sí
1	3	Sí
2	4	Sí
3	5	No
4	6	No
5	7	No

R: Los valores 0, 1 y 2.

De la información de la tabla se deduce que los valores de x que satisfacen la inecuación son todos aquellos que son menores que 3. ($x < 3$).

La solución de una inecuación es el valor o valores de la variable que satisfacen la inecuación.
Resolver una inecuación consiste en encontrar su solución.

Ejercicio 2.5. Resuelva usando tablas.

a) $x + 2 \leq 4$ b) $2x - 1 \geq x + 4$ c) $3x \leq 2x + 3$ d) $x - 2 > -5$

Para resolver ecuaciones lineales se aplican las propiedades de la igualdad, de forma análoga se aplican las propiedades de la desigualdad para las inecuaciones.

Ejemplo 2.13. Resuelva $x + 4 < 7$.

Solución: $x + 4 < 7$

$x + 4 - 4 < 7 - 4$ Se resta 4 a ambos lados (Propiedad 1)

$x < 3$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, x < 3\}$

Ejercicio 2.6. Resuelva:

a) $x + 4 < 6$ b) $x - 2 \leq -5$ c) $x - 3 > -7$ d) $x - 7 \geq 10$

$x + 4 < 7$
$x < 7 - 4$
$x < 3$

Nota que el 4, que está sumando en la izquierda, pasa restando a la derecha.

CS: Conjunto solución.

Ejemplo 2.14. Resuelva $4x - 6 > 2$

Solución 1: $4x - 6 > 2$

$4x > 2 + 6$ … transponer – 6 al lado derecho

$4x > 8$

$\frac{4x}{4} > \frac{8}{4}$ … se divide entre 4 (Propiedad 2)

$x > 2$

CS: $\{x \in R, x > 2\}$

Solución 2: $4x - 6 > 2$ también se puede resolver así:

$4x > 2 + 6$

$4x > 8$

$x > \frac{8}{4}$ … el 4 que multiplica a x pasa a dividir al otro lado

$x > 2$

Una inecuación lineal es una desigualdad que puede transformarse a la forma $ax + b < 0$ donde $a \neq 0$. El signo $<$ puede sustituirse por $\leq$, $>$ o $\geq$.

Al resolver inecuaciones, la solución se puede expresar sin utilizar la notación conjuntista. $x > 2$ o $\{x \in R, x > 2\}$ son respuesta correctas.

Ejercicio 2.7. Resuelva:

a) $4x + 8 \leq 2x - 12$

b) $3x - 2 \geq x - 14$

c) $2x - 7 < -3x + 3$

d) $5x - 4 > 2x - 3$

Ejemplo 2.15. Resuelva $5x - 15 < 7x + 3$

Solución: $5x - 15 < 7x + 3$

$5x - 7x < 3 + 15$

$-2x < 18$

$\frac{-2x}{-2} > \frac{18}{-2}$ … Se divide entre – 2 (Propiedad 3)

$x > -9$

Al dividir o multiplicar por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Ejercicio 2.8. Resuelva:

a) $x - 9 < 3x + 1$

b) $4x + 7 \geq 2x - 1$

c) $-6x - 8 > -3x - 7$

d) $2x - 10 \leq 7x - 9$

Ejemplo 2.16. Resuelva $2(x + 4) \leq 2(3x - 10)$.

Solución: $2(x + 4) \leq 2(3x - 10)$

$2x + 8 \leq 6x - 20$ … propiedad distributiva

$2x - 6x \leq -20 - 8$ … transponer 8 y $6x$

$-4x \leq -28$ … se divide entre -4

$x \geq 7$

Ejercicio 2.9. Resuelva:

a) $3(2x - 1) < 2x + 5$

b) $-2(-2x + 4) \leq x + 7$

c) $-4(x - 3) > -3(x - 5)$

d) $-9(-2x - 3) \geq 4(2x - 3)$

Clase 7 y 8. Resolver problemas usando inecuaciones lineales

Ejemplo 2.17. Un camión puede llevar hasta 1000 kg. Si tiene una carga que pesa 200 kg, ¿Cuántas cajas podrá llevar si éstas pesan 30 kg cada una?

Solución: x: Cantidad de cajas; Inecuación: $30x + 200 \leq 1000$

$$30x + 200 \leq 1000$$
$$30x \leq 1000 - 200$$
$$x \leq \frac{800}{30}$$
$$x \leq 26.66\ldots$$

R: Podrá llevar hasta 26 cajas.

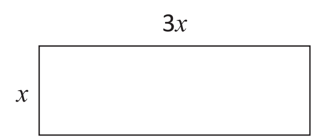
Ejemplo 2.18. 8 veces un número disminuido en 15 es mayor o igual que 81. ¿Cuál es el número?

Solución: x: El número; Inecuación: $8x - 15 \geq 81$

$$8x - 15 \geq 81$$
$$8x \geq 81 + 15$$
$$x \geq \frac{96}{8}$$
$$x \geq 12$$

R: El número es 12 o cualquiera mayor que 12.

Ejemplo 2.19. El perímetro de un rectángulo no sobrepasa los 100 cm. Si el largo es 3 veces el ancho ¿qué valores puede tomar el ancho de este rectángulo?



Solución: x: el ancho; Inecuación: $x + 3x + x + 3x \leq 100$

$$x + 3x + x + 3x \leq 100$$
$$8x \leq 100$$
$$x \leq \frac{100}{8}$$
$$x \leq 12.5$$

R: Cualquier valor menor o igual que 12.5 cm

Ejercicio 2.10. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) La capacidad de un camión es 20 000 libras. Su carga consiste en 5 bloques que pesan 210 libras cada uno y una cantidad de cajas de 700 libras cada una. ¿Cuántas cajas puede llevar el camión?

b) Un elevador tiene capacidad para transportar hasta 2 000 libras. Si el promedio de peso de las personas es de 150 libras, ¿cuántas personas caben en el elevador?

c) 2 veces un número menos 1 es menor que 20. ¿Qué se concluye de ese número?

d) En una bolsa que pesa 50 g se agregan mables que pesan 20 g cada uno. Ahora el peso de la bolsa es mayor que 800 g. ¿Cuál es la cantidad mínima de mables que se pueden agregar a la bolsa?

e) Siete veces un número es menor que 40. ¿Cuáles podrán ser los valores de esos números?

f) En una caja que pesa 200 gramos se colocan x cuadernos que pesan 80 gramos cada uno. El peso total es menor o igual que 1500 g. ¿Cuál es la cantidad máxima de cuadernos que caben en la caja? ¿Se podrán colocar 12 cuadernos? ¿Se podrán colocar 20 cuadernos?

g) Un estudiante necesita para aprobar su curso un promedio mínimo de 80. En los primeros tres exámenes obtuvo 72, 80 y 91. ¿Qué calificación debe obtener en el cuarto examen para aprobar el curso?

h) Halle los números enteros cuya cuarta parte aumentada en 10 es mayor que su tercio aumentado en 2.

i) La capacidad de carga de un caballo no supera las 200 libras. En su lomo lleva un niño que pesa 30 libras y una cantidad de bolsas que pesan 15 libras cada una. ¿Cuántas bolsas podrá llevar el caballo?

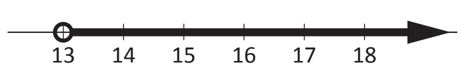
Clase 9. Sistema de inecuaciones lineales en una variable

Ejemplo 2.20. En los siguientes anuncios se presentan los requisitos de edad para que los estudiantes asistan a los diferentes eventos del campeonato de verano de matemáticas:

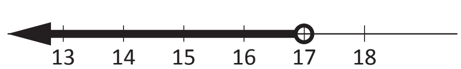
Álgebra	Geometría	Cálculo
Estudiantes mayores de 13 años.	Estudiantes menores de 17 años.	Estudiantes mayores de 16 años.

¿Qué estudiantes podrán asistir a los eventos de álgebra y geometría?
Solución: x: edad de los estudiantes

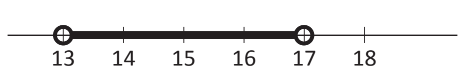
Inecuaciones:

Álgebra


$x > 13$

Geometría


$x < 17$

Álgebra y geometría


$13 < x < 17$

R: A los eventos de álgebra y geometría podrán asistir los estudiantes que tienen más de 13 años pero al mismo tiempo tienen menos de 17 años.

Se pueden resolver estas dos inecuaciones representando cada una como un intervalo en forma gráfica y después encontrar su parte común.

Cuando se buscan soluciones comunes a dos inecuaciones lineales en una variable, se colocan de la siguiente manera y se le llama **sistema de inecuaciones lineales en una variable**.

$$\begin{cases} x > 13 \\ x < 17 \end{cases}$$

Un **sistema de inecuaciones lineales** en una variable es una pareja de inecuaciones lineales en una variable.
La solución de un sistema de inecuaciones lineales en una variable son los valores de la variable que satisfacen simultáneamente las dos inecuaciones.
Resolver un sistema de inecuaciones lineales en una variable es encontrar su solución.

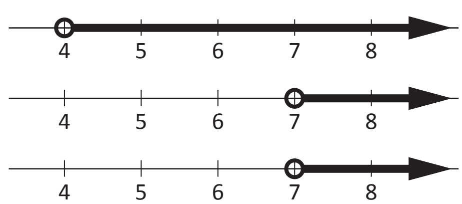
$$\begin{cases} x > 13 \\ x < 17 \end{cases}$$

es un sistema de inecuaciones lineales en una variable.

Ejercicio 2.11. ¿Qué estudiantes podrán asistir a los eventos de álgebra y cálculo?

Ejemplo 2.21. Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x > 4 \\ x > 7 \end{cases}$



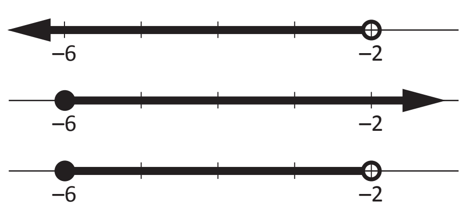
$x > 4$

$x > 7$

$x > 7$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, x > 7\}$

b) $\begin{cases} x < -2 \\ x \geq -6 \end{cases}$



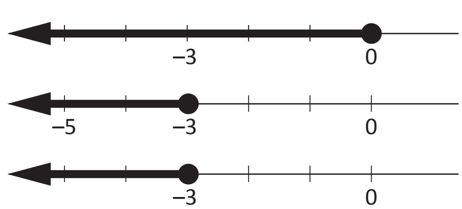
$x < -2$

$x \geq -6$

$-6 \leq x < -2$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, -6 \leq x < -2\}$

c) $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$



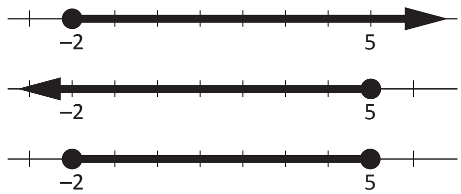
$x \leq 0$

$x \leq -3$

$x \leq -3$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, x \leq -3\}$

d) $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 5 \end{cases}$



$x \geq -2$

$x \leq 5$

$-2 \leq x \leq 5$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\}$

Ejercicio 2.12. Encuentre el conjunto solución de:

a) $\begin{cases} x \leq 3 \\ x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 4 \\ x > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x > -5 \\ x \leq -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \leq 7 \\ x \leq 12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 7 \end{cases}$

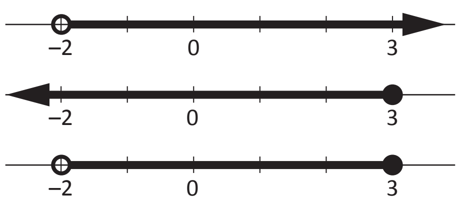
Cuando no tiene solución, se utiliza conjunto nulo "ϕ".

Ejemplo 2.22. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x > x - 2 \\ 3x - 5 \leq 2x - 2 \end{cases}$

Solución:

$2x > x - 2$	$3x - 5 \leq 2x - 2$
$2x - x > -2$	$3x - 2x \leq 5 - 2$
$x > -2$	$x \leq 3$



$x > -2$

$x \leq 3$

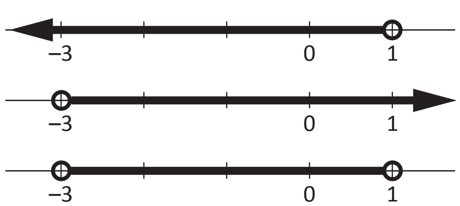
$-2 < x \leq 3$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 3\}$

b) $\begin{cases} 4x - 8 < 2x - 6 \\ -5x + 7 > -10x - 8 \end{cases}$

Solución:

$4x - 8 < 2x - 6$	$-5x + 7 > -10x - 8$
$4x - 2x < 8 - 6$	$-5x + 10x > -7 - 8$
$2x < 2$	$5x > -15$
$x < 1$	$x > -3$



$x < 1$

$x > -3$

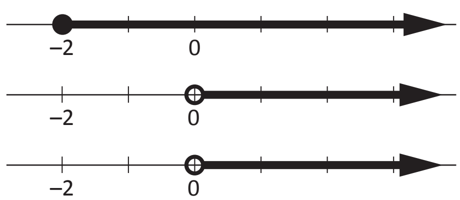
$-3 < x < 1$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, -3 < x < 1\}$

c) $\begin{cases} -3x - 7 \leq x + 1 \\ -2x - 4 < -x - 4 \end{cases}$

Solución:

$-3x - 7 \leq x + 1$	$-2x - 4 < -x - 4$
$-3x - x \leq 7 + 1$	$-2x + x < 4 - 4$
$-4x \leq 8$	$-x < 0$
$x \geq -2$	$x > 0$



$x \geq -2$

$x > 0$

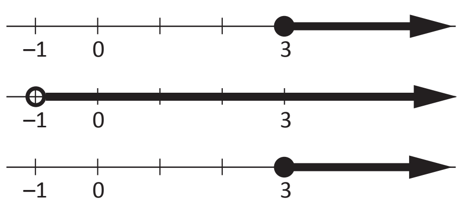
$x > 0$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

d) $\begin{cases} 2(2x - 3) \geq 4 - (x - 5) \\ -3(x + 3) < 2(5x - 3) + 10 \end{cases}$

Solución:

$2(2x - 3) \geq 4 - (x - 5)$	$-3(x + 3) < 2(5x - 3) + 10$
$4x - 6 \geq 4 - x + 5$	$-3x - 9 < 10x - 6 + 10$
$4x + x \geq 6 + 4 + 5$	$-3x - 10x < 9 - 6 + 10$
$5x \geq 15$	$-13x < 13$
$x \geq 3$	$x > -1$



$x \geq 3$

$x > -1$

$x \geq 3$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

Ejercicio 2.13. Resuelva.

a) $\begin{cases} -4x - 6 < -5x - 2 \\ 7x - 8 > 6x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6 > x - 4 \\ -3x - 5 < -4x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 6 < -2x + 2 \\ x + 7 \geq -2x - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x + 2 < 2x - 8 \\ 5x - 7 \leq -2x + 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 5 < 4x - 2 \\ 4x + 3 > 6x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x - 2 < 7x + 4 \\ -4x + 3 \leq x - 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -2(3x - 1) < -4x \\ 3x < 3(3x - 4) \end{cases}$

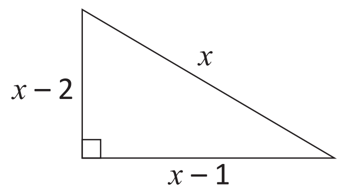
h) $\begin{cases} 4(x - 2) > 3 - (2x - 1) \\ -5(2x - 3) < 2(3x - 10) + 3 \end{cases}$

Clase 10 y 11. Ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 2.23.

Un terreno tiene la forma de un triángulo rectángulo. El cateto más corto mide 2 m menos que la longitud de la hipotenusa y el cateto más largo mide 1 m menos que la longitud de su hipotenusa. Determine las longitudes de los tres lados del terreno.

Solución:
Sea x la longitud en metros de la hipotenusa.
$x - 1$: Longitud del cateto largo.
$x - 2$: Longitud del cateto corto.



Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que:
$(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = x^2$

Al desarrollar los productos y trasponer los términos al lado izquierdo queda:

$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 - x^2 = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$

A la expresión $x^2 - 6x + 5 = 0$ se le llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es toda ecuación que se puede escribir de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Sustituya los valores 4, 5 y 6 correspondiente a x en la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. ¿Qué valor satisface la ecuación?

$x = 4 \rightarrow 4^2 - 6(4) + 5 = 0;\quad -3 \neq 0$

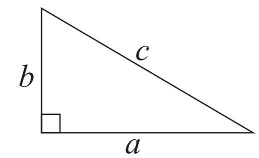
$x = 5 \rightarrow 5^2 - 6(5) + 5 = 0;\quad 0 = 0$

$x = 6 \rightarrow 6^2 - 6(6) + 5 = 0;\quad 5 \neq 0$

El valor $x = 5$ satisface la ecuación. Por lo que la hipotenusa mide 5 m; el cateto mayor mide $x - 1 = 5 - 1 = 4$ metros y el cateto menor mide $x - 2 = 5 - 2 = 3$ metros.

El conjunto de valores de la incógnita que satisfacen la ecuación cuadrática se llama solución.

Teorema de Pitágoras.



$a^2 + b^2 = c^2$

En la ecuación: $x^2 - 6x + 5 = 0$, el lado izquierdo es un polinomio y el lado derecho es 0.
Si $a = 0$ en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ nos queda de la forma $bx + c = 0$, y esta es una ecuación lineal o de grado 1.

Ejercicio 2.14.

Pruebe si $x = 1$ satisface la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. ¿Es $x = 1$ solución de la ecuación? ¿Qué valores son solución de la ecuación?

$x = 5$ y $x = 1$ son solución de $x^2 - 6x + 5 = 0$

Ejemplo 2.24.

Al factorizar el lado izquierdo de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$ ¿Qué valores de x hacen que ese lado sea cero?

$x^2 - 6x + 5 = 0$	$x^2 - 6x + 5 = 0$
$(x - 5)(x - 1) = 0$	$(x - 5)(x - 1) = 0$
$(5 - 5)(5 - 1) = 0$	$(1 - 5)(1 - 1) = 0$
$0(4) = 0$	$-4(0) = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

$x = 5$, (obtenido de $x - 5 = 0$) y $x = 1$ (obtenido de $x - 1 = 0$) hacen que el lado izquierdo de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$ sea cero; es decir cuando uno de los factores es cero.

Propiedad del Factor cero: Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$ o ambos.

Ejemplo 2.25.

Encuentre el conjunto solución (CS) de las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la factorización.

a) $x^2 + 5x = -6$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ .... igualando a cero.

$(x + 3)(x + 2) = 0$

$x + 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$ .... aplicando la propiedad del factor cero.

$x = -3$ ó $x = -2$

CS: $\{-3, -2\}$

b) $4x^2 = 9$

$4x^2 - 9 = 0$

$(2x - 3)(2x + 3) = 0$

$2x - 3 = 0$ ó $2x + 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ ó $x = -\frac{3}{2}$

CS: $\left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$

c) $3x^2 = 7x + 6$

$3x^2 - 7x - 6 = 0$

$(3x + 2)(x - 3) = 0$

$3x + 2 = 0$ ó $x - 3 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ ó $x = 3$

CS: $\left\{-\frac{2}{3}, 3\right\}$

d) $3x^2 = 75$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 \\ 3(x^2 - 25) &= 0 \\ x^2 - 25 &= 0 \\ (x-5)(x+5) &= 0 \\ x - 5 = 0 \text{ ó } x + 5 &= 0 \\ x = 5 \quad \text{ó} \quad x &= -5 \end{aligned}$$

CS: $\{\pm 5\}$

e) $3x^2 + 6x = 45$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 45 &= 0 \\ 3(x^2 + 2x - 15) &= 0 \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \\ (x+5)(x-3) &= 0 \\ x + 5 = 0 \text{ ó } x - 3 &= 0 \\ x = -5 \quad \text{ó} \quad x &= 3 \end{aligned}$$

CS: $\{-5, 3\}$

Ejercicio 2.15.

Encuentre el conjunto solución por factorización de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 9x + 14 = 0$

b) $x^2 - 4x = 12$

c) $x^2 = 49$

d) $x^2 - 81 = 0$

e) $9x^2 - 100 = 0$

f) $-4x^2 = -1$

g) $3x^2 - 24x = 48$

h) $10x^2 = -19x + 15$

i) $-8x^2 + 26x - 15 = 0$

j) $2x^2 - 4x = 16$

k) $3x^2 = 19x - 20$

l) $6x^2 + 11x = 10$

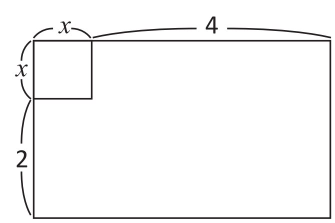
m) $(x + 2)^2 = 4$

n) $(x - 5)^2 - 9 = 0$

ñ) $6x^2 - 15x - 9 = 0$

o) $x^2 - 1 = 0$

p) En un cuadrado se extiende el lado vertical 2 cm y el lado horizontal 4 cm para obtener un rectángulo cuya área mide tres veces el área del cuadrado. ¿Cuánto mide el área del cuadrado?



q) Hay dos números. La suma de ellos es 13 y la suma de los cuadrados es 85. ¿Cúales son esos números?

Clase 12 y 13. Fórmula Cuadrática

Ejemplo 2.26.

Pensar en la manera de resolver la ecuación cuadrática en la forma más general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ comparándola con la resolución de $4x^2 + 7x + 1 = 0$

$4x^2 + 7x + 1 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
$4x^2 + 7x = -1$, transponer 1	$ax^2 + bx = -c$ transponer c
$x^2 + \frac{7}{4}x = -\frac{1}{4}$ dividiendo entre 4	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$, dividiendo entre a
$x^2 + \frac{7}{4}x + \left(\frac{\frac{7}{4}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} + \left(\frac{\frac{7}{4}}{2}\right)^2$ ...	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ ...
... Sumar $\left(\frac{\frac{7}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2$ a ambos lados.	... Sumar $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados
$x^2 + \frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{33}{64}$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
$\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{33}{64}$ factorizado por TCP.	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ factorizando por TCP.
$\left(x + \frac{7}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{33}}{8}$ extrayendo raíz cuadrada.	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ extrayendo raíz cuadrada.
$x = \frac{-7}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$ despejando x.	$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ despejando x
$x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{8}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b^2 - 4ac \geq 0$, significa que no es negativo, ya que si lo fuera su raíz cuadrada no estaría definida en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.27.

Resuelva $x^2 + 8x = -6$ usando la fórmula cuadrática.

Solución:

$x^2 + 8x = -6$

$x^2 + 8x + 6 = 0$, $a = 1$, $b = 8$, $c = 6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -4 \pm \sqrt{10}$$

CS: $\left\{-4 \pm \sqrt{10}\right\}$

Ejemplo 2.28.

Resuelva $5x^2 - 4x - 1 = 0$, usando la fórmula cuadrática.

Solución:

$a = 5$, $b = -4$, $c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{10}$$

$$= \frac{4 \pm 6}{10},$$

$$x_1 = \frac{4+6}{10} = \frac{10}{10} = 1, \quad x_2 = \frac{4-6}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

CS: $\left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$

$5x^2 - 4x - 1 = 0$ se puede resolver por factorización como:

$5x^2 - 4x - 1 = 0$

$(5x + 1)(x - 1) = 0$

$5x + 1 = 0$ ó $x - 1 = 0$

$x = -\frac{1}{5}$ ó $x = 1$

CS: $\left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$

Ejercicio 2.16.

Aplicando la fórmula cuadrática encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 - 7x + 1 = 0$

b) $3x^2 = -9x + 2$

c) $x^2 - 4x = 3$

d) $x^2 = x + 5$

e) $5x^2 - 5x - 3 = 0$

f) $x^2 = -2x + 1$

g) $x(x - 2) = 2x - 2$

h) $3x(x - 2) + 4 = 6$

Lección 3. Coordenadas planas

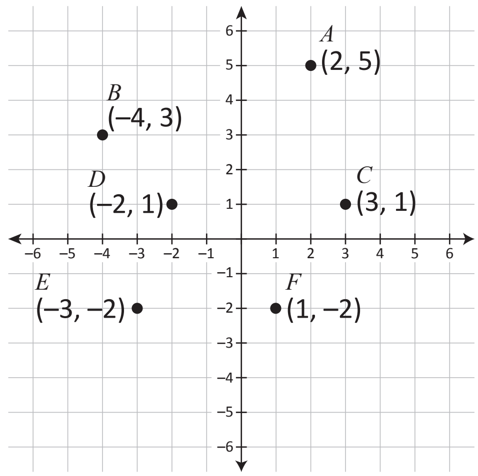
Clase 1. Coordenadas planas

Ejemplo 3.1. Ubique los siguientes puntos en un sistema de ejes cartesianas (Plano cartesiano):

a) A (2, 5) b) B (–4,3) c) C (3, 1) d) D (–2, 1)

e) E (–3, –2) f) F (1, –2)

Solución:



[A]

En octavo grado aprendieron a ubicar puntos en el plano cartesiano.

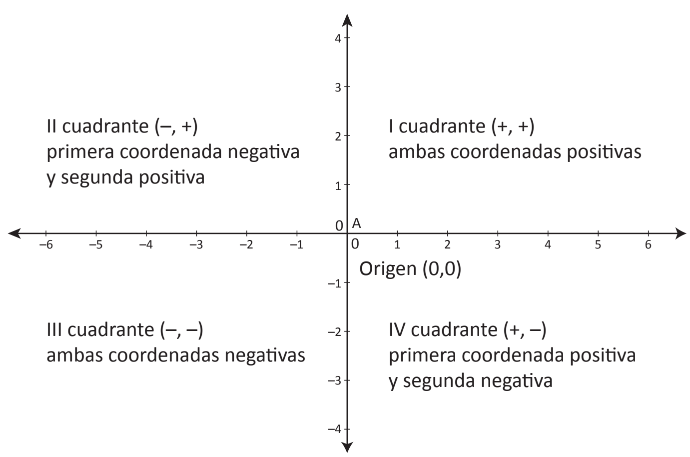
El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical que se cortan en un punto.

En el plano cartesiano a la recta horizontal se le llama eje x o eje de las abcisas y la recta vertical eje y o eje de las ordenadas. A los dos ejes juntos se les denomina sistema de coordenadas cartesianas. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama origen del sistema de coordenadas cartesianas.

Los segmentos de 0 al 1 en ambas rectas miden lo mismo, esta distancia debe ser la misma para cualquier par de números consecutivos. Los puntos que se grafican en el plano cartesiano se le llama pares ordenados (a, b).

Un par ordenado (a, b) está compuesto por una coordenada para x y otra coordenada para y.

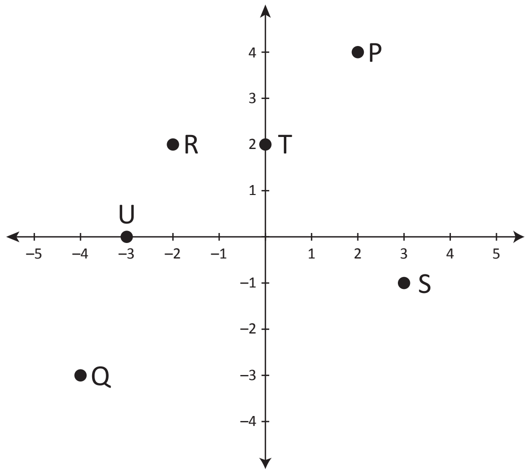
El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes.



Para ubicar un par ordenado (a, b) en el plano cartesiano se traza un segmento vertical que pase por a y un segmento horizontal que pase por b y en la intersección de los segmentos se ubica (a, b).

El origen está formado por el par ordenado (0, 0).

Ejemplo 3.2. ¿Cuál es el par ordenado de los siguientes puntos en el sistema de coordenadas cartesianas?



Solución:

P (2, 4) Q (-4, -3) R (-2, 2) S (3, -1) T (0, 2) U (-3, 0)

En el caso del punto T y U están ubicadas sobre los ejes y y x respectivamente, por lo tanto:

Si el punto está ubicado en el eje x la coordenada de y será cero $(a, 0)$

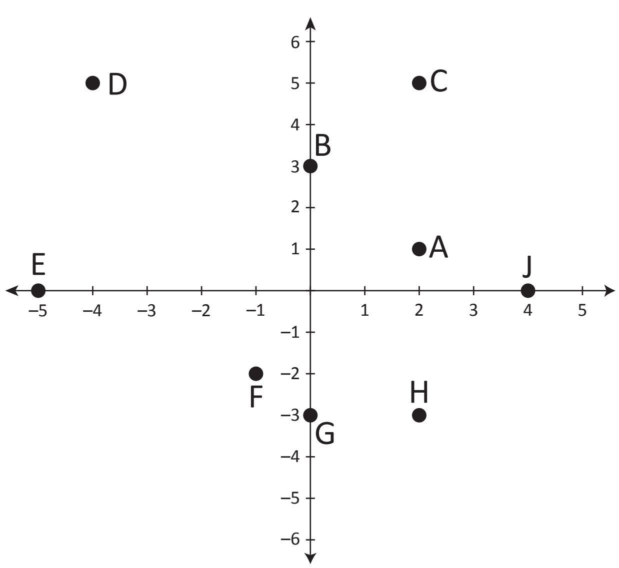
Si el punto está ubicado en el eje y la coordenada de x será cero $(0, a)$

Ejercicio 3.1.

a) Ubique los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas

A (2, 5)	B (−3,1)	C (−2, −2)	D (4, −3)
E (0, −1)	F (5,0)	G (−6,0)	H (0, −4)

b) En el siguiente sistema de coordenadas cartesianas determine el par ordenado de los puntos que están graficados.

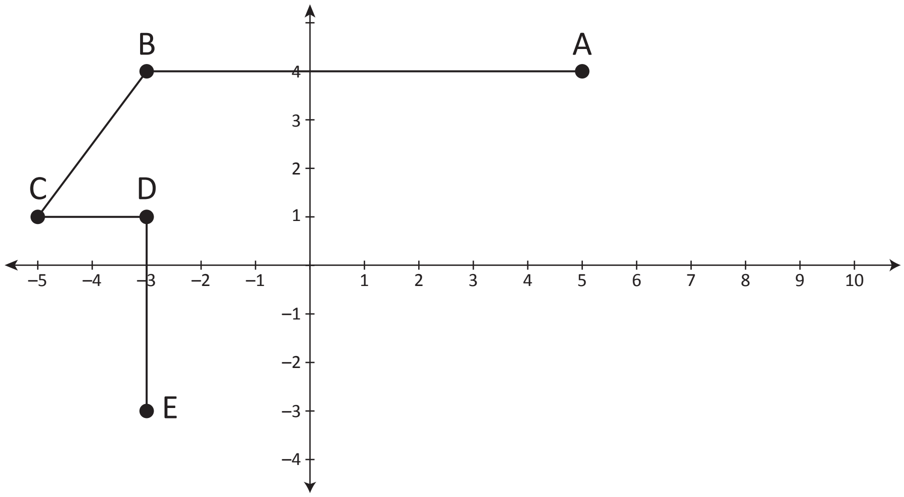


[B]

Para determinar la ubicación de un punto P, se traza un segmento vertical desde el punto P hasta el eje x y un segmento horizontal desde el punto P hasta el eje y la intersección de los dos segmentos corresponde al punto P.

Si estos segmentos cortan a los ejes x y y en los puntos a y b respectivamente entonces el punto P tiene coordenadas (a, b) y se escribe P (a, b).

c) El siguiente diagrama muestra el dibujo parcial de una casa

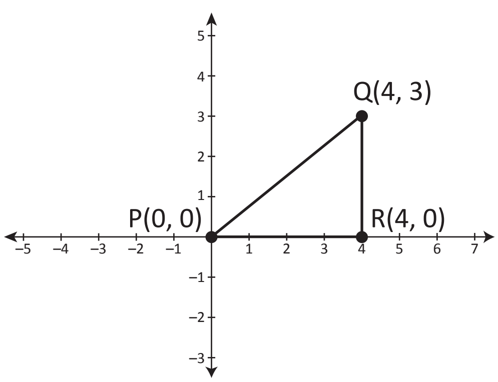


c_1) Nombre las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E
c_2) Grafique los puntos F(8, –3), G(8, 1), H(10, 1), I(7, 4),J(6, 4), K(6, 5), L(5, 5)
c_3) Dibuje los segmentos EF, FG, GH, HI, IJ, JK, KL y LA.

Clase 2. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano desde el origen

Ejemplo 3.3. Ubique en el plano cartesiano el punto P (0, 0), Q (4, 3) y luego trace $\overline{PQ}$. Encuentre la distancia de P a Q.

[A]



Para encontrar la distancia formamos el triángulo rectángulo trazando un segmento vertical que pase por Q hasta x en el punto R (4,0), se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar PQ. Las medidas de los catetos son:
PR = |4 – 0| = |4| = 4
QR = |3 – 0| = |3| = 3

PQ = $\sqrt{4^2 + 3^2}$ = $\sqrt{16 + 9}$ = $\sqrt{25}$ = 5

PQ = 5
La distancia de P a Q es 5 unidades

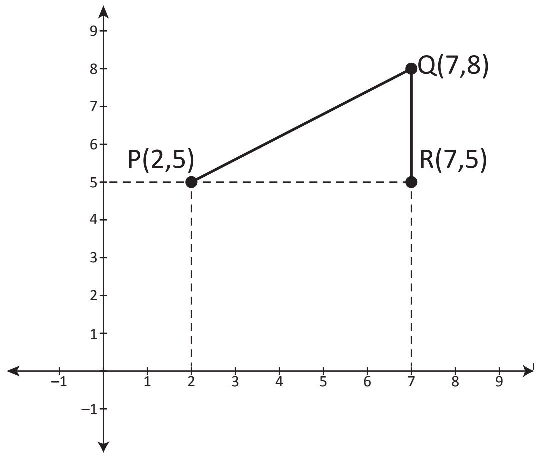
Se forma un triángulo rectángulo por lo que el segmento PQ es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

La distancia de PR se obtiene restando las coordenadas en x de cada punto y la distancia de QR se obtienen restando las coordenadas de y de cada punto.
PR = $|x_2 - x_1|$
QR = $|y_2 - y_1|$

Ejercicio 3.2. Sea P(0, 0), Q(8, 10), R(3, 2), S(1, 4), T(–2, 5), U(–4, –3)
Encuentre la distancia y para cada inciso, ubique los puntos en el plano cartesiano.
a) PQ b) PR c) PS d) PT e) PU

Clase 3. Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Ejemplo 3.4. Sean los puntos P (2,5) Y Q (7,8) encuentre la distancia PQ (aproxime el valor hasta las centésimas utilizando el redondeo).
Solución:



Al graficar los puntos P, Q trazar un segmento vertical desde P a x y desde Q a x.
Trazar un segmento horizontal desde P y que interseque el segmento vertical que se toma desde Q a x en el punto R.
Las coordenadas de los puntos que forman el triángulo rectángulo ΔPQR son:
P (2, 5)   Q (7, 8)   R (7, 5)

Las medidas de los segmentos son:
PR = |7 – 2| = |5| = 5   QR = |8 – 5| = |3| = 3

$$PQ = \sqrt{PR^2 + QR^2} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5.83$$

R: La distancia PQ es 5.83 unidades

De los ejemplos 3.3 y 3.4 se puede incluir la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en un sistema de ejes coordenados

Teorema 3.1 Fórmula de la distancia entre dos puntos
Sea P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2). La distancia entre P y Q está dada por:

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Al tener la fórmula de la distancia entre dos puntos no es necesario graficar los puntos en el plano para calcularla.

Ejemplo 3.5. Encontrar la distancia entre los puntos M y N. M (–2, 3) N (1, 4)

Solución:
M (–2, 3)   N (1, 4)
x_1, y_1 x_2, y_2

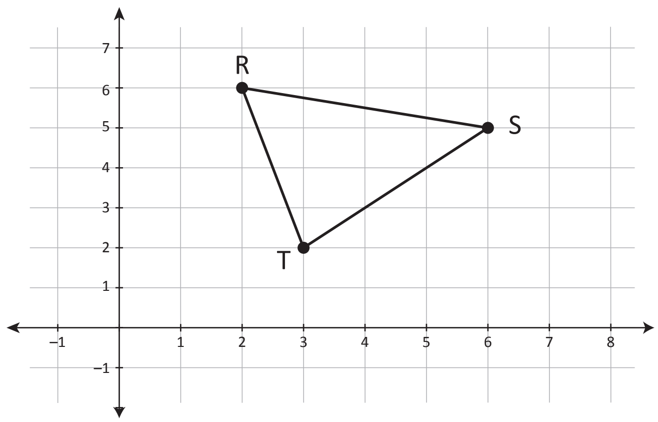
$$MN = \sqrt{(1-(-2))^2+(4-3)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

R: MN = $\sqrt{10}$ ó MN ≈ 3.16

Ejercicio 3.3.

a) Dados los puntos: A (2, 3), B (5, 7), C (0, 2), D (–2, 5), E (4, 13), F (3, –4), G (8, 8), H (0, 7), I (3, 5)
Encuentre la distancia (aproxime el valor hasta las centésimas utilizando el redondeo).
a_1) AB a_2) CA a_3) DE a_4) FG a_5) HI

b) Dado el siguiente diagrama encuentre la distancia
b_1) RS b_2) ST b_3) RT

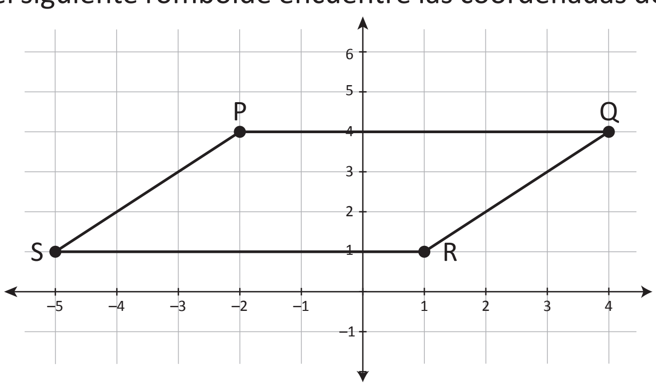


Utilice la fórmula para encontrar la distancia.

Ejercicios de la lección

1) Grafique los siguientes puntos en el plano cartesiano
A (5, 7) B (3, –7) C (–5, –3) D (–5, 7) E (–5, –7) F (0, 3)
G (1, 0) H (0, 0) I ($\frac{2}{3}$, 1) J (–$\frac{1}{4}$, 3) K (5.2, –1.3)

2) Dado el siguiente romboide encuentre las coordenadas de los vértices.



3) Encuentre las dimensiones de los lados del romboide en 2)

4) Encuentre la distancia entre los siguientes pares de puntos (aproxime el valor hasta las centésimas utilizando el redondeo).
a) (–2, 5) y (4, 13) b) (3, –4) y (0,1)
c) (3, 0) y (–5, 0) d) (0, 0) y (–3, –5)
e) ($\frac{1}{2}$, 2) y (–$\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$) f) (0.3, –1.5) y (2.5, –4)

Matemáticas I

Unidad II

Introducción a la trigonometría

- Lección 1: Funciones trigonométricas de ángulo agudo
- Lección 2: Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Algo de historia

Hiparco de Nicea
(c. 190 a.c. – c. 120 a.c.)

Por su utilidad la trigonometría ha sido estudiada desde hace mucho tiempo. Entre los primeros autores de la tabla de trigonometría podría estar Hiparco de Nicea aunque hay sabios que dudan su contribución. Su tabla no existe actualmente.

Hiparco de Nicea fue un astrónomo, geógrafo y matemático griego. Entre sus aportaciones cabe destacar: el primer catálogo de estrellas; la división del día en 24 horas de igual duración (hasta la invención del reloj mecánico en el siglo XIV, las divisiones del día variaban con las estaciones); el descubrimiento de la precesión de los equinoccios; la distinción entre año sidéreo y año trópico, mayor precisión en la medida de la distancia entre la tierra y la luna y de la oblicuidad de la eclíptica, invención de la trigonometría y de los conceptos de longitud y latitud geográficas.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Hiparco_de_Nicea#Invenci.C3.B3n_de_la_trigonometr.C3.ADa

Lección 1. Funciones trigonométricas del ángulo agudo

Clase 1. Semejanza de los triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando uno de los dos ángulos agudos son iguales.

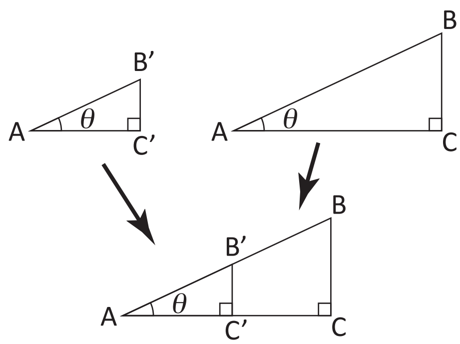


Fig. 1.1

En la Fig. 1.1, ΔABC ~ ΔAB’C’, por lo tanto la razón de dos lados tiene el mismo valor en ambos triángulos. Como cada triángulo tiene tres lados, existen seis razones:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'},\quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'},\quad \frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'},\quad \frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'},\quad \frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$$

Estos valores se determinan por el valor de θ y no dependen del tamaño del triángulo, por lo tanto se pueden considerar como funciones de θ. Son estas funciones los que se estudiarán en esta unidad.

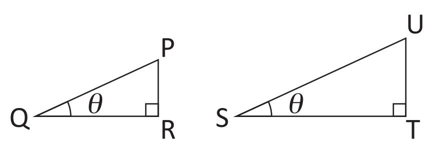
[A] Véase Unidad 1 - Clase 1

La letra griega θ se lee “theta”, y aquí representa la medida del ángulo.

¿Por qué seis?
3 x 2 x 1 = 6

AC representa la longitud del segmento $\overline{AC}$.

Ejercicio 1.1. En los dos triángulos rectángulos, los ángulos son iguales. ¿Cuál es la razón de los lados del ΔSTU que es igual a la razón dada de dos lados del ΔQRP?



a) $\frac{QR}{PQ}$ b) $\frac{PR}{QR}$ c) $\frac{PR}{PQ}$

Para facilitar la indicación de estos valores, es conveniente denominar los lados con respecto al ángulo agudo indicado.

[B]

Ejemplo 1.1. La razón $\frac{BC}{AC}$ de la Fig. 1.2 se representa como $\dfrac{\text{lado opuesto a }\theta}{\text{lado adyacente a }\theta}$, en forma breve $\frac{BC}{AC}=\frac{op}{ady}$.

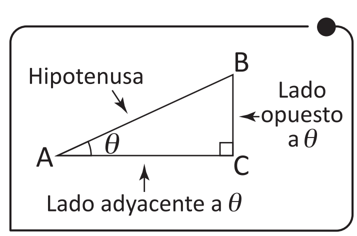
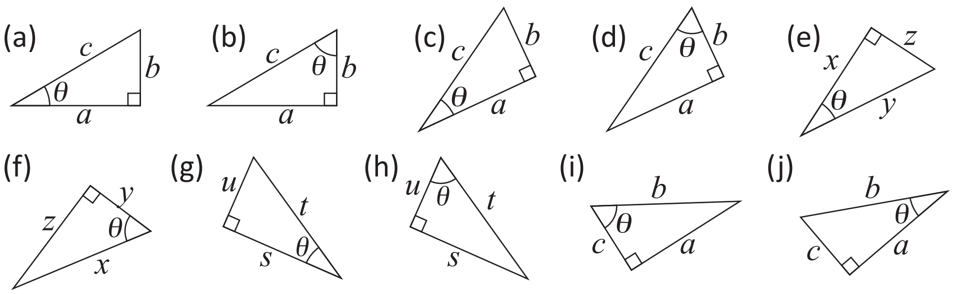


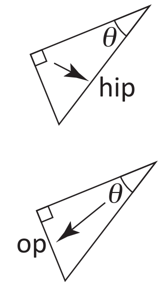
Fig. 1.2

Ejercicio 1.2. Exprese las siguientes razones en la Fig.1.1 en la forma breve como en el Ejemplo 1.1.

a) $\frac{BC}{AB}$ b) $\frac{AC}{AB}$ c) $\frac{AC}{BC}$ d) $\frac{AB}{BC}$ e) $\frac{AB}{AC}$

Ejercicio 1.3. En los siguientes triángulos rectángulos, indique la hipotenusa, el lado opuesto a θ y el lado adyacente a θ.





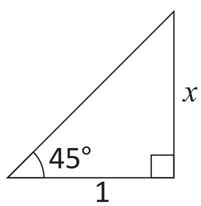
Clase 2. Triángulos rectángulos especiales

Hay dos triángulos rectángulos especiales cuya longitud de los lados se sabe fácilmente.

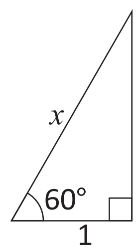
¿Cuál es la medida del ángulo restante?

Ejemplo 1.2. Encuentre el valor de x.

a)

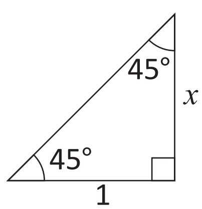


b)



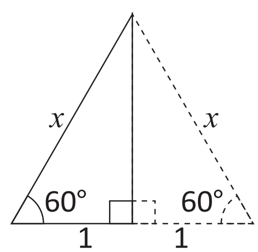
Solución:

a)



$x = 1$
(Triángulo rectángulo isósceles)

b)



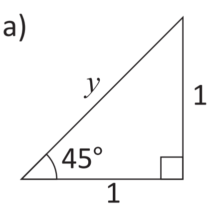
$x = 2$
(Forman un triángulo equilátero)

En un triángulo si un par de ángulos son iguales dos de sus lados también lo son.

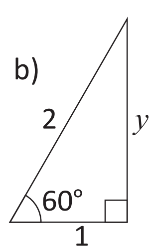
Reflejando el triángulo se obtiene un triángulo equilátero de base 2.

Ejemplo 1.3. Encuentre el valor de y.

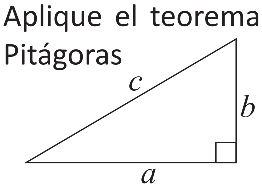
a)



b)



Aplique el teorema de Pitágoras



$a^2 + b^2 = c^2$

Solución: Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que

a) $y^2 = 1^2 + 1^2$, como $y > 0$, $y = \sqrt{2}$

b) $2^2 = 1^2 + y^2$, $y^2 = 4 - 1 = 3$, como $y > 0$, $y = \sqrt{3}$

En resumen

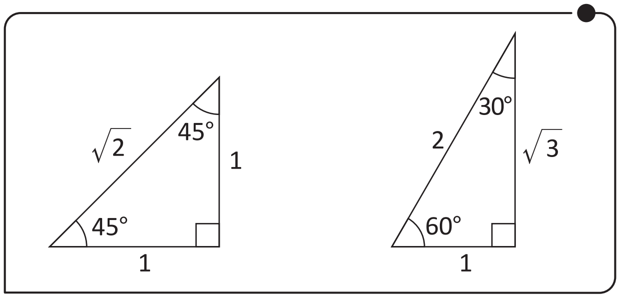
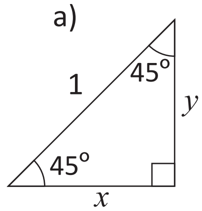


Fig. 1.3

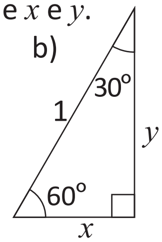
Estos valores se utilizarán frecuentemente.

Ejemplo 1.4. Encuentre los valores de x e y.

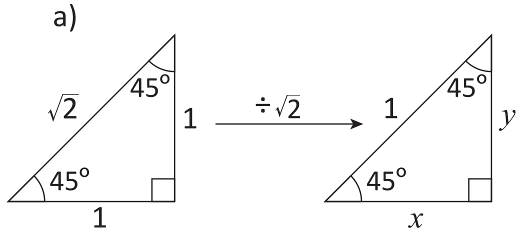
a)



b)



Solución: a)

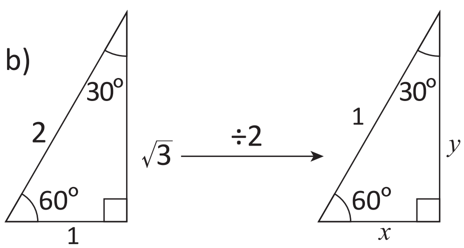


$x = 1 \div \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y = 1 \div \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

No es necesario racionalizar el denominador si no está indicado.

b)



$x = 1 \div 2 = \dfrac{1}{2}$

$y = \sqrt{3} \div 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

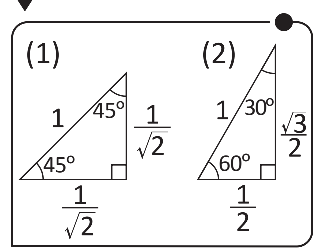
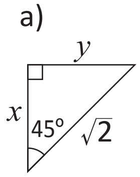


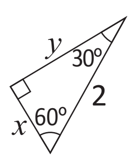
Fig. 1.4

Ejercicio 1.4. Encuentre los valores de x e y.

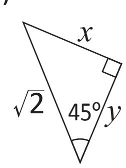
a)



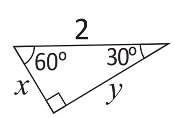
b)



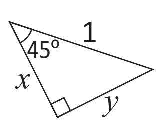
c)



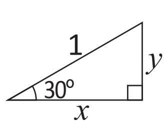
d)



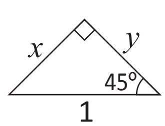
e)



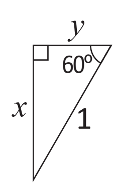
f)



g)



h)



Clase 3. Tangente 1

[A] Definición de la tangente

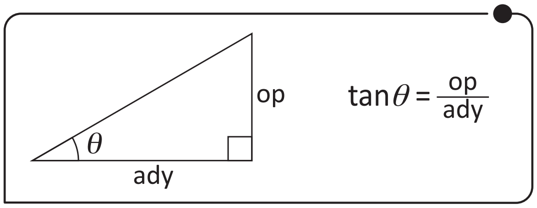
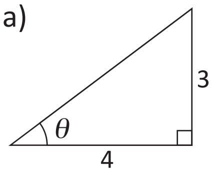


Fig. 1.5

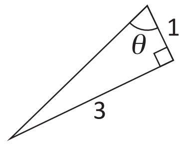
El valor $\dfrac{op}{ady}$ depende sólo de θ y no del tamaño del triángulo. (Clase 1).

Ejemplo 1.5. Encuentre el valor de tanθ.

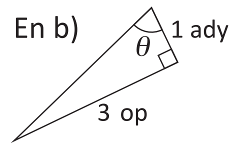
a)



b)



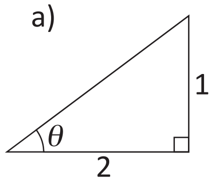
En b)



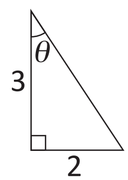
Solución: a) $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ b) $\tan\theta = \dfrac{3}{1} = 3$

Ejercicio 1.5. Encuentre el valor de tanθ.

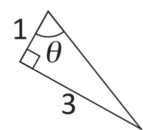
a)



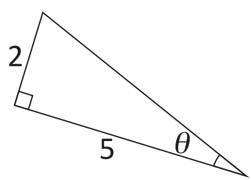
b)



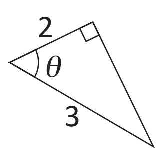
c)



d)



e)



En e) utilice el teorema de Pitágoras

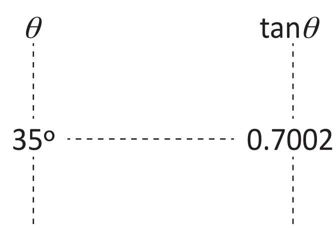
[B] Tabla de funciones trigonométricas

Los valores de tanθ están calculados para diferentes medidas de ángulos en la tabla de Funciones Trigonométricas. La tabla se encuentra en la pág. 74 al final de la unidad.

Por ejemplo

$\tan 35° \approx 0.7002$

Esto es un valor aproximado.



La manera del cálculo del valor de tanθ pertenece al estudio de una rama de la matemática llamada "cálculo".
No hay que memorizar esta tabla.

El signo ≈ significa casi igual.

Ejercicio 1.6. Busque los siguientes valores en la tabla.

a) tan10° b) tan40° c) tan70° d) tan85°

[C] Encontrar la medida del ángulo

$36° < \theta < 37°$ y θ está más cerca de 37°.

Ejemplo 1.6. En el Ejemplo 1.5 a), encuentre la medida de θ utilizando la tabla.

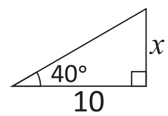
Solución: $\tan\theta = \frac{3}{4} = 0.75$

En la tabla aparece tan36° ≈ 0.7265 y tan37° ≈ 0.7536.
Por lo tanto $\theta \approx 37°$

Ejercicio 1.7. Encuentre el valor aproximado de θ de a) a d) del Ejercicio 1.5. Utilice la tabla.

Clase 4. Tangente 2

Ejemplo 1.7. Encuentre el valor de x. Utilice la tabla o calculadora científica.



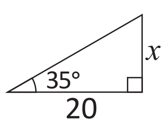
Solución: $\frac{x}{10} = \tan 40°$

$x = 10 \tan 40°$ Despejando x
$\approx 10 \times 0.8391$ Consultando la tabla
$= 8.391$ Respuesta

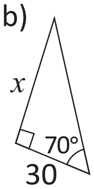
Es recomendable poner el número 10 antes de tan40°, para no confundir 10xtan40° con tan(40°x10) = tan400°.

Ejercicio 1.8. Encuentre el valor de x (Utilice la tabla).

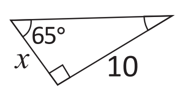
a)



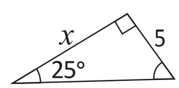
b)



*c)



*d)



Ejemplo 1.8. La Fig.1.6 muestra que una persona mira a la copa de un árbol. Si $\theta = 25°$, encuentre la altura del árbol (hasta las décimas) en metros.

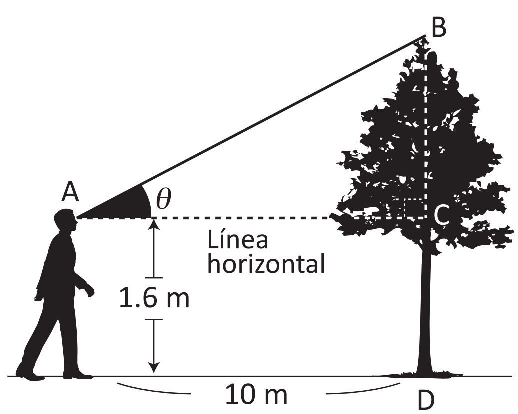


Fig. 1.6

Al ángulo θ se le llama **ángulo de elevación.**

Solución: En el ΔABC

$$\frac{BC}{10} = \tan 25°$$

$BC = 10\tan 25°$ Despejando BC

La altura del árbol $= BC + CD$

$= 10\tan 25° + 1.6$

$\approx 10 \times 0.4663 + 1.6$ sustituyendo $\tan 25° \approx 0.4663$

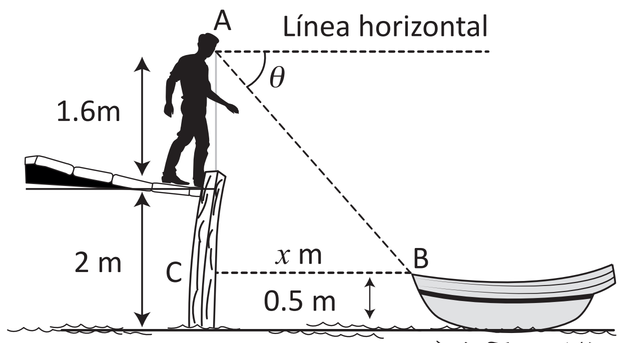
$= 4.663 + 1.6$

$= 6.263$

≈ 6.3 Respuesta 6.3 m

Ejercicio 1.9. Si en la Fig.1.6; $\theta = 32°$, ¿cuál es la altura del árbol?

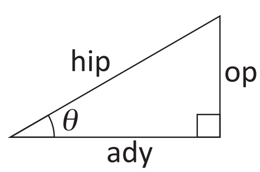
Ejercicio 1.10. En la figura una persona mira la proa de un barco. Si $\theta = 20°$, encuentre la distancia entre la proa y el muelle (hasta las décimas).



Al ángulo θ se le llama **ángulo de depresión**.

Clase 5. Seno y coseno

Definición de seno y coseno



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} \qquad \cos\theta = \frac{ady}{hip}$$

Fig. 1.7

[A]

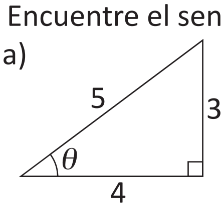
seno, coseno y tangente son las razones trigonométricas más importantes.

sen y cos son abreviación de seno y coseno.

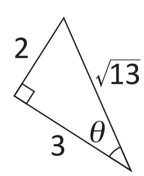
Primero identifique la hipotenusa, el lado opuesto a θ y el lado adyacente a θ.

Ejemplo 1.9. Encuentre el seno y el coseno de θ.

a)



b)

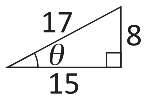


Solución: a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

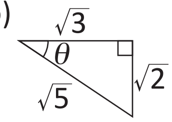
$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Ejercicio 1.11. Encuentre seno y coseno de θ.

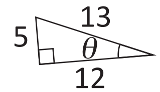
a)



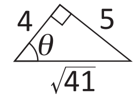
b)



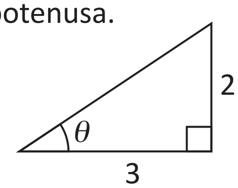
c)



d)



***Ejemplo 1.10.** a) Encuentre la medida de la hipotenusa.
b) Encuentre los valores de senθ, cosθ, tanθ.



Solución: Sea x la medida de la hipotenusa.

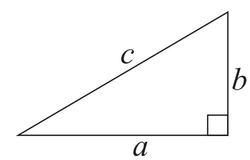
$x^2 = 3^2 + 2^2$ Teorema de Pitágoras

$x^2 = 13$ $x > 0$

$x = \sqrt{13}$

b) sen$\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, cos$\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, tan$\theta = \dfrac{2}{3}$

Teorema de Pitágoras

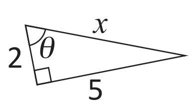


$c^2 = a^2 + b^2$

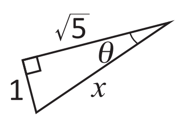
Véase Unidad I

***Ejercicio 1.12.** Encuentre el valor de x, senθ, cosθ y tanθ.

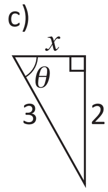
a)



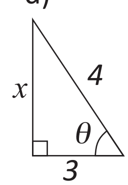
b)



c)



d)



Encontrar la medida del ángulo θ

[B]

Ejemplo 1.11. Encuentre el valor de θ en el Ejemplo 1.9 a).
Utilice la tabla.

Solución 1: sen$\theta = \dfrac{3}{5} = 0.6$

sen36° ≈ 0.5878 y sen37° ≈ 0.6018 Tabla

$\theta \approx 37°$ Respuesta

Solución 2: cos$\theta = \dfrac{4}{5} = 0.8$

cos36° ≈ 0.8090 y cos37° ≈ 0.7986 Tabla

$\theta \approx 37°$ Respuesta

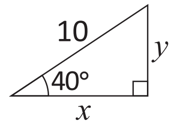
0.6 queda más cerca de 0.6018 que de 0.5878.
También se puede utilizar tanθ.
(Véase Ejemplo 1.6)

Ejercicio 1.13. Encuentre el valor de θ en el Ejercicio 1.11 a) y c).

Clase 6. Seno y coseno 2

Encontrar la medida del lado

Ejemplo 1.12. Encuentre los valores de x e y hasta las décimas. Utilice la tabla de la pág. 74.



Solución: $\frac{x}{10} = \cos 40°$

$x = 10\cos 40°$	Despejando x
$\approx 10 \times 0.7660$	Sustituyendo $\cos 40° \approx 0.7660$
$= 7.660$	
≈ 7.7	Respuesta (Redondeada hasta las décimas)

$\frac{y}{10} = \text{sen}40°$

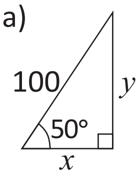
$y = 10\text{sen}40°$	Despejando y
$\approx 10 \times 0.6428$	Sustituyendo $\text{sen}40° \approx 0.6428$
$= 6.428$	
≈ 6.4	Respuesta (Redondeada hasta las décimas)

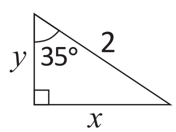
[A]

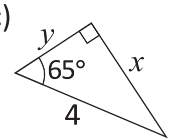
En lugar de la tabla al final del texto, se puede utilizar la calculadora científica.

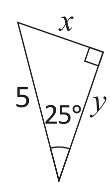
El proceso es similar al caso de la tangente (Ejemplo 1.7)

Ejercicio 1.14. Encuentre los valores de x e y hasta las décimas. Utilice la tabla de la pág. 74.

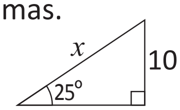
a)


b)


c)


d)


***Ejemplo 1.13.** Encuentre el valor de x hasta las décimas. Utilice la tabla.



Solución: $\text{sen}25° = \frac{10}{x}$

$x = \frac{10}{\text{sen}25°}$ Despejando x

$\approx \frac{10}{0.4226}$ Sustituyendo $\text{sen}25° \approx 0.4226$

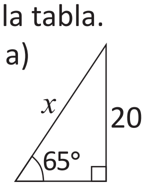
≈ 23.66

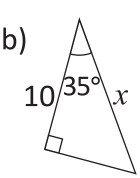
≈ 23.7 Respuesta (Redondeada hasta las décimas)

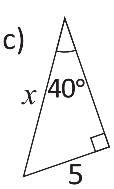
Si $a = \frac{b}{x}$, entonces

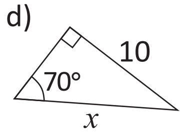
$x = \frac{b}{a}$

***Ejercicio 1.15.** Encuentre el valor de x hasta las décimas. Utilice la tabla.

a)


b)


c)


d)


[B] Ángulos especiales

Utilizando la Fig. 1.3 se tienen los valores especiales de las razones trigonométricas en los ángulos especiales.

De ahora en adelante cuando se tratan seno, coseno y tangente en estos ángulos, se utilizan estos valores exactos en vez de valores aproximados de la tabla al final del texto.

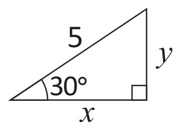
	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Tab. 1.1

Lo que hay que memorizar es la Fig.1.3 de la clase 2, de la cual se deduce la Tab.1.1.

El uso de los valores de la tabla 1.1 es una ¡convención importante en este texto!

Ejemplo 1.14. Encuentre los valores exactos de x e y.

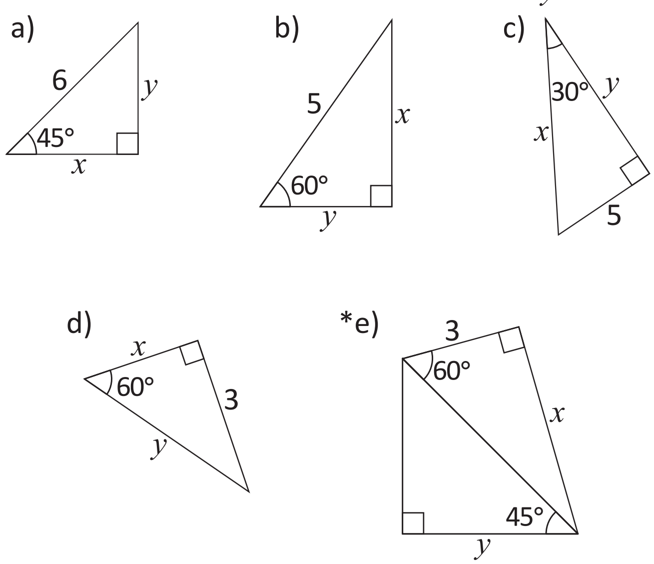


Solución:

$$\frac{x}{5} = \cos 30^{\circ}$$
$$x = 5\cos 30^{\circ} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Respuesta)}$$

$$\frac{y}{5} = \operatorname{sen} 30^{\circ}$$
$$y = 5\operatorname{sen} 30^{\circ} = 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \quad \text{(Respuesta)}$$

Ejercicio 1.16. Encuentre los valores exactos de x e y.



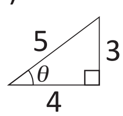
Clase 7. Secante, cosecante y cotangente

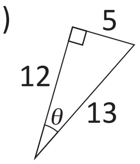
Se define el valor de tres razones más como lo siguiente.

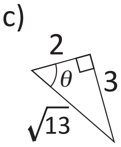
secante	$\sec\theta$	$= \dfrac{1}{\cos\theta}$	$\left(= \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}\right)$
cosecante	$\csc\theta$	$= \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\left(= \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}\right)$
cotangente	$\cot\theta$	$= \dfrac{1}{\tan\theta}$	$\left(= \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}\right)$

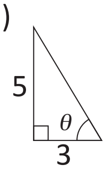
En este texto no se utilizan mucho estas funciones. Sólo memorice la definición.

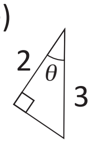
Ejercicio 1.17. Encuentre los valores de $\sec\theta$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$.

a)


b)


c)


*d)


*e)


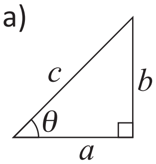
Ejercicio 1.18. Complete la siguiente tabla.

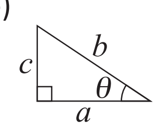
θ	30°	45°	60°
$\sec\theta$			
$\csc\theta$			
$\cot\theta$			

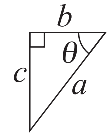
Ejercicios de la lección

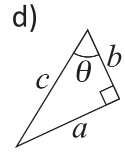
1. Indique la hipotenusa, el lado opuesto a θ y el adyacente a θ.

Véase Clase 1 [B]

a)


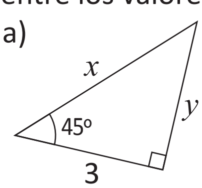
b)


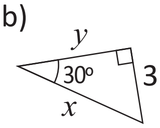
c)


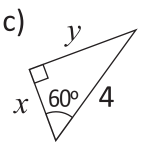
d)


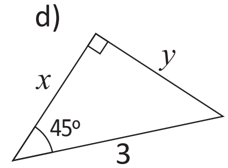
2. Encuentre los valores de x e y.

Véase Clase 2

a)


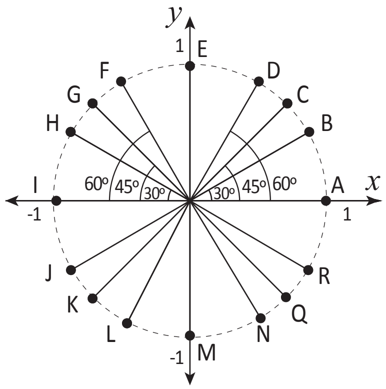
b)


c)


d)


3. Encuentren las coordenadas de los puntos A a R y llene la tabla.

Véase Clase 2



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Coord. x									
Coord. y									

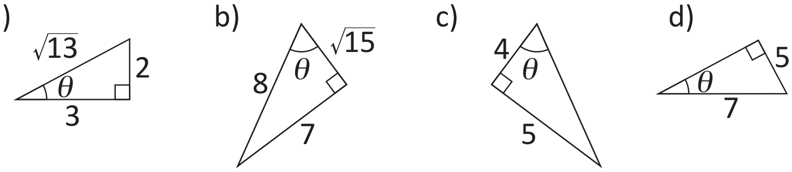
	J	K	L	M	N	Q	R
Coord. x							
Coord. y							

Trace perpendiculares desde los puntos B, C, ... hacia el eje x para formar triángulos rectángulos.

4. Encuentre los valores de senθ, cosθ y tanθ.

Véase Clase 3 Fig.1.5
Clase 5 Fig.1.7

a) b) c) d)



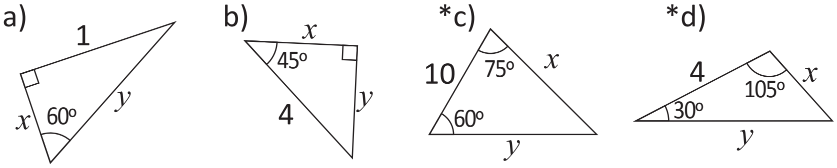
5. Encuentre el valor de θ en el ejercicio 4. Utilice la tabla de la pág. 74.

Véase Clase 3 Ejemplo 1.6
Clase 5 Ejemplo 1.11

6. Encuentre los valores de x e y sin utilizar la tabla.

Véase Clase 2 Fig.1.3
Clase 6 Ejemplo 1.14

a) b) *c) *d)



7. En el Ejercicio 4, encuentre los valores de secθ, cscθ y cotθ.

Véase Clase 7

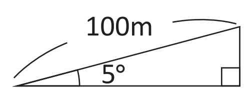
8. Un carro corrió 100 m en una cuesta que forma el ángulo de 5° con el plano horizontal. Encuentre los siguientes valores hasta las décimas.

   a) La distancia en metros que corrió hacia la dirección horizontal.

   b) La subida vertical en metros.

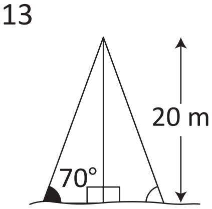
   Utilice la tabla.

Véase Clase 6 Ejemplo 1.12



9. Un poste de 20 m está sostenido por alambres. Si cada alambre forma un ángulo de 70° con la tierra horizontal, ¿cuántos metros mide cada alambre? Encuentre el valor hasta las décimas. Utilice la tabla.

Véase Clase 6 Ejemplo 1.13



Lección 2. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Clase 1. Ángulos de sentido amplio

Sea OX y OP dos rayos con el mismo origen O. Rayo OX está fijo y se llama **lado inicial**, mientras que rayo OP gira alrededor del punto O y se llama **lado terminal**. Se define la dirección positiva en sentido antihorario. De esta manera a cualquier ángulo $a°$ (a es un número real) corresponde un único lado terminal OP.

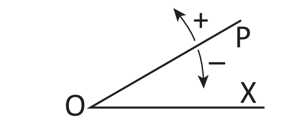
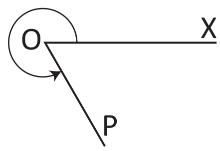
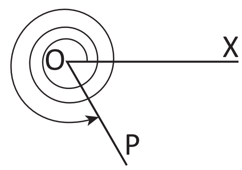


Fig. 2.1

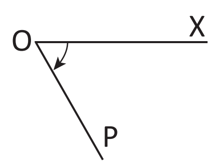
El término "antihorario" quiere decir sentido contra el giro de las manecillas del reloj.

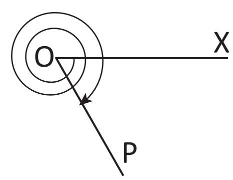
Ejemplo 2.1. a) 300° b) 1020° = 360° x 2 + 300°
dos giros y 300°





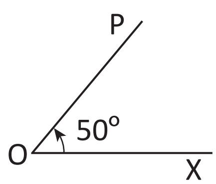
c) –60° d) –780° = 360° x (–2) + (–60°)

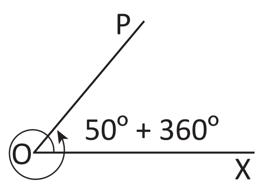


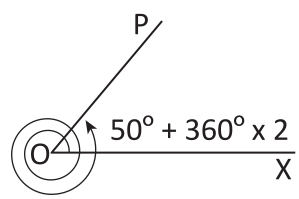


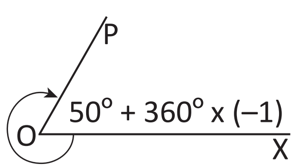
Ejercicio 2.1. Dibuje los ángulos siguientes como en el Ejemplo 2.1.
a) 500° b) –150° c) 1000° d) –1200°

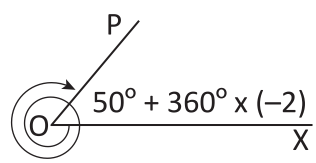
Ejemplo 2.2. Encuentre los ángulos que corresponden al lado terminal OP.











Como se ve en el Ejemplo 2.1, al mismo lado terminal corresponden muchos ángulos. ¿Cuáles son?

Al lado terminal OP corresponden los ángulos 50° + 360°n (donde n es un número entero).

360°n = 360° x n

En general al lado terminal OP corresponden los ángulos

$$\theta + 360°n \text{ (donde } n \text{ es un número entero).}$$

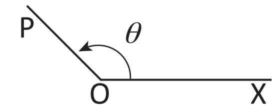
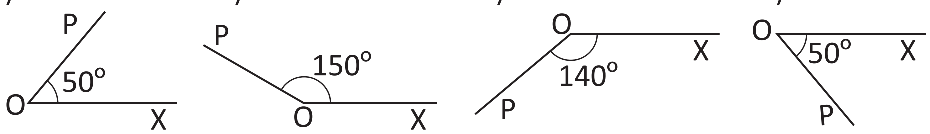


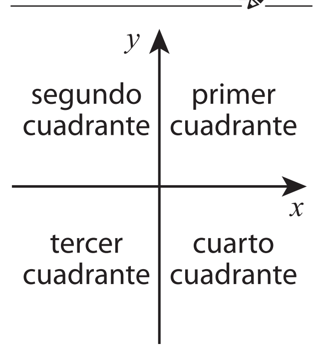
Fig. 2.2

Ejercicio 2.2. Encuentre los ángulos que corresponden al lado terminal OP.

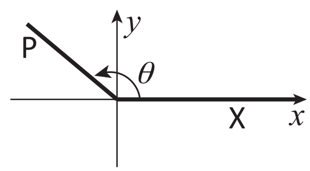
a) b) c) d)



Cuando se toma la parte no negativa del eje x como el lado inicial, dependiendo en qué cuadrante está el lado terminal, se dice que el ángulo es de dicho cuadrante.



Ejemplo 2.3. θ es un ángulo del segundo cuadrante.



Ejemplo 2.4. Como 1000° = 360° x 2 + 280° = 360° x 2 + (90° x 3 + 10°) el ángulo 1000º es del cuarto cuadrante.

El lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

Ejercicio 2.3. Encuentre el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos.

a) 1500° b) 2000° c) –1000° d) –1500°

Clase 2. Definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

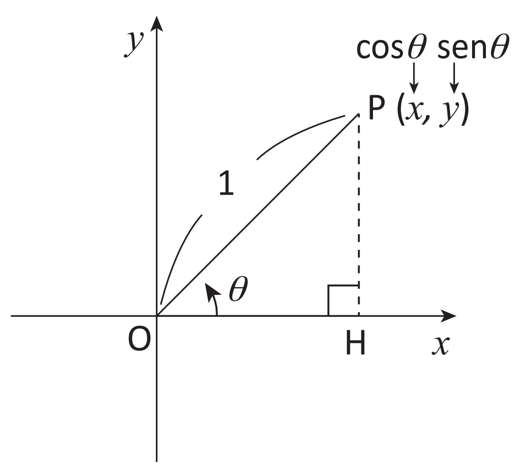
Cuando θ es un ángulo agudo,
OH = la coordenada x del Punto P
PH = la coordenada y del punto P
En el triángulo rectángulo ΔOPH, OP = 1,

por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{OH}{OP} = OH$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PH}{OP} = PH,$$

$$\tan\theta = \frac{PH}{OH}$$



es decir $\cos\theta$ = la coordenada x del punto P

$\operatorname{sen}\theta$ = la coordenada y del punto P

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

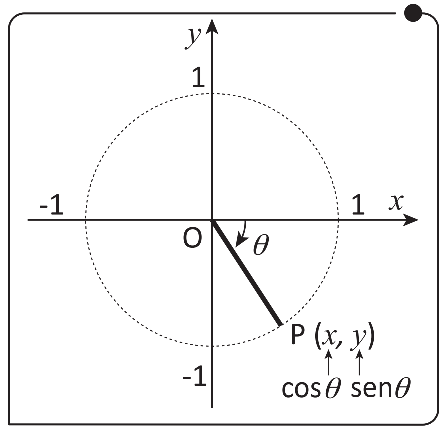


Fig. 2.3

Utilizando esta relación entre $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ y las coordenadas del punto P, se definen los valores de estas funciones para cualquier ángulo como lo siguiente.

En la Fig. 2.3 el punto P está en la circunferencia de radio 1 con el centro en el origen y se toma la parte positivo del eje x como el lado inicial y el rayo OP como el lado terminal.

Ahora se definen

$\operatorname{sen}\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

($\tan\theta$ se define sólo cuando $x \neq 0$)

Las otras funciones se definen así:

$\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ (sólo cuando $x \neq 0$),

$\csc\theta = \dfrac{1}{y}$ (sólo cuando $y \neq 0$)

$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ (sólo cuando $y \neq 0$)

De esta definición se sabe que los valores de las funciones trigonométricas dependen de la posición del rayo OP. Si el lado terminal del ángulo θ corresponde al rayo OP, todos los ángulos que corresponden al mismo son $\theta + 360°n$ (n: número entero). Por lo tanto se tiene lo siguiente:

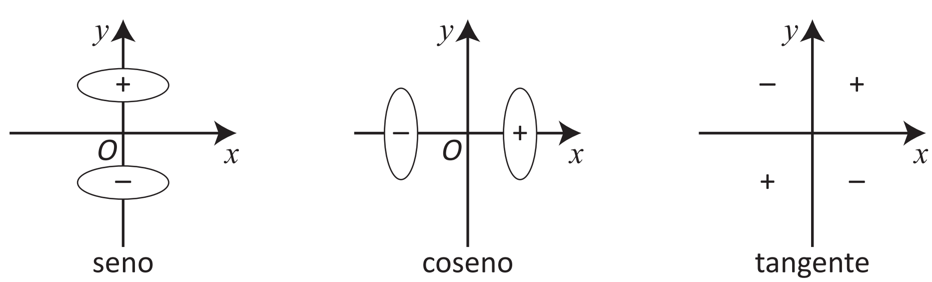
$\operatorname{sen}(\theta + 360°n) = \operatorname{sen}\theta$, $\cos(\theta + 360°n) = \cos\theta$, $\tan(\theta + 360°n) = \tan\theta$ (n: número entero)

Por la definición se sabe lo siguiente:

a) $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

b) rango de seno y coseno $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

c) signo de seno, coseno y tangente

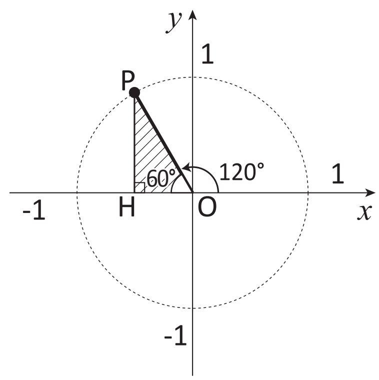


Ejemplo 2.5. Encuentre los valores de sen120°, cos120°, tan120° sin utilizar la tabla.

Solución: Se trata de las coordenadas del punto P.
Sea H el pie de la perpendicular al eje x que pasa por el punto P.
$\angle$POH = 180° – 120° = 60°, por lo tanto colocando el triángulo (2) de la Fig.1.4 se sabe que
HO = $\frac{1}{2}$ y PH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
La coordenada x del punto P es negativa y la de y es positiva.
Por lo tanto $x = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Por la definición

$$\text{sen}120° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 120° = -\frac{1}{2},$$

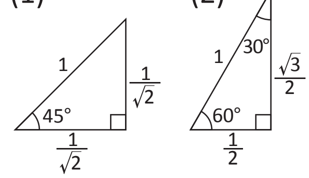
$$\tan 120° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{2}{1}\right) = -\sqrt{3}$$



Siempre se traza la perpendicular al eje x.

Triángulos especiales (Lec.1. Clase 2)

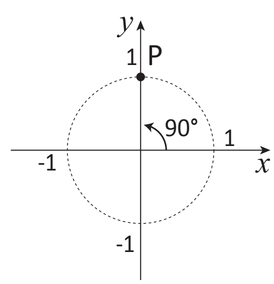
(1) (2)



Al ángulo POH, se le llama **ángulo de referencia**.

Ejemplo 2.6. Encuentre los valores de sen90°, cos90°, tan90°.

Solución: Las coordenadas del punto P son (0, 1).
Por la definición, sen90° = 1, cos90° = 0, tan90° no está definida, porque el denominador (la coordenada x de P) es 0.



En este caso no se puede formar un triángulo rectángulo.

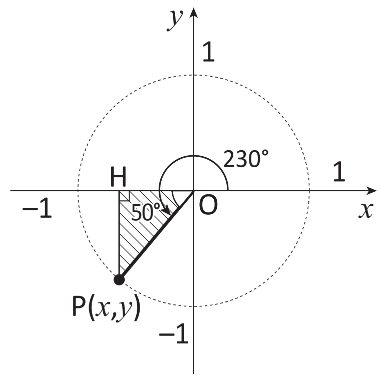
Ejercicio 2.4. Llene la tabla.
Véase Ejercicio 3 de la Lección I. No es necesario racionalizar el denominador.

		1er. cuadrante				2do. cuadrante				3er. cuadrante				4to. cuadrante		
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen																	
cos																	
tan																	

Clase 3. Los valores de las funciones trigonométricas

Ejemplo 2.7. Encuentre los valores de sen230°, cos230°, tan230°, utilizando la tabla de la pág. 74.

Solución: En este caso el ángulo de referencia es 230° – 180° = 50°.
De la tabla sen50° ≈ 0.7660 y cos50° ≈ 0.6428. Las coordenadas x e y son negativas en el tercer cuadrante.
Por lo tanto $x \approx -0.6428$ e $y \approx -0.7660$.
Así que sen230° ≈ – 0.7660, cos230° ≈ – 0.6428 y



$$\tan 230° = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x} = \tan 50° \approx 1.1918$$

Ejercicio 2.5. Encuentre los valores de seno, coseno y tangente en los ángulos siguientes. Utilice la tabla.

a) 100° b) 220° c) 310° d) – 130° e) 1000°

Ejemplo 2.8. Sea 0° ≤ θ < 360°. Cuando sen$\theta = -\frac{1}{2}$, encuentre el valor de θ.

Solución: Como el valor de seno corresponde a la coordenada y, se busca en la circunferencia los puntos cuya coordenada y sea $-\frac{1}{2}$, que son los puntos P y Q.
Como OP = OQ = 1 y PH = QI = $\frac{1}{2}$,
ΔOPH y ΔOQI son congruentes a (2) de la Fig. 1.4 (P. 48), así que
θ = 180° + 30° = 210°,
θ = 360° – 30° = 330°

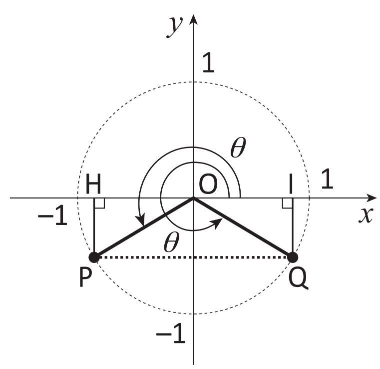


Fig. 2.4

Respuesta: θ = 210°, θ = 330°

Ejercicio 2.6. Sea 0° ≤ θ < 360°. Encuentre el valor de θ, cuando una de las funciones trigonométricas tiene el valor siguiente.

a) sen$\theta = \frac{1}{2}$ b) sen$\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) cos$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) cos$\theta = -\frac{1}{2}$

e) senθ = 1 f) senθ = 0 g) cosθ = –1 h) cosθ = 0

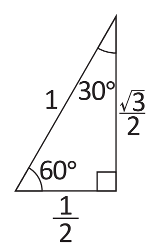
[A]

Cuando el ángulo de referencia no es especial, utilice la tabla.

Utilizando la columna de tanθ, se puede evitar el cálculo de división.

Encuentre el ángulo de referencia, y los signos de las coordenadas del punto P.

[B]



Del signo del valor, buscar el cuadrante donde está el ángulo.
Aquí no utilice la tabla del Ejercicio 2.4.

Ejercicio 2.7. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Encuentre el valor de θ, cuando uno de las funciones trigonométricas tiene el valor siguiente. Utilice la tabla.

a) $\text{sen}\theta = 0.3420$ b) $\text{sen}\theta = -0.9063$ c) $\cos\theta = 0.9397$ d) $\cos\theta = -0.5299$

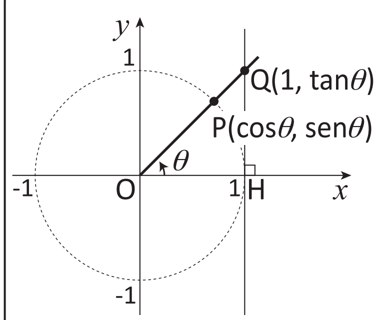
Clase 4. Valor de la tangente

Sea $y = mx$ la ecuación de la recta OP. Sustituyendo las coordenadas del punto P que son ($\cos\theta$, $\text{sen}\theta$), se tiene que $\text{sen}\theta = m\cos\theta$. Si $\cos\theta \neq 0$, se tiene que

$m = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.

Es decir, la ecuación de la recta OP es $y = (\tan\theta)x$ ... (1)

El punto Q está en la recta OP y su coordenada x es 1, por lo tanto su coordenada y es $\tan\theta$, sustituyendo $x = 1$ en (1).



La pendiente de la recta OP es $\tan\theta$.

Fig. 2.4

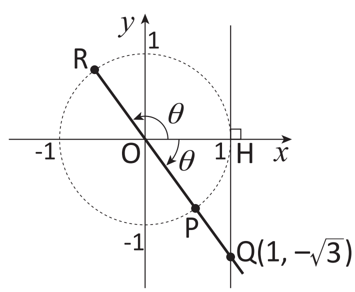
La Fig. 2.4 es muy importante.

En resumen las coordenadas del punto Q son (1, $\tan\theta$).

Ejemplo 2.9. Sea $-180° \leq \theta < 180°$. Cuando $\tan\theta = -\sqrt{3}$, encuentre el valor de θ.

Solución: El triángulo ΔOQH es congruente al (2) de Fig. 1.4, por lo tanto
$\theta = -60°$ y
$\theta = -60° + 180° = 120°$

Respuesta: $\theta = -60°$ o $120°$



Para dibujar esta gráfica, primero se toma el punto Q cuyo coordenada es (1, $\tan\theta$).
$\theta = -60°$ corresponde a P, $\theta = 120°$ a R.

Ejercicio 2.8. Sea $-180° \leq \theta < 180°$. Cuando $\tan\theta$ tiene el valor siguiente, encuentre el valor de θ. No utilice la tabla al final de la unidad.

a) $\tan\theta = \sqrt{3}$ b) $\tan\theta = 1$, c) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\tan\theta = -1$ e) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\tan\theta = 0$

Cuando no se utiliza la tabla, siempre hay que tratar de encontrar los triángulos de la Fig.1.3.

Ejercicio 2.9. Sea $-180° \leq \theta < 180°$. Cuando $\tan\theta$ tiene el valor siguiente, encuentre el valor de θ. Utilice la tabla.

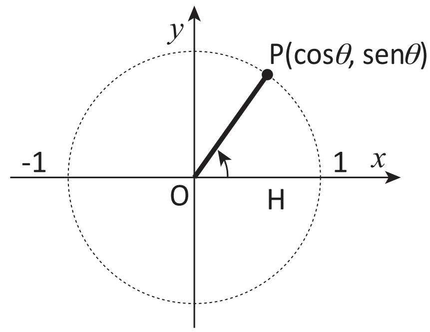
a) $\tan\theta = 0.3640$ b) $\tan\theta = 2.1445$ c) $\tan\theta = -0.7002$ d) $\tan\theta = -5.6713$

Utilice los ángulos de referencia y la distribución del signo de la tangente (Clase 2).

Clase 5. Relación entre seno y coseno

En la figura de la definición de las funciones trigonométricas, aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, se tiene que

$$\text{OP} = \sqrt{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}$$



Elevando a la dos ambos lados,
$\text{OP}^2 = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$
Como OP = 1, se tiene que

$$\boxed{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1}$$

Como el teorema de Pitágoras da la fórmula de la distancia, esta fórmula de arriba se deduce aplicando dicho teorema.

La distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Se escribe $\text{sen}^2\theta$ para $(\text{sen}\theta)^2$ y se aplica de igual forma a $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Es la fórmula más importante en la trigonometría.

Ejemplo 2.10. Dado que $\text{sen}\theta = \frac{2}{3}$, encuentre $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Solución: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$ Sustituyendo $\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ Despejando $\cos^2\theta$

$= 1 - \frac{4}{9}$

$= \frac{5}{9}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$ Sacando la raíz cuadrada

$= \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

Si $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Si $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\theta = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Respuesta: $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ o $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ quiere decir que hay dos casos: $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

La primera pareja corresponde al ángulo del primer cuadrante y la segunda al del segundo.

Ejercicio 2.10. Cuando seno o coseno está dado, encuentre el otro y la tangente.

a) $\text{sen}\theta = \frac{3}{5}$ b) $\text{sen}\theta = -\frac{3}{4}$ c) $\cos\theta = \frac{1}{3}$ d) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

***Ejemplo 2.11.** Dado que el ángulo θ está en el cuarto cuadrante y sen $\theta = -\frac{3}{4}$, encuentre $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

Solución: $\cos^2\theta = 1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ Sustituyendo sen$\theta = -\frac{3}{4}$

$= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Como θ es del cuarto cuadrante, $\cos\theta > 0$, por lo tanto

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \left(-\frac{3}{4}\right) \div \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

Respuesta $\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ y $\tan\theta = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

La condición sobre la posición del ángulo define el signo de funciones trigonométricas (Clase 2).

***Ejercicio 2.11.** Dado el cuadrante del ángulo y uno de senθ o $\cos\theta$, encuentre el otro y $\tan\theta$.

a) primer cuadrante, sen$\theta = \frac{2}{3}$ b) segundo cuadrante, sen$\theta = \frac{2}{5}$

c) tercer cuadrante, $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ d) cuarto cuadrante, $\cos\theta = \frac{3}{4}$

Clase 6. Relación entre coseno y tangente

Entre $\cos\theta$ y $\tan\theta$ existe la siguiente relación:

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{donde } \cos\theta \neq 0}$$

Demostración

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ Relación entre senθ y $\cos\theta$

$\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ Dividiendo ambos lados por $\cos^2\theta$

$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

$$\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \left(\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

Ejemplo 2.12. Cuando $\tan\theta = 2$, encuentre los valores de $\cos\theta$ y senθ.

Solución: $\frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1$

$= 2^2 + 1$ Sustituyendo $\tan\theta = 2$

$= 5$

Se obtiene la primera igualdad cambiando los lados de la fórmula.

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Cuando $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta \cos\theta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Cuando $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta \cos\theta = 2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Respuesta: $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ó $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Si $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \neq 0$

entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

De la relación

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

se obtiene

$\tan\theta \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$

Ejercicio 2.12. Cuando $\tan\theta$ tiene los valores siguientes, encuentre los valores de $\cos\theta$ y sen θ.

a) $\tan\theta = 3$ b) $\tan\theta = -2$ c) $\tan\theta = \frac{2}{3}$ d) $\tan\theta = -\frac{1}{3}$

Ejercicio 2.13. Dado que el ángulo está en el rango indicado y que $\tan\theta$ tiene el valor siguiente, encuentre $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

a) $-90° \leq \theta < 90°$, $\tan\theta = 3$ b) $0° \leq \theta < 180°$, $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

c) $90° \leq \theta < 270°$, $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ d) $180° \leq \theta < 360°$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

La combinación del rango del ángulo y el signo de $\tan\theta$, define el cuadrante al que pertenece el ángulo. (Clase 2).

Ejercicio 2.14. En el Ejemplo 2.12, cuando $\cos\theta > 0$, encuentre los valores de $\sec\theta$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$.

Clase 7. Demostración de igualdades utilizando la relación entre senθ y cosθ

Ejemplo 2.13. Demuestre la siguiente igualdad.

$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 1 = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

Solución: $\{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 1\} - 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta$

$= \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta - 1 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$= (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

Una manera de demostrar la igualdad es mostrar que (el lado izquierdo) – (el lado derecho) = 0

Ejercicio 2.15. Demuestre las siguientes igualdades.

a) $(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta$ b) $\left(\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\right) = 1$

Ejercicio 2.16. Utilizando la igualdad del Ejemplo2.13, encuentre el valor de $\text{sen}\theta\cos\theta$ cuando $\text{sen}\theta + \cos\theta = \frac{2}{3}$

Ejemplo 2.14. Demuestre que

$$\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\theta} = 2\tan\theta$$

Solución:

$$\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\theta} = \frac{\cos\theta(1+\text{sen}\theta)-(1-\text{sen}\theta)\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)(1+\text{sen}\theta)}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc-ad}{ac}$$

$$= \frac{\cos\theta + \cos\theta\text{sen}\theta - \cos\theta + \cos\theta\text{sen}\theta}{1^2 - \text{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\text{sen}\theta}{1-\text{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\text{sen}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2\text{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$$

Ejercicio 2.17. Demuestre las siguientes igualdades.

a) $\dfrac{\text{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{\text{sen}\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{2}{\text{sen}\theta}$ b) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta}$

* Clase 8. Relaciones entre las funciones trigonométricas 1

1) $f(\theta + 360^\circ n) = f(\theta)$ n: números enteros
$f(\theta) = \text{sen}\theta$ o $\cos\theta$ o $\tan\theta$ o $\sec\theta$ o $\csc\theta$ o $\cot\theta$

Se ha visto en la Clase 2

2) $\text{sen}(180^\circ - \theta) = \text{sen}\theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

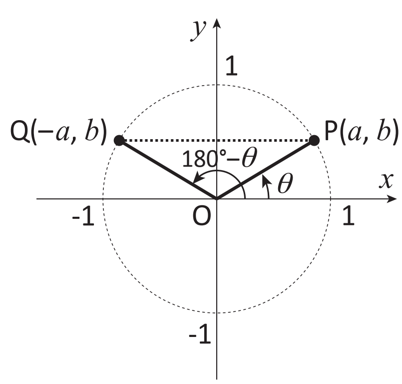
Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a, b) con respecto al eje y, por lo tanto sus coordenadas son ($-a$, b). Por otra parte se tiene que:

$\text{sen}\theta = b$, $\text{sen}(180^\circ - \theta) = b$

$\cos\theta = a$, $\cos(180^\circ - \theta) = -a$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\tan(180^\circ - \theta) = -\dfrac{b}{a}$

de donde viene la fórmula.



Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto al eje y.
No trate de memorizar la fórmula, sino la gráfica.

3) $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta,\ \tan(-\theta) = -\tan\theta$

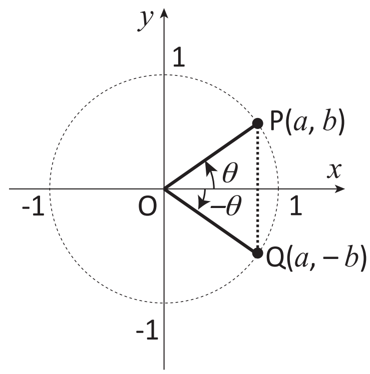
Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a, b) con respecto al eje x, por lo tanto sus coordenadas son (a, $-b$). Por otra parte se tiene que:

$\text{sen}\theta = b, \quad \text{sen}(-\theta) = -b$

$\cos\theta = a, \quad \cos(-\theta) = a$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}, \quad \tan(-\theta) = -\dfrac{b}{a}$

de donde viene la fórmula.



Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto al eje x.

4) $\text{sen}(\theta + 180°) = -\text{sen}\theta,\ \cos(\theta + 180°) = -\cos\theta,\ \tan(\theta + 180°) = \tan\theta$

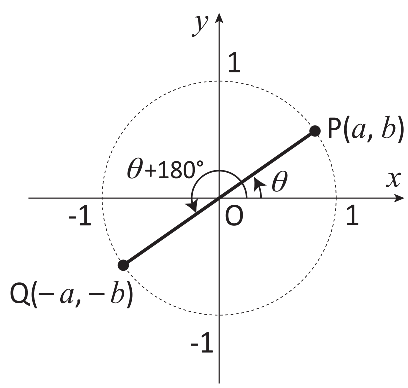
Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a,b) con respecto al origen O, por lo tanto sus coordenadas son ($-a$, $-b$). Por otra parte se tiene que

$\text{sen}\theta = b, \ \text{sen}(\theta + 180°) = -b$

$\cos\theta = a, \ \cos(\theta + 180°) = -a$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}, \ \tan(\theta + 180°) = \dfrac{b}{a}$

de donde viene la fórmula.



Dese cuenta que $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son simétricos con respecto al origen O.

Ejemplo 2.15. Exprese los siguientes valores con $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

a) $\text{sen}(180° - \theta)\,\text{sen}(\theta + 180°)$ b) $\tan(-\theta)\cos(180° - \theta)$

Solución: a) $\text{sen}(180° - \theta)\,\text{sen}(\theta + 180°) = \text{sen}\theta(-\text{sen}\theta) = -\text{sen}^2\theta$

b) $\tan(-\theta)\cos(180° - \theta) = -\tan\theta(-\cos\theta) = \tan\theta\cos\theta = \text{sen}\theta$

$\tan\theta\cos\theta = \text{sen}\theta$

Ejercicio 2.18. Exprese los siguientes valores con $\text{sen}\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

a) $\text{sen}(-\theta)\cos(-\theta)$ b) $\tan(180° - \theta)\cos(\theta + 180°)$

Ejemplo 2.16. Demuestre que $\text{sen}(\theta + 180°) + \text{sen}(180° - \theta) = 0$.

Solución: El lado izquierdo = $(-\text{sen}\theta) + \text{sen}\theta = 0$.

Ejercicio 2.19. Demuestre que

$\text{sen}(-\theta)\text{sen}(180° - \theta) + \cos(\theta + 180°)\cos(-\theta) = -1$.

Utilice

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

* Clase 9. Relaciones entre las funciones trigonométricas 2

5) $\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$, $\cos(90° - \theta) = \text{sen}\theta$, $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

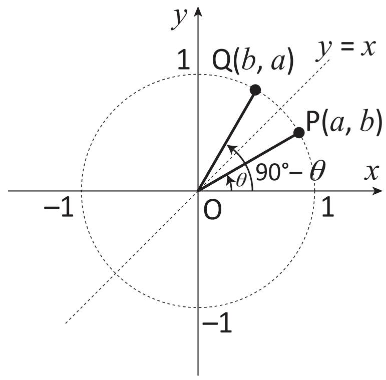
Demostración: El punto Q es el simétrico de P(a, b) con respecto a la recta $y = x$, por lo tanto sus coordenadas son (b, a). Por otra parte se tiene que:

$\text{sen}\theta = b$, $\quad \text{sen}(90° - \theta) = a$

$\cos\theta = a$, $\quad \cos(90° - \theta) = b$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\quad \tan(90° - \theta) = \dfrac{a}{b}$

de donde viene la fórmula.



Dese cuenta que $\overline{\text{OP}}$ y $\overline{\text{OQ}}$ son simétricos con respecto a la recta $y = x$. En este caso si P(a, b), entonces Q(b, a)

6) $\text{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90°) = -\text{sen}\theta$, $\tan(\theta + 90°) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

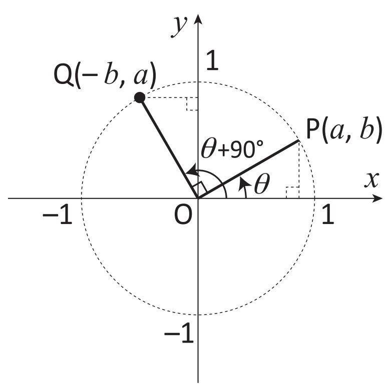
Demostración: De la figura se sabe que si las coordenadas del punto P son (a, b), las de Q son ($-b$, a). Por lo tanto,

$\text{sen}\theta = b$, $\quad \text{sen}(\theta + 90°) = a$

$\cos\theta = a$, $\quad \cos(\theta + 90°) = -b$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\quad \tan(\theta + 90°) = -\dfrac{a}{b}$

de donde viene la fórmula.



En la figura P está en el primer cuadrante. Dibuje y confirme que siempre hay la misma relación dondequiera que esté P.

Ejemplo 2.17. Demuestre que $\text{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$ utilizando la relación $\theta + 90° = 90° - (-\theta)$ y aplicando las fórmulas 5) y 3).

Solución: $\quad \text{sen}(\theta + 90°) = \text{sen}(90° - (-\theta))$

$= \cos(-\theta)$ $\quad$ Aplicando 5)

$= \cos\theta$ $\quad$ Aplicando 3)

Ejercicio 2.20. De la misma manera demuestre las segunda y tercera fórmula de 6).

Ejemplo 2.18. Demuestre la siguiente igualdad.

$$\text{sen}\theta\cos(90° - \theta) + \text{sen}(\theta + 90°)\cos\theta = 1$$

Solución: $\quad$ El lado izquierdo

$= \text{sen}\theta\,\text{sen}\theta + \cos\theta\cos\theta$ $\quad$ De 5) y 6)

$= \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

$= 1$ $\quad$ De la relación entre $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$

Exprese sólo con $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Ejercicio 2.21. Demuestre las siguientes igualdades.

a) $\operatorname{sen}\theta\cos(\theta + 90°) - \cos\theta\operatorname{sen}(90° - \theta) = -1$

b) $\operatorname{sen}(90° - \theta)\operatorname{sen}(\theta + 90°) - \cos(90° - \theta)\cos(\theta + 90°) = 1$

Clase 10. Radián

Hay otra unidad de medida del ángulo que se llama **radián**.

En la Fig. 2.5 el centro de la circunferencia está en el vértice del ángulo y su radio es 1. Entonces la medida del arco PQ es la medida en radián del $\angle$AOB.

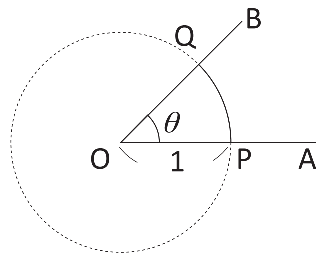


Fig. 2.5

La razón de ser de la unidad de radián consiste en su utilidad en el cálculo infinitesimal que es uno de los temas de Matemática IV. Por lo tanto en este texto sólo se menciona su definición.

Si la medida del arco PQ es igual a la del radio, entonces $m\angle$AOB es igual a un radián.

Como la medida de la circunferencia de radio 1 es 2π, se tiene que $360° = 2\pi$ radianes.
Dividiendo entre 2 ambos lados, se tiene que

$$\boxed{180° = \pi \text{ radianes}}$$

De esta relación se deduce que:

$1° = \frac{\pi}{180}$ radián

1 radián = $\frac{180°}{\pi}$

Por lo general se omite “radianes”, es decir, cuando no aparece la unidad de medida, se considera que se trata de radianes.

Ejemplo 2.19. Exprese en radianes. a) 60° b) – 225°

Solución: Como $1° = \frac{\pi}{180}$ (radián)

a) $60° = 60\,(1°) = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$

b) $-225° = -225\,(1°) = -225\left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{5}{4}\pi$ (radianes)

Ejercicio 2.22. Exprese en radianes.

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

Ejemplo 2.20. Exprese en grados. a) $\frac{7}{6}\pi$ b) –4

Solución: Como 1 radián = $\frac{180°}{\pi}$

$$\text{a) } \frac{7}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi\,(1\,\text{radián}) = \frac{7}{6}\pi\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 210°$$

$$\text{b) } -4 = -4\,(1\,\text{radián}) = -4\left(\frac{180°}{\pi}\right) = -\frac{720°}{\pi}$$

G x $\frac{180°}{\pi}$ para cambiar de radianes a grados.

G x $\frac{\pi}{180}$ para cambiar de grados a radianes donde G representa la medida del ángulo a convertir.

Ejercicio 2.23. Exprese en grados. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{11}{6}\pi$ d) –3

Ejemplo 2.21. Encuentre los siguientes valores.

a) sen $\frac{\pi}{4}$ b) $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ c) tan $\frac{10}{3}\pi$

Primero exprese los ángulos en grados.

Solución:

a) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 45°$ Por lo tanto sen $\frac{\pi}{4}$ = sen45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $-\frac{5}{6}\pi = \frac{180°}{\pi} \times \left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -150°$

Por lo tanto $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ = cos (–150°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{10}{3}\pi = \frac{180°}{\pi} \times \frac{10}{3}\pi$ = 600° = 360° + 240°

Por lo tanto tan $\frac{10}{3}\pi$ = tan600° = tan 240° = $\sqrt{3}$

$\tan(\theta + 360°n) = \tan\theta$ (Clase 2)

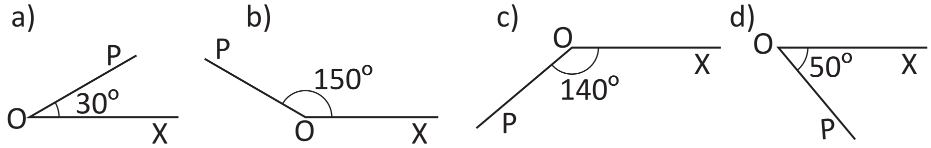
Ejercicio 2.24. Encuentre los siguientes valores.

a) $\text{sen}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ b) cos $\frac{5}{3}\pi$ c) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

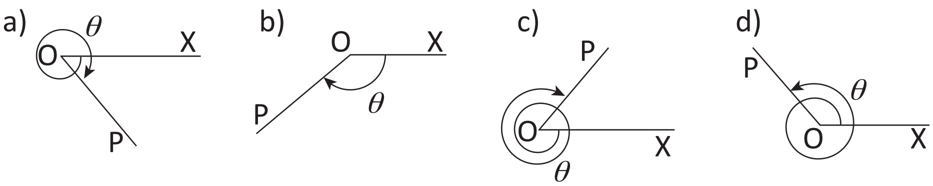
Ejercicios de la lección

1. Dibuje los ángulos indicados. No es necesario utilizar el transportador. Clase 1 Ejemplo 2.1
   a) 250° b) – 250° c) 400° d) – 400° e) 1300° f) – 1300°

2. Encuentren los ángulos que corresponden al lado terminal OP. Ejemplo 2.2



3. ¿A qué cuadrante pertenecen los ángulos siguientes? Ejemplo 2.3



4. ¿A qué cuadrante pertenecen los ángulos siguientes? Ejemplo 2.4
   a) 700° b) 3000° c) – 500° d) – 2000°

5. Encuentre los siguientes valores. Utilice la tabla. Clase 3 Ejemplo 2.7
   a) sen400° b) cos(– 230°) c) tan(– 110°)

6. Dado que $\cos\theta = \frac{3}{4}$, encuentre senθ y tanθ. Clase 5 Ejemplo 2.10

*7. a) Dado que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ y que $90° < \theta < 180°$, encuentre cosθ y tanθ. Clase 5 Ejemplo 2.11

   b) Dado que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{5}$ y θ pertenece al segundo cuadrante, encuentre cosθ y tanθ.

8. Exprese los siguientes valores con las mismas funciones en los ángulos comprendidos entre 0° y 90°. Habrá casos en que se necesita el signo negativo antes de la función. Clase 8 y 9

   a) sen(– 140°) b) cos(– 200°) c) tan(– 290°)

9. a) Exprese en radianes: 1) 510° 2) – 945° Clase 10 Ejemplo 2.19

   b) Exprese en grados: 1) $-\frac{3}{2}\pi$ 2) $\frac{1}{2}$ Ejemplo 2.20

   c) Encuentre los siguientes valores: Ejemplo 2.21

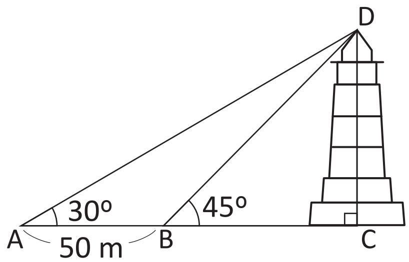
   1) $\operatorname{sen}\frac{9}{4}\pi$ 2) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$ 3) $\tan\left(-\frac{10}{3}\pi\right)$

Problemas de la Unidad A

1. Sea $0° \leq \theta < 360°$. Encuentre el valor de θ que satisface las siguientes ecuaciones:
   a) $2\text{sen}\theta - 1 = 0$ b) $2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$ c) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

a) Encuentre primero el valor de sen

2. En el punto A, el ángulo de elevación es 30° y en B es de 45°; encuentre la altura de la torre. No se considera la altura de los ojos.

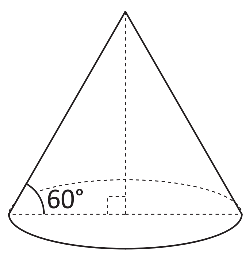


Sea CD = x m y trate de representar tan30° con x.

3. Sea $180° \leq \theta < 360°$ y $\cos\theta = \frac{3}{4}$ Encuentre los valores siguientes:
   a) $\text{sen}\theta$ b) $\tan\theta$ c) $\text{sen}(\theta + 90°)$ d) $\cos(90° - \theta)$
   e) $\tan(\theta + 180°)$ f) $\text{sen}(180° - \theta)$ g) $\cos(-\theta)$

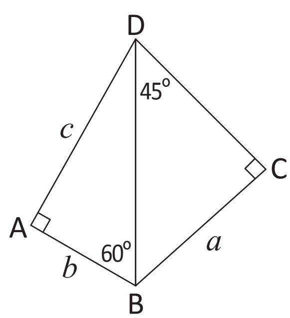
Ejemplo 2.11 y Clase 8 y 9

4. Encuentre el volumen del cono de la figura. El radio de la base mide 10.

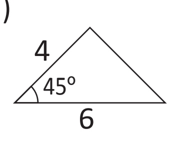


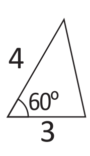
Véase Fig. 1.3

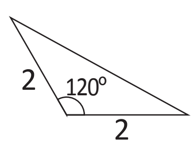
5. Represente los valores de b y c con a.

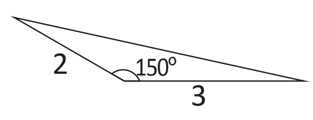


6. Encuentre el área de los siguientes triángulos:

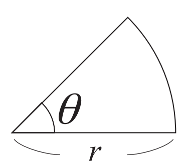
a)


b)


c)


d)


7. Encuentre la longitud l del arco y el área A del sector circular cuyo radio central es θ radián.



Véase Clase 10

Problemas de la Unidad B

1. Sea $0° \leq \theta < 360°$. En cada inciso a), b), c), d), resuelva la ecuación (1) y utilizando su solución, encuentre el valor de θ que satisface la ecuación en (2).

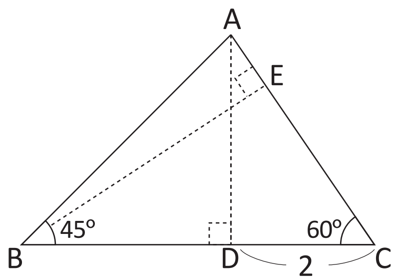
Véase Lec.2 Clase 3 y 4

   a) (1) $4x^2 - 3 = 0$ (2) $4\,\text{sen}^2\theta - 3 = 0$
   b) (1) $3x^2 - 1 = 0$ (2) $3\tan^2\theta - 1 = 0$
   c) (1) $x^2 + x = 0$ (2) $\tan^2\theta + \tan\theta = 0$
   d) (1) $2x^2 + x - 1 = 0$ (2) $2\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta - 1 = 0$

2. En la figura $m\angle ABC = 45°$, $m\angle ACD = 60°$; $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ y $DC = 2$. Encuentre los siguientes valores:

Véase Fig. 1.3

   a) AD b) AB c) BD d) BC
   e) BE f) AC g) EC h) AE
   i) sen15° j) cos15° k) tan15°
   l) sen75° m) cos75° n) tan75°

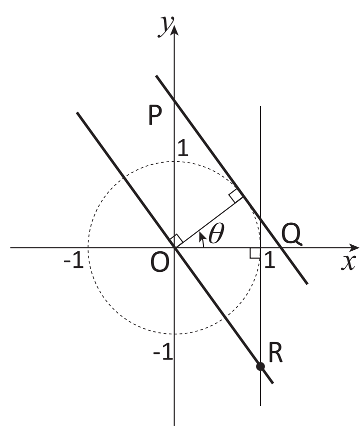


3. Demuestre las siguientes relaciones:

Véase Lec.1 Clase 7 y Lec.2 Clase 6

   a) $\cot\theta = \dfrac{\csc\theta}{\sec\theta}$ b) $\dfrac{1}{\cot^2\theta} + 1 = \sec^2\theta$

4. Exprese las coordenadas de los puntos P, Q y R con $\sec\theta$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$.



Encuentre la pendiente de la recta PQ (véase Lec.2 Clase 4).

5. Encuentre el valor.

   a) $(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 - 2\cos^2\theta\tan\theta$

   b) $(1 + \text{sen}\theta - \cos\theta)(1 - \text{sen}\theta + \cos\theta) - 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$

   c) $\dfrac{1}{\cos(90° - \theta)\,\text{sen}(180° - \theta)} - \tan^2(270° - \theta)$

   d) $\cos(\theta - 90°)\,\text{sen}(\theta + 270°) + \text{sen}(\theta + 180°)\cos(180° - \theta)$

Tabla de trigonometría

θ	senθ	cosθ	tanθ
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9323
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	senθ	cosθ	tanθ
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4383	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	

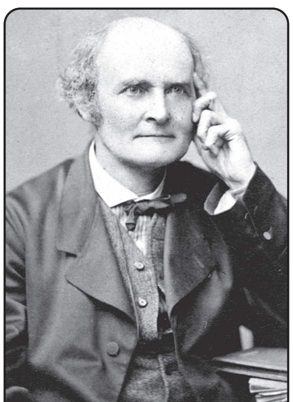
Matemáticas I

Unidad III

Vectores y matrices

- Lección 1: Vectores
- Lección 2: Vectores en el espacio
- Lección 3: Matrices

Algo de historia


Arthur Cayley
(1821 – 1895)

Cayley fue un matemático británico. Nació en Surrey el 16 de agosto de 1821. Fue fundador de la escuela británica de matemática pura. Antes de ocupar el cargo de catedrático en la Universidad de Cambridge, fue abogado durante 14 años.

Cayley publicó más de novecientos artículos científicos a lo largo de su vida, es considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades.

También se conoce por sus contribuciones a la teoría de invariante, geométrica de alta dimensión.

Cayley falleció el 26 de enero de 1895.

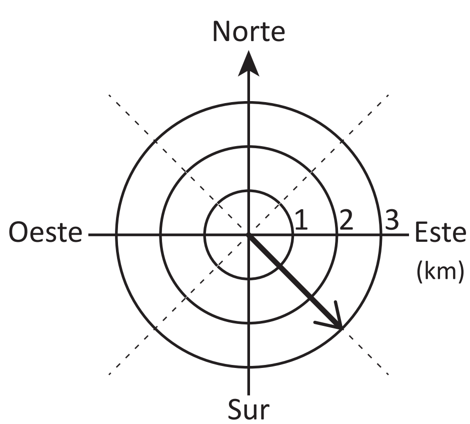
Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Vectores

Clase 1. Concepto de vector

Ejercicio 1.1. El mapa de abajo indica el lugar de un tesoro. Encuentre el lugar, expresando cada paso con un segmento con flecha (véase el ejemplo de abajo).
Indicación: Sale de la piedra triangular y avanza según lo siguiente:

Paso	Orientación	Distancia (en km)
1	noreste	2
2	noroeste	3
3	oeste	1
4	norte	3
5	noreste	3
6	este	2
7	norte	3
8	noroeste	3



Ejemplo de segmento con flecha suroeste 3km.

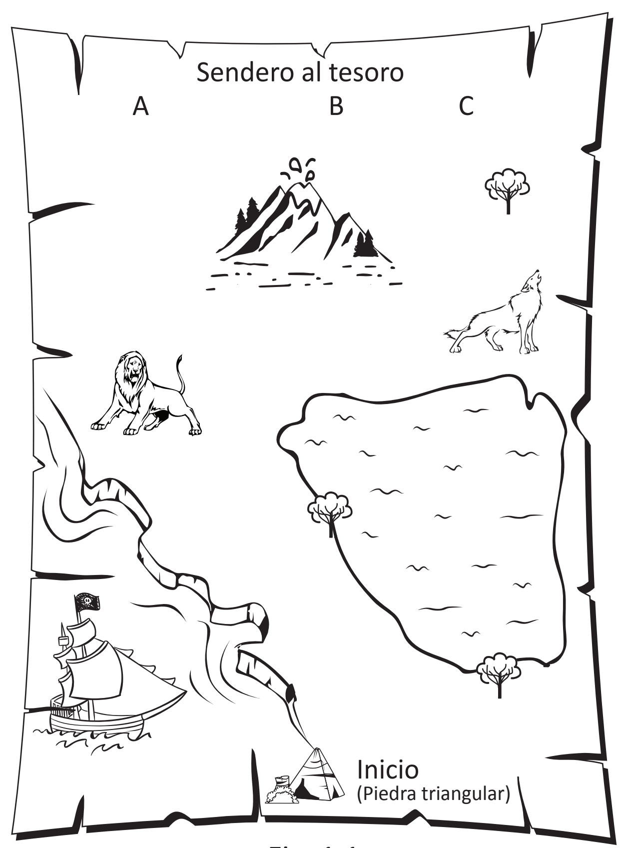


Fig. 1.1

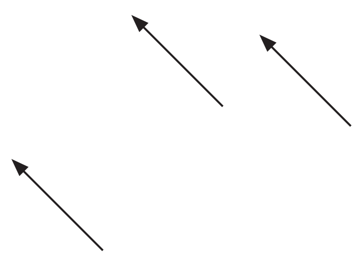
En el Ejercicio 1.1 cada indicación consiste en la pareja de “orientación” y “distancia”. A esta pareja se le denomina **vector**.
Correspondiendo a ocho (8) pasos, están colocadas en Fig. 1.1 ocho segmentos con flecha, que se llaman **segmentos orientados**. Estos se utilizan para representar los vectores gráficamente.
A un vector le puede corresponder más de un segmento orientado. Por ejemplo en el Ejercicio 1.1: los pasos 2 y 8 son el mismo vector, por lo tanto los segmentos orientados correspondientes tienen la misma orientación y la misma longitud, pero difieren en la posición. Lo mismo sucede con los pasos 4 y 7.

En resumen, los segmentos orientados con la misma orientación y la misma longitud representan el mismo vector. De esta manera a un vector corresponden un sinnúmero de segmentos orientados que son paralelos con la misma orientación y la misma longitud.

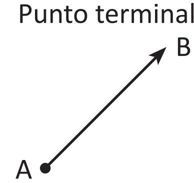
Correspondencia entre vector y segmentos orientados

Vector | Segmentos orientados

[noroeste, 3 km]



Punto terminal



Punto inicial

Fig. 1.2

El vector representado por el segmento orientado de la Fig. 1.2 se denota mediante $\overrightarrow{AB}$.

Se le denomina a la longitud del segmento AB **magnitud** y se denota $|\overrightarrow{AB}|$.

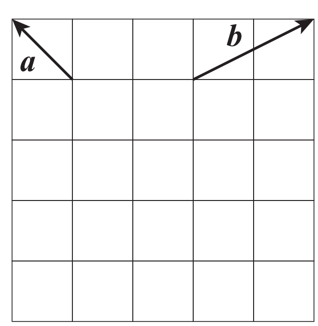
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si y sólo si las orientaciones coindicen y $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Los símbolos, como ser $\boldsymbol{a}$ se utilizarán también para representar vectores. Si dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son iguales se denota: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$.

En la escritura del vector la flecha es siempre hacia la derecha.
($\overleftarrow{BA}$ es equivocado)

En el cuaderno escriba como $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$.

Ejercicio 1.2. Dibuje tres segmentos orientados que representan vector $\boldsymbol{a}$. Haga lo mismo con vector $\boldsymbol{b}$.



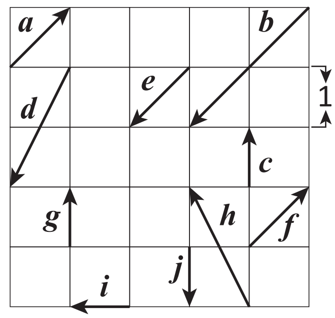
A un vector de magnitud 1, se le llama **vector unitario**.

Ejercicio 1.3. En la figura los lados del cuadrado miden uno.

a) Encuentre vectores iguales a $\boldsymbol{a}$.

b) Encuentre magnitud de los vectores $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{i}$.

c) Encuentre vectores unitarios.

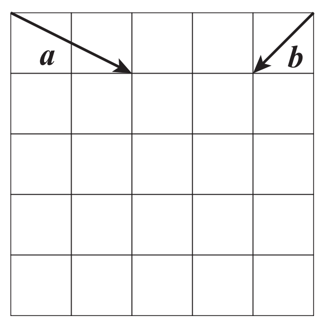


A cada vector $\overrightarrow{AB}$ le corresponde su **inverso** $\overrightarrow{BA}$ y se denota mediante $-\overrightarrow{AB}$, es decir:

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Si $\boldsymbol{a}$ es $\longrightarrow$,
$-\boldsymbol{a}$ es $\longleftarrow$

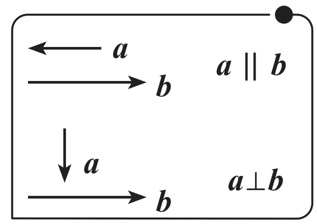
Ejercicio 1.4. Dibuje un segmento orientado que representa $-\boldsymbol{a}$. Haga lo mismo con $-\boldsymbol{b}$.



Se considera $\overrightarrow{AA}$ como un vector y se le llama **vector cero** y se denota por $\boldsymbol{0}$.

$$\overrightarrow{AA} = \boldsymbol{0}$$

Sean $\overrightarrow{AB} \neq \boldsymbol{0}$ y $\overrightarrow{CD} \neq \boldsymbol{0}$, si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **paralelos** y se denota como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **perpendiculares** y se denota $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.



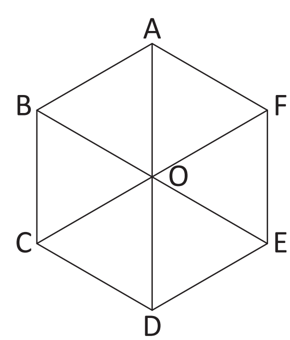
Ejercicio 1.5. En la figura del Ejercicio 1.3:

a) Encuentre el vector inverso de $\boldsymbol{a}$.

b) Encuentre los vectores paralelos a $\boldsymbol{a}$.

c) Encuentre los vectores perpendiculares a $\boldsymbol{i}$.

d) ¿Los vectores $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{h}$ son perpendiculares?



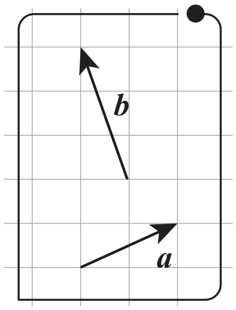
Ejercicio 1.6. La figura es un hexágono regular, encuentre los vectores:

a) Paralelos a $\overrightarrow{AB}$ (Conteste excepto $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{AB}$)

b) Inversos a $\overrightarrow{CD}$

Clase 2. Adición y sustracción de vectores

Adición: Se define la suma de dos vectores como indica el dibujo de la figura 1.3.



Se toman tres puntos A, B y C tal que:

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$

$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$

$\Longrightarrow$

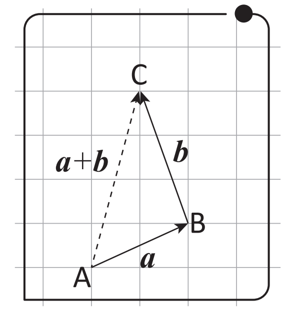


Fig. 1.3

[A]

$\overrightarrow{AC}$ corresponde a la sucesión de los desplazamientos representados por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Es decir:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Hay otra representación gráfica de la suma:

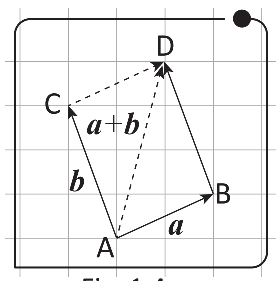


Fig. 1.4

ABDC es un paralelogramo.

Ejercicio 1.7. Explique que $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

Es idéntica que la de los números

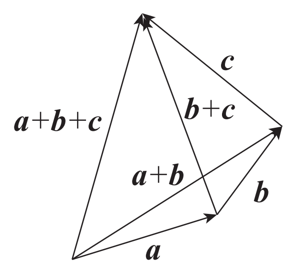
Propiedades de la adición:

1. Conmutatividad $\quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2. Asociatividad $\quad \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

El resultado del inciso 2 se escribe $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

Demostración: (1) Viene de la Fig. 1.4 .

(2) Viene de la figura de la derecha.

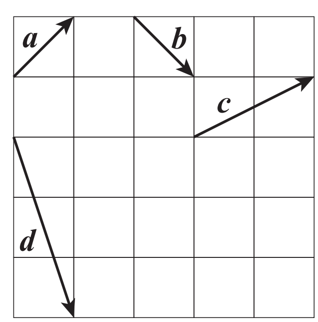


Ejercicio 1.8. Explique 3 y 4 de las propiedades de la adición.

Ejercicio 1.9. En la figura dibuje los segmentos orientados que representan los siguientes vectores:

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$



Sustracción.

[B]

Véase
Propiedad de la adición 4

En el cálculo de los números se tiene que:

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$, donde $-\boldsymbol{b}$ tiene la propiedad
$\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, es decir la relación de $-\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a la de $\boldsymbol{b}$ y $-\boldsymbol{b}$.
Por consiguiente, se da la siguiente definición:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

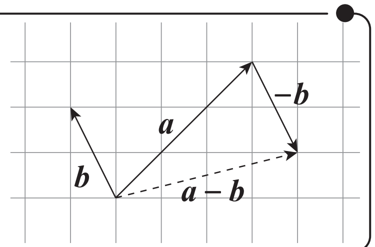


Fig. 1.5

Hay otra representación gráfica de la resta.

Compare $\overrightarrow{BA}$ de la Fig. 1.5.

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

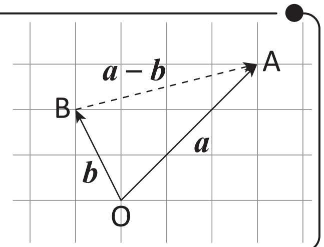


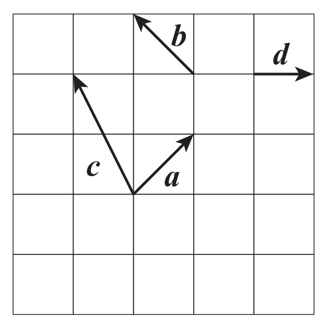
Fig. 1.6

Note que en la Fig. 1.6, $\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$, por lo tanto, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ es la solución de la ecuación $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$

Compare:
Si $b + x = a$
Entonces $x = a - b$

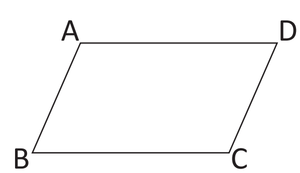
Ejercicio 1.10. En la derecha dibuje los segmentos orientados que representan las siguientes operaciones:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}. \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}. \quad \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}. \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$$



Ejercicio 1.11. En el paralelogramo ABCD, exprese como $\overrightarrow{AB}$ las sumas y restas:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$



Clase 3. Multiplicación con un número real

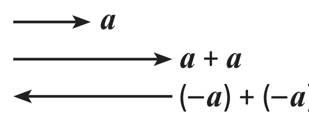
Consideración previa

Si a representa un número, se escribe $a + a = 2a$ y $(-a) + (-a) = -2a$ de lo cual surge la idea de escribir $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}$ y $(-\boldsymbol{a}) + (-\boldsymbol{a}) = -2\boldsymbol{a}$.
De la gráfica se sabe que

$|2\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{a}|$, $2\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen la misma orientación

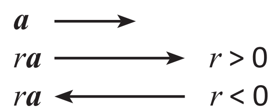
$|-2\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{a}|$, $-2\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ tienen la orientación opuesta.

[A]



Está observación induce a la siguiente definición:

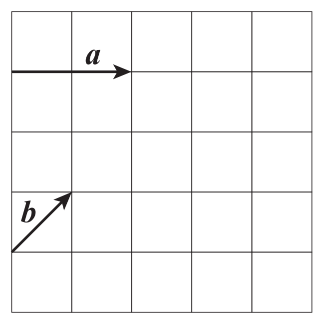
> Sea $\boldsymbol{a}$ un vector y r un número real. Se define $r\boldsymbol{a}$ como lo siguiente:
> Cuando $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $r \neq 0$
> La magnitud $|r\boldsymbol{a}|$ de $r\boldsymbol{a}$ es $|r|\,|\boldsymbol{a}|$
> La orientación de $r\boldsymbol{a}$ y la de $\boldsymbol{a}$ es
> La misma si $r > 0$
> Opuesta si $r < 0$
>
> El caso contrario
> $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ para cualquier $\boldsymbol{a}$
> $r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ para cualquier r



De esta definición se sabe que:
$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
$(-1)\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$

Ejercicio 1.12. Dibuje los siguientes vectores:

$2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$,
$\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{b}$,
$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$



Se utiliza también la notación $\frac{3\boldsymbol{a}}{2}$ para $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$.

Ejemplo 1.1. Sea $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Encuentre la magnitud de $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

Solución: $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right| = \left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right| = \left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\right|\,|\boldsymbol{a}| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}| = 1$

$|r\boldsymbol{a}| = |r|\,|\boldsymbol{a}|$

> Si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, entonces el vector unitario que tiene la misma orientación que $\boldsymbol{a}$ es $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

> Propiedad del producto con número real.
> Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ vectores y k, l números reales.
> 1. $k\,(l\,\boldsymbol{a}) = (k\,l)\,\boldsymbol{a}$
> 2. $(k + l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
> 3. $k\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ fueran números, 1 correspondería la propiedad asociativa de la multiplicación y 2 y 3 a la propiedad distributiva.

La propiedad 1 permite la notación $kl\boldsymbol{a}$ en lugar de $(kl)\boldsymbol{a}$ y $k(l\boldsymbol{a})$.

Por estas propiedades se pueden calcular vectores como polinomios de primer grado.

Ejemplo 1.2. Calcule (expresando en la forma $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$). $2(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - 4(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

Solución: $2(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) - 4(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

$= 6\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$

$= 10\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b}$

Ejercicio 1.13. Calcule.

a) $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$

b) $-2(5\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

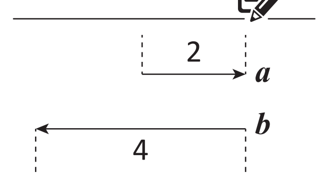
c) $(-\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) - (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

d) $-3\,(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) + 4(-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$

e) $2(-3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) - 3(-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$

Clase 4. Paralelismo de vectores

Ejemplo 1.3. Exprese $\boldsymbol{b}$ en términos de $\boldsymbol{a}$ en la figura de la derecha**.**



Solución: $|\boldsymbol{b}| = 2\,|\boldsymbol{a}|$.

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen orientación opuesta.

Por lo tanto, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}$.

> Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$
> $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff$ hay un número real k tal que $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$

"$\iff$" Quiere decir "si y sólo si".
A $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ corresponde la única k.

Demostración: Sea $|\boldsymbol{b}| = l|\boldsymbol{a}|$. Si $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, hay dos casos

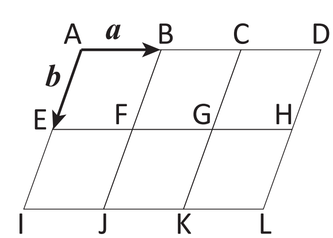
a) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen la misma orientación. En este caso por la definición de una multiplicación se tiene que $\boldsymbol{b} = l\boldsymbol{a}$.

b) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen orientaciones opuestas. En este caso se tiene que $\boldsymbol{b} = -l\boldsymbol{a}$.

Inversamente, si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $k \neq 0$ y $\boldsymbol{b} = k\,\boldsymbol{a}$, entonces por la definición de la multiplicación con número real, se tiene que $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Ejercicio 1.14. En la figura exprese vectores con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

a) $\overrightarrow{CK}$ b) $\overrightarrow{EH}$ c) $\overrightarrow{LI}$ d) $\overrightarrow{HF}$ e) $\overrightarrow{LD}$



Ejercicio 1.15. Sea $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Demuestre que:

$-4\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y que $(2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) \parallel (-4\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b})$

Clase 5. Componentes de vectores

[A]

Sea $\boldsymbol{e}_1$ (respectivamente $\boldsymbol{e}_2$) un vector unitario cuya orientación es la misma que la del eje x (respectivamente eje y).

Dado un punto A (a_1, a_2), sea A1$(a_1, 0)$ [respectivamente A2$(0, a_2)$] el pie(base) de la perpendicular hacia el eje x [respectivamente eje y].
Entonces, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}_1 + \overrightarrow{\mathrm{OA}}_2$.
Como $\overrightarrow{\mathrm{OA}}_1 = a_1\,\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}_2 = a_2\,\boldsymbol{e}_2$,
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$ … (1)

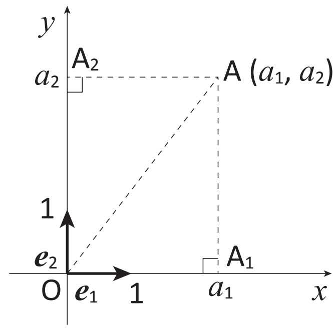


Fig. 1.7

Inversamente, si $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$, entonces las coordenadas de A son (a_1, a_2).
Es decir, los números a_1 y a_2 en (1) se definen únicamente.

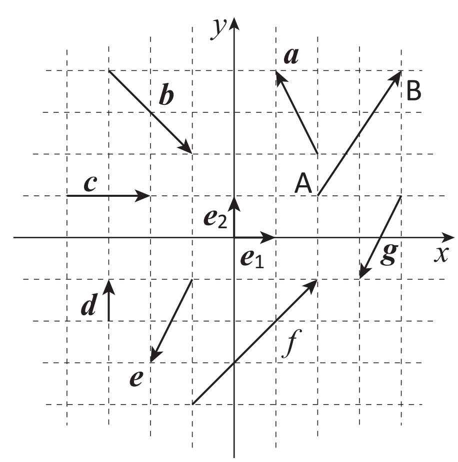
En cualquier vector $\boldsymbol{a}$ existe el único punto A que satisface:
$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$. Aplicando lo anteriormente expresado, se tiene que:

> En un vector $\boldsymbol{a}$, existe un único par de números (a_1, a_2) que satisface:
> $$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$$
> Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, entonces las coordenadas de A son (a_1, a_2).

En base de esto, se utiliza la siguiente expresión:

> Si $\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$, se escribe
> $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ $\quad a_1$ componente x, a_2 componente y.

A la expresión (a_1, a_2) se le llama **Forma Matricial**.



Ejemplo 1.4. En la figura exprese el vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en forma matricial.

Solución: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$

$= (2, 3)$

Ejercicio 1.16. En la figura anterior, exprese los vectores desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{g}$ en forma matricial.

La forma matricial de $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ son:
$\boldsymbol{0} = (0, 0)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$

***Ejemplo 1.5.** Si dos vectores ($3x$, 8) y (– 9, $4y$) son iguales, encuentre los valores de x y y.

Solución: $(3x, 8) = (-9, 4y)$

$$\begin{cases} 3x = -9 \\ 8 = 4y \end{cases}$$

Por lo tanto: $x = -3$, $y = 2$ (Respuesta)

$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

***Ejercicio 1.17.** Encuentre los valores de x y y que satisfacen la igualdad:

a) $(2x, 3) = (-4, 3y)$ b) $(3x, -6) = (18, 2y)$

Además, se tiene que:

Si $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, entonces $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Demostración: en la Fig. 1.7, si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, entonces,

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \mathrm{OA} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Ejemplo 1.6. En el Ejemplo 1.4, calcule $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$.

Solución: Como $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 3)$, se tiene que

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Ejercicio 1.18. En el ejemplo 1.14, calcule $|\boldsymbol{a}|$ hasta $|\boldsymbol{g}|$

Clase 6. Operaciones en componentes

Sean (a_1, a_2), (b_1, b_2) vectores y k un número real

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$
$$k\,(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$$

[A]

Note que se opera por componente.

Demostración: Como $(a_1, a_2) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$, $(b_1, b_2) = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2$

se tiene que:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2) + (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= (a_1 + b_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\boldsymbol{e}_2 \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k\,(a_1, a_2) &= k\,(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= k\,a_1\boldsymbol{e}_1 + k\,a_2\boldsymbol{e}_2 \\ &= (ka_1, ka_2) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.19. Demuestre la segunda igualdad.

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.

Ejemplo 1.7. Calcule: $2(-3, 1) - 3(2, -1)$.

Solución:
$$\begin{aligned} 2(-3, 1) - 3(2, -1) &= (2(-3), 2(1)) - (3(2), 3(-1)) \\ &= (-6, 2) - (6, -3) \\ &= (-6-6, 2-(-3)) \\ &= (-12, 5) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.20. Calcule:

a) $4(1, -2) + 2(-3, 5)$ b) $-3(2, -1) + 5(1, -3)$

c) $2(-3, 2) - 5(1, -2)$ d) $4(-1, 1) - 2(3, -2) - (-4, 5)$

Ejercicio 1.21. Si $\boldsymbol{a} = (1, -2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 5)$ y $\boldsymbol{x}$ satisfacen la siguiente igualdad, exprese $\boldsymbol{x}$ en la forma matricial.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = 2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x})$$

Primero exprese $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Ejemplo 1.8. Encuentre, la forma matricial, del vector unitario que tiene la misma orientación que el vector $\boldsymbol{a} = (-1, 2)$

Véase la Clase 4

Solución: $\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, como $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{(Respuesta)}$$

Ejercicio 1.22. Encuentre la forma matricial del vector unitario que tiene la misma orientación que $\boldsymbol{a}$.

a) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$ b) $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$ c) $\boldsymbol{a} = (3, 0)$ d) $\boldsymbol{a} = (0, -4)$

Clase 7. Coordenadas y componentes

Sean A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) dos puntos en el plano.
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

A(a_1, a_2) representa las coordenadas del punto A, $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ representa los componentes del vector $\overrightarrow{OA}$.

Demostración: Como $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ y $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ se tiene que,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Ejemplo 1.9. Sean A(2, –1), B(–3,5). Encuentre los componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ y sus magnitudes,

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = ((-3)-2, 5-(-1)) = (-5, 6)$$

$$\overrightarrow{BA} = (2-(-3), (-1)-5) = (5, -6)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{61}, \quad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$$

Otra manera es
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
$= -(-5, 6)$
$= (5, -6)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

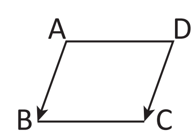
Ejercicio 1.23. Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $|\overrightarrow{AB}|$ en los siguientes casos.

a) A(3, 5), B(4, 1) b) A(–2, 4), B(5, –3)

c) A(0, –2), B(1, –1) d) A(6, –1), B(0, –2)

Ejemplo 1.10. Los tres vértices de un paralelogramo ABCD son A(2, 3), B(0, –2), y C(5, 0). Encuentre las coordenadas del vértice D.

Solución: Sea D(a, b). La condición para que ABCD sea un paralelogramo es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Como $\overrightarrow{AB} = (0-2, -2-3) = (-2, -5)$



$\overrightarrow{DC} = (5 - a, 0 - b) = (5 - a, -b)$, se tiene que $(-2, -5) = (5 - a, -b)$

$$\begin{cases} -2 = 5 - a \\ -5 = -b \end{cases}$$

Luego $a = 7$, $b = 5$.

D(7, 5) Respuesta.

Ejercicio 1.24. En Ejemplo 1.10, sean A(–3, 5), B(1, 3) y D(2, 4). Encuentre las coordenadas de C.

Clase 8. Paralelismo y componentes

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Entonces $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ $\quad k$: número real.
Si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, se tiene que:

Clase 2 y 4

> Sean $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ y $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$. Entonces $(a_1, a_2) \parallel (b_1, b_2)$
> $\Longleftrightarrow$ Hay un número real k tal que: $(b_1, b_2) = k(a_1, a_2)$

Ejemplo 1.11. Determine el valor de x de modo que dos vectores $\boldsymbol{a} = (3, -2)$ y $\boldsymbol{b} = (x, 4)$ sean paralelos.

Solución: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ hay un número real k tal que:

$$(x, 4) = k(3, -2)$$
$$(x, 4) = (3k, -2k)$$
$$\begin{cases} x = 3k \\ 4 = -2k \end{cases} \quad \text{Luego } k = -2, \quad x = -6 \text{ (Respuesta)}$$

De $4 = -2k$
se tiene $k = -2$

Ejercicio 1.25. Determine el valor de x ó y de modo que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sean paralelos.

a) $\boldsymbol{a} = (2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (x, -3)$,

b) $\boldsymbol{a} = (-1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, y)$,

c) $\boldsymbol{a} = (x, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2)$,

d) $\boldsymbol{a} = (4, y)$, $\boldsymbol{b} = (2, -3)$

Ejemplo 1.12. Sean A(−2, 1), B(5, 3), C(−4, 2) y D(x, 6) cuatro puntos. Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, encuentre el valor de x.

Solución: $\overrightarrow{AB} = (5-(-2), 3-1) = (7, 2)$ y $\overrightarrow{CD} = (x-(-4), 6-2) = (x+4, 4)$.
$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \leftrightarrow$ Existe un número real k tal que:
$(x + 4, 4) = k(7, 2)$. Por lo tanto $(x + 4, 4) = (7k, 2k)$
y se tiene que $4 = 2k$, $k = 2$.
$x + 4 = 7(2) = 14$. Luego $x = 10$. (Respuesta)

$a \parallel b \leftrightarrow b = ka$
(Clase 4)

El símbolo $\leftrightarrow$ expresa una doble condición, es decir, “sí y solo sí”. También se puede representar como $\Longleftrightarrow$.

Ejercicio 1.26. Determine el valor de x o y de modo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

a) A(0, −3), B(4, 2), C(10, 7), D(x, −3)

b) A(10, 1), B(2, 5), C(−3, 4), D(1, y)

c) A(x, 4), B(−7, 1), C(4, 5), D(−2, −1)

d) A(4, 3), B(−5, y), C(4, 0), D(1, 1)

Ejemplo 1.13. Encuentre los vectores $\boldsymbol{b}$ que son paralelos al vector $\boldsymbol{a} = (4, -3)$ y tienen la magnitud 10.

Solución: Como $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ donde k es un número real.

Como $|\boldsymbol{b}| = 10$ y $|\boldsymbol{b}| = |k||\boldsymbol{a}| = |k|\sqrt{4^2+(-3)^2} = 5|k|$

se tiene que $5|k| = 10$, entonces $|k| = 2$, $k = \pm 2$.

Por lo tanto
$\boldsymbol{b} = \pm 2(4, -3) = \pm(8, -6)$ (Respuesta).

Ejercicio 1.27. Encuentre los vectores $\boldsymbol{b}$ que son paralelos al vector $\boldsymbol{a}$ y tienen la magnitud indicada.

a) $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $|\boldsymbol{b}| = 5$

b) $\boldsymbol{a} = (1, 1)$, $|\boldsymbol{b}| = 4$

c) $\boldsymbol{a} = (-3, 2)$, $|\boldsymbol{b}| = 13$

d) $\boldsymbol{a} = (-2, 5)$, $|\boldsymbol{b}| = 10$

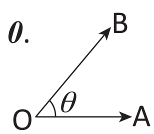
$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$
(Clase 3)

Hay dos vectores que satisfacen la condición. Se puede representar el resultado como

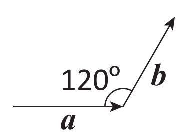
$$\pm|\boldsymbol{b}|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

Clase 9. Producto interno

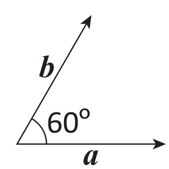
Sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ dos vectores que no son $\boldsymbol{0}$.
Al $\angle AOB$ se le llama **ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$**.



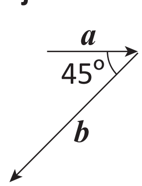
Ejemplo 1.14. Encuentre el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ en la figura.



Solución: Colocando los vectores de modo que los puntos iniciales coincidan, se sabe que el ángulo es 60°.

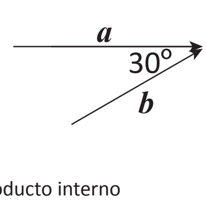


Ejercicio 1.28. Encuentre el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

a)


b)


c)


d)


[A]

θ no tiene orientación y $0° \leq \theta \leq 180°$.

Hay que colocar los vectores de modo que los puntos iniciales coincidan.

$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \leftrightarrow \theta = 0°$ ó 180°.
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \leftrightarrow \theta = 90°$

Para dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, se define **producto interno** $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ como lo siguiente:

[B]

Se llama también "Producto Punto"

> Si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
> Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ó $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, $\quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

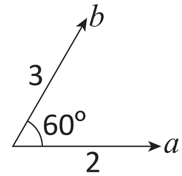
Hay que recordar los siguientes valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Ejemplo 1.15. Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2(3)\cos 60°$

$= 2(3)\frac{1}{2} = 3$ (Respuesta)



Ejercicio 1.29. En el ejercicio 1.28. encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ si $|\boldsymbol{a}|$ y $|\boldsymbol{b}|$ tienen los valores siguientes.

a) $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ b) $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 2$

c) $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 1$ d) $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 4$

Ejercicio 1.30. Encuentre los siguientes.

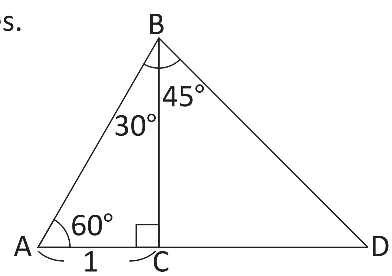
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$

e) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$



Encuentre las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$.

De la tabla de valores de coseno, se tiene que:

> Sean $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{b} \neq 0$ y θ el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
> $0° \leq \theta < 90° \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} > 0$
> $\theta = 90° \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$
> $90° < \theta \leq 180° \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0$

Como
$\theta = 90° \leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

También se tiene lo siguiente.

a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

c) $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ si $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ la igualdad se verifica si y solo si $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Demostración:

a) Es evidente.

b) El ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}$ es 0°. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cos\theta = |\boldsymbol{a}|^2$$

Como $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \cos\theta$ y $-1 \le \cos\theta \le 1$, se tiene que $-1 \le \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \le 1$.

Multiplicando por $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, que es positivo, $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \le \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \le |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.
Se verifica la igualdad si y solo si $\cos\theta = \pm 1$, Es decir $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

b) y c) son evidentes si $\boldsymbol{a} = 0$ ó $\boldsymbol{b} = 0$.
En la Demostración se supone que: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

$\cos 0° = 1$

$\cos\theta = \pm 1 \leftrightarrow \theta = 0°, 180° \leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

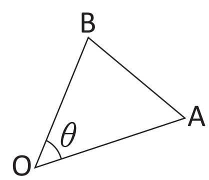
Clase 10. Producto Interno y componentes

Se puede expresar el producto interno por componentes.

> Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$. Entonces
> $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Demostración: Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ó $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces ambos lados son cero y la igualdad se verifica.
Ahora sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB} \neq \boldsymbol{0}$ y θ el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
Si $0° < \theta < 180°$, entonces los tres puntos O, A y B forman un triángulo y la ley de coseno dice que

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\theta$$



Esta igualdad también se verifica aun cuando $\theta = 0°$ ó 180°.
Ahora se escribe la igualdad de arriba con vectores.

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

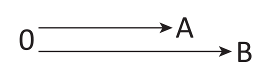
$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Luego $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -\frac{1}{2}\{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)\}$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

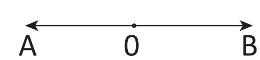
Se aprenderá la ley de coseno en matemática II.

AB^2 representa el cuadrado de la longitud AB.

$\theta = 0°$



$AB^2 = (OA - OB)^2$
$\cos 0° = 1$
$\theta = 180°$



$AB^2 = (OA + OB)^2$
$\cos 180° = -1$

Ejemplo 1.16. Encuentre el valor de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ si $\boldsymbol{a} = (1, -3)$, $\boldsymbol{b} = (2, 4)$.
Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = -10$ (Respuesta)

Ejercicio 1.31. Encuentre el valor de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a} = (-3, 2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -5)$

b) $\boldsymbol{a} = (-1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, -2)$

c) $\boldsymbol{a} = (3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 3)$

d) $\boldsymbol{a} = (3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (0, 0)$

Ejemplo 1.17. Hay cuatro puntos A(–3, 0), B(1, –5), C(4, 3), D(0, –2). Encuentre el valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Solución: $\overrightarrow{AB}$ = (1–(–3), –5 –0) = (4, –5)
y $\overrightarrow{CD}$ = (0–4, –2–3) = (–4, –5). Por lo tanto
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ = 4 · (–4) + (–5)(–5) = 9 (Respuesta)

Si A(a_1, a_2) y B(b_1, b_2) entonces
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
Véase Clase 7

Ejercicio 1.32. Encuentre el valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

a) A(1, –2), B(3, 4), C(2, –1), D(3, 0)

b) A(–5, 1), B(0, –2), C(1, –3), D(1, 4)

c) A(2, 0), B(–3, 1), C(–4, –1), D(0, 0)

Clase 11. Perpendicularidad y producto interno

Ejemplo 1.18. Encuentre las parejas de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
a) $\boldsymbol{a}$ = (3, 2), $\boldsymbol{b}$ = (–1, 1) b) $\boldsymbol{a}$ = (1, –1), $\boldsymbol{b}$ = (1, 1)
c) $\boldsymbol{a}$ = (3, 0), $\boldsymbol{b}$ = (0, –1) d) $\boldsymbol{a}$ = (–2, 1), $\boldsymbol{b}$ = (1, –2)

Solución: En a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3(-1) + 2(1) = -1 \neq 0$.
En b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1(1) + (-1)(1) = 0$ y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.
En c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3(0) + 0(-1) = 0$ y $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.
En d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (-2)(1) + 1(-2) = -4 \neq 0$

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ donde $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$
Véase Clase 1.9

Por lo tanto, en b) y c) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ (Respuesta)

Ejercicio 1.33. Encuentre las parejas de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (4, –2) $\boldsymbol{b}$ = (1, 2) b) $\boldsymbol{a}$ = (3, –2) $\boldsymbol{b}$ = (–2, 3)

c) $\boldsymbol{a}$ = (–2, 1) $\boldsymbol{b}$ = (4, –2) d) $\boldsymbol{a}$ = (3, 0) $\boldsymbol{b}$ = (1, 1)

Ejemplo 1.19. Sean $\boldsymbol{a}$ = (2,3) $\boldsymbol{b}$ = (x, 6). Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.
Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2(x) + 3(6) = 2x + 18$. Como $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ se tiene que

$2x + 18 = 0$. Por lo tanto $x = -9$. (Respuesta)

Ejercicio 1.34. Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (–1,2) $\boldsymbol{b}$ = (x, 3) b) $\boldsymbol{a}$ = (x, 4) $\boldsymbol{b}$ = (2, 3)

c) $\boldsymbol{a}$ = (3, x) $\boldsymbol{b}$ = (5, –6) d) $\boldsymbol{a}$ = (–2, x) $\boldsymbol{b}$ = (2, –3)

Ejercicio 1.35. Encuentre el valor de x de modo que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

a) A(3, −1), B(2, 4), C(1, 5), D(x, 0)

b) A(2, x), B(1, −1), C(−3, 1), D(2x, -2)

***Ejemplo 1.20.** Encuentre vector unitario $\boldsymbol{u}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{a} = (3, -4)$.

Solución: Sea $\boldsymbol{u} = (x, y)$.

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{u} \leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \leftrightarrow 3x - 4y = 0$ .... (1)

$|\boldsymbol{u}| = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ .... (2)

De (1) se tiene que $y = \frac{3}{4}x$ .... (3)

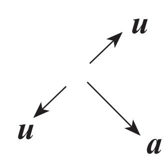
Sustituyendo (3) en (2), se tiene que

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 1 \qquad \frac{25}{16}x^2 = 1 \qquad x^2 = \frac{16}{25}$$

$x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$ Sustituyendo en (3), se tiene que

$y = \frac{3}{4} \cdot \left(\pm\frac{4}{5}\right) = \pm\frac{3}{5}$. Por lo tanto $\boldsymbol{u} = \pm\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. (Respuesta)

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{16}{16} + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$



Generalmente si $\boldsymbol{a} = (a, b)$, entonces

$$\boldsymbol{u} = \pm\frac{(b, -a)}{|\boldsymbol{a}|}$$

***Ejercicio 1.36.** Encuentre el vector unitario $\boldsymbol{u}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{a}$.

a) $\boldsymbol{a} = (1, -2)$ b) $\boldsymbol{a} = (4, 3)$ c) $\boldsymbol{a} = (3, 2)$ d) $\boldsymbol{a} = (3, 0)$

Clase 12. El ángulo formado por dos vectores

Sean $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{b} \neq 0$. Sea θ el ángulo formado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Entonces $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

Se deduce fácilmente de la definición:
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

Ejemplo 1.21. Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores donde $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ y $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (0° ≤ θ ≤ 180°).

Solución:

$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{-3}{2(3)} = -\dfrac{1}{2}$. Como 0° ≤ θ ≤ 180°,

se tiene que θ = 120°. (Respuesta)

Véase la tabla de Clase 9

Ejercicio 1.37. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \le \theta \le 180°$).

a) $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 10, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 15$

b) $|\boldsymbol{a}| = 4, |\boldsymbol{b}| = 3, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6\sqrt{2}$

c) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}, |\boldsymbol{b}| = 2, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$

d) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2}, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -2$

Ejemplo 1.22. Sean $\boldsymbol{a} = (1, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (2, 1)$.
Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \le \theta \le 180°$).

Solución: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ $\qquad$ $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1(2) + 3(1) = 5$

$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ como $0° \le \theta \le 180°$,

$\theta = 45°$ (Respuesta)

Ejercicio 1.38. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \le \theta \le 180°$).

a) $\boldsymbol{a} = (2, -1), \boldsymbol{b} = (-1, 3)$

b) $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{3}), \boldsymbol{b} = (-\sqrt{3}, 3)$

c) $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{3}), \boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 1)$

d) $\boldsymbol{a} = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$,
$\boldsymbol{b} = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

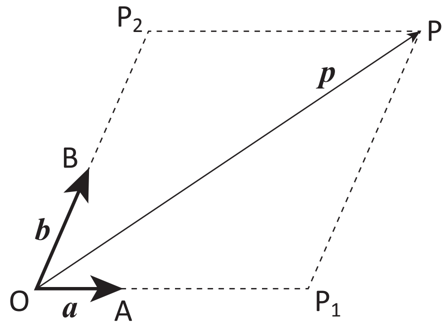
e) $\boldsymbol{a} = (2\sqrt{3} + 1, 2 - \sqrt{3}), \boldsymbol{b} = (-2, 1)$

*Clase 13. Descomposición de vectores

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$. Entonces para cualquier vector $\boldsymbol{p}$, existe un único par de números s y t tal que $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$.

Demostración. En la figura

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\overline{PP_1} \parallel \overline{OB}$,
$\overline{PP_2} \parallel \overline{OA}$, $\overrightarrow{OP_1} = s\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OP_2} = t\boldsymbol{b}$.
Entonces
$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$
$= s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$



$\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$ quiere decir $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son paralelos.

La expresión

$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2$ es un caso especial (Clase 5)

Cuando dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ satisfacen la condición, se dice que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son **linealmente independientes**.

Ejemplo 1.23. Exprese $\boldsymbol{p} = (-4, 1)$ con $\boldsymbol{a} = (2, -1)$ y $\boldsymbol{b} = (-3, 2)$.

Solución: Sea $\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$. Entonces $(-4, 1) = s\,(2, -1) + t\,(-3, 2)$
$= (2s - 3t, -s + 2t)$.
Por lo tanto

$$\begin{cases} 2s - 3t = -4 \\ -s + 2t = 1 \end{cases} \quad s = -5,\ t = -2$$

$\boldsymbol{p} = -5\boldsymbol{a} \ \ -2\boldsymbol{b}$ (Respuesta)

La forma $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ se llama **combinación lineal** de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Ejercicio 1.39. Exprese $\boldsymbol{p}$ con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{p} = (4, 3)$, $\boldsymbol{a} = (3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (5, 2)$
b) $\boldsymbol{p} = (-5, 0)$, $\boldsymbol{a} = (4, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-3, -1)$
c) $\boldsymbol{p} = (8, -3)$, $\boldsymbol{a} = (-2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -1)$

Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$.
Entonces $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = s'\boldsymbol{a} + t'\boldsymbol{b}$ si y sólo si $s = s'$, $t = t'$.

Ejemplo.1.24. Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$.Encuentre los valores de s y t que satisfacen $(2s - 1)\,\boldsymbol{a} + (3s + 2)\,\boldsymbol{b} = (t + 1)\,\boldsymbol{a} + (2t - 1)\boldsymbol{b}$.

Solución: Igualando los coeficientes de ambos lados, se tiene que:

$$\begin{cases} 2s - 1 = t + 1 \\ 3s + 2 = 2t - 1 \end{cases} \quad \text{por lo tanto } s = 7,\ t = 12$$

Ejercicio 1.40. Sean $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{b}$.Encuentre los valores de s y t que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $(s + 3)\,\boldsymbol{a} + (-s + 1)\boldsymbol{b} = (-2t + 1)\,\boldsymbol{a} + (t + 2)\boldsymbol{b}$.

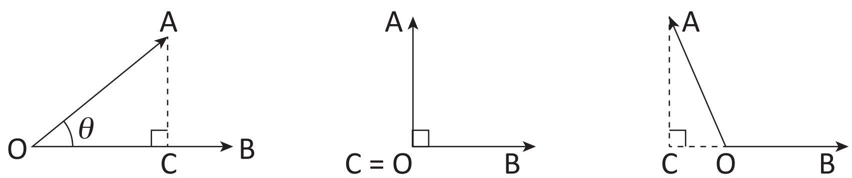
b) $(3s + 1)\,\boldsymbol{a} + (2s - 1)\boldsymbol{b} = (t - 2)\,\boldsymbol{a} + (t + 1)\boldsymbol{b}$.

c) $(2 - s)\,\boldsymbol{a} + 2s\boldsymbol{b} = (2t - 1)\,\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}$.

Clase 14. Proyección

Definición de la proyección. **[A]**

Sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ dos vectores diferentes de $\boldsymbol{0}$ y sea θ el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Se distingue tres casos.



$0° \leq \theta < 90°$ $\theta = 90°$ $90° < \theta \leq 180°$

Fig. 1.8

C es el pie (base) de la perpendicular desde A a $\overline{OB}$.

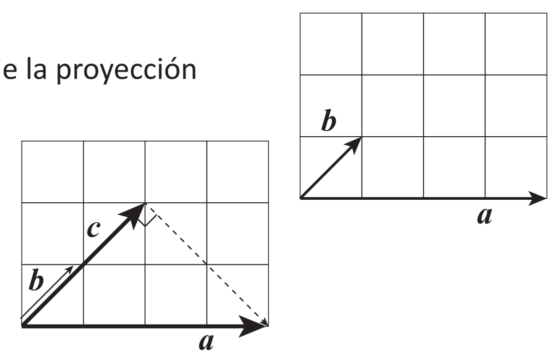
En la Fig.1.8 al vector $\overrightarrow{OC}$ se le denomina la **proyección** de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

La proyección de $\boldsymbol{a}$ debe formar un ángulo recto con $\boldsymbol{b}$.

Ejemplo 1.25. Dibuje la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

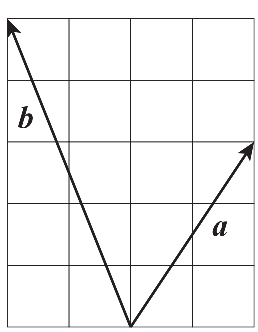
Solución

$\boldsymbol{c}$ es la proyección.

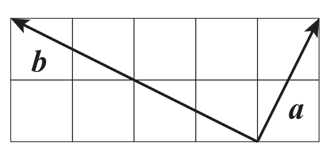


Ejercicio 1.41. Dibuje la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

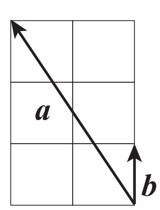
a)



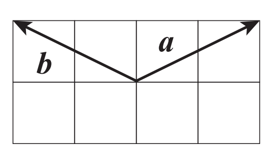
b)



c)



d)



Expresión de la proyección.

[B]

En la Fig. 1.8, $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ es el vector unitario que tiene la misma orientación que $\boldsymbol{b}$.

En el caso $0° \leq \theta < 90°$, $|\overrightarrow{OC}| = |\boldsymbol{a}| \cos\theta$ y la orientación de $\overrightarrow{OC}$ coincide con la de $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$, por lo tanto:

$\overrightarrow{OC} = |\boldsymbol{a}| \cos\theta \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$. Como $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ se tiene que:

$$\overrightarrow{OC} = |\boldsymbol{a}|\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} \quad . . . (1)$$

En el caso $\theta = 90°$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{0}$. Por otra parte $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.
Por lo tanto, la fórmula (1) se verifica también en este caso.

En el caso $90° < \theta \leq 180°$, $\cos\theta < 0$ y

$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \big||\boldsymbol{a}| \cos\theta\big| = |\boldsymbol{a}|(-\cos\theta) = -|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

La orientación de $\overrightarrow{OC}$ es opuesta a la de $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

Por lo tanto $\overrightarrow{OC} = -|\boldsymbol{a}|\cos\theta\left(-\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right) = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$ y se verifica (1) en este caso también.

$-\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ tiene la orientación opuesta a $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

En resumen

> Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores diferentes de $\boldsymbol{0}$.
> La proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ es $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$.

Ejemplo 1.26. Sean $\boldsymbol{a} = (2, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1)$. Encuentre la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

Solución: La proyección es:

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} = \frac{2(3)+5(1)}{3^2+1^2}(3, 1) = \frac{11}{10}(3, 1) = \left(\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right)$$

Ejercicio 1.42. En el Ejemplo 1.25 los lados de los cuadrados miden 1. Encuentre los componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y calcule la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

Ejercicio 1.43. Encuentre la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a} = (2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 1)$ b) $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-4, 2)$

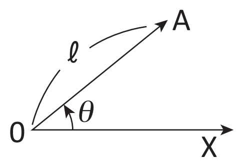
c) $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (0, 1)$ d) $\boldsymbol{a} = (3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2)$

Clase 15. Forma matricial y forma polar

Hasta ahora se ha venido utilizando los componentes para expresar los vectores numéricamente. A esta forma se le llama **forma matricial**.
Hay otra forma que se llama **forma polar** que corresponde a la expresión del Ejercicio 1.1.

[A]

Forma polar



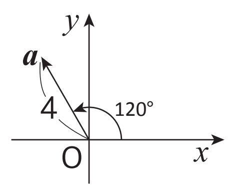
OA = (ℓ, θ) ℓ : magnitud
θ : argumento

El rayo OX es paralelo al eje x y ambos tienen la misma orientación.

Nota: No se puede determinar un único argumento. Si θ corresponde al $\overrightarrow{OA}$, todos los argumentos tienen la forma $\theta + 360° \, n$ (n: número entero).

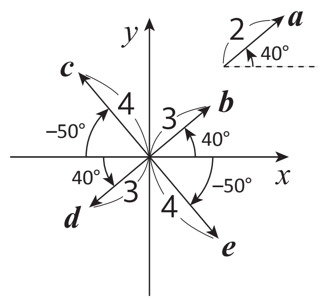
Véase Unidad II, Lección II, Clase 1, 2.1.

Ejemplo 1.27. Exprese $\boldsymbol{a}$ en forma polar. Tome el argumento θ en $0° \leq \theta < 360°$.



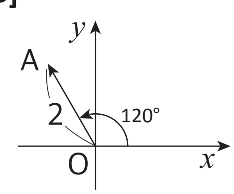
Solución: $\boldsymbol{a}$ = (4,120°)

Ejercicio 1.44. Exprese los vectores en forma polar. Tome el argumento θ en $0° \leq \theta < 360°$.



Conversión entre la forma polar y la forma matricial

[B]



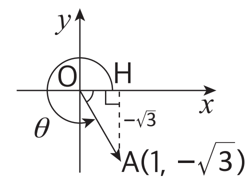
Ejemplo 1.28. Exprese $\boldsymbol{a}$ = (2, 120°) en forma matricial.
Solución: Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, las coordenadas del punto A son los componentes de $\boldsymbol{a}$. (Clase 7)
Las coordenadas del punto A son:
(2cos120°, 2sen120°) = $(-1, \sqrt{3})$
Por lo tanto $\boldsymbol{a} = (-1, \sqrt{3})$.

Ejercicio 1.45. Exprese en la forma matricial.

a) $\boldsymbol{a}$ = (4, 60°)   b) $\boldsymbol{b}$ = (6, 135°)

c) $\boldsymbol{c}$ = (2, 210°)   d) $\boldsymbol{d} = (\sqrt{2}, 315°)$

Ejemplo 1.29. Exprese $\boldsymbol{a}$ = (1, $-\sqrt{3}$) en forma polar.
Tome el argumento θ en 0° ≤ θ <360°.



OA = $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}$ = 2

Solución: El ΔOAH es un triángulo rectángulo y OH: OA: AH= 1: 2: $\sqrt{3}$.
Por lo tanto, m∠AOH = 60° (Véase Unidad II Fig. 1.3).
Luego θ = 300° $\boldsymbol{a}$ = (2, 300°)

Ejercicio 1.46. Exprese en forma polar.

a) $\boldsymbol{a}$ = ($\sqrt{3}$, 1) b) $\boldsymbol{b}$ = (–3, 3)

c) $\boldsymbol{c}$ = (–3, – $\sqrt{3}$) d) $\boldsymbol{d}$ = (2, –2)

***Ejemplo 1.30.** Sean $\boldsymbol{a}$ = (2, 50°), $\boldsymbol{b}$ = (3,110°).
Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Solución: Como el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es:
110° – 50° = 60°,
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60° = 2(3)\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ (Respuesta)

Es más rápido que calcular convirtiendo los vectores en la forma matricial.

***Ejercicio 1.47.** Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a}$ = (3, 40°), $\boldsymbol{b}$ = (2, 70°)

b) $\boldsymbol{a}$ = (2, 70°), $\boldsymbol{b}$ = (3, 205°)

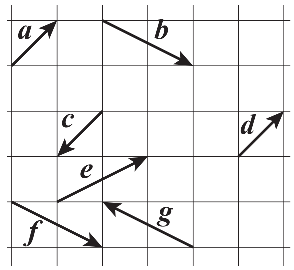
c) $\boldsymbol{a}$ = (3, 20°), $\boldsymbol{b}$ = (2, 335°)

d) $\boldsymbol{a}$ = (3, 80°), $\boldsymbol{b}$ = (5, 260°)

Ejercicios de la lección

1. a) Encuentre las parejas de vectores iguales.

   b) Encuentre las parejas de un vector y su inverso.

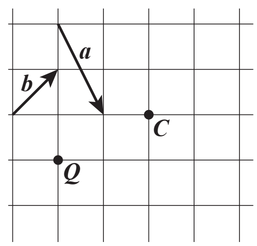


Clase 1

2. Encuentre el punto D de modo que:

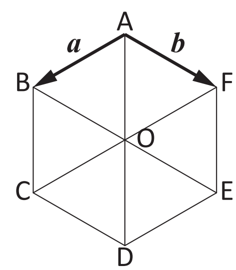
   $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boldsymbol{a}$.

   Encuentre los puntos P de modo que:
   $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \boldsymbol{b}$ y $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = |\boldsymbol{b}|$.



Clase 2

3. La figura muestra un hexágono regular.
   a) Exprese los siguientes vectores en la forma $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$.
   a1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ a2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ a3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$
   a4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ a5) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ a6) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AO}}$
   a7) $\overrightarrow{\mathrm{BO}} - \overrightarrow{\mathrm{BF}}$

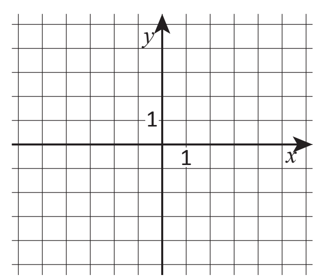


Clase 2

   b) Exprese los siguientes vectores en la forma $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$.
   Ejemplo: $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$
   b1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ b2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ b3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$
   b4) $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ b5) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

Clase 3

4. Dibuje los siguientes vectores:
   a) $\boldsymbol{a} = (3, 2)$
   b) $\boldsymbol{b} = (-4, 1)$
   c) $\boldsymbol{c} = (2, -3)$
   d) $\boldsymbol{d} = (-3, -4)$



Clase 5

5. Determine el valor de s de modo que la magnitud tenga el valor indicado.
   a) $\boldsymbol{a} = (3, s)$, $|\boldsymbol{a}| = 5$ b) $\boldsymbol{b} = (-4, s)$, $|\boldsymbol{b}| = 5$
   c) $\boldsymbol{c} = (s, -2)$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{13}$ d) $\boldsymbol{d} = (s, 1)$, $|\boldsymbol{d}| = 2$

Clase 5

6. Encuentre los valores de s y t que satisfacen los siguientes:
   a) $3(s, 5) + 2(-1, t) = (1, 17)$
   b) $-2(s + t, s - t) + 5(s - 1, t) = (3, -11)$

Clase 6

7. Encuentre los valores de s y t que satisfacen los siguientes:
   a) $\mathrm{A}(s, 5)$, $\mathrm{B}(1, t)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, 2)$ b) $\mathrm{A}(t, 2s)$, $\mathrm{B}(s, 1 - t)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-5, 2)$

Clase 7

8. Determine el valor de s de modo que $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. Clase 8

a) $\boldsymbol{a} = (s - 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, s)$ b) $\boldsymbol{a} = (2 - s, -2)$, $\boldsymbol{b} = (3, s - 1)$

9. Determine el valor de s de modo que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Clase 8

a) A(2, −1), B(2, 2), C(−3, 1),D(s, −5)

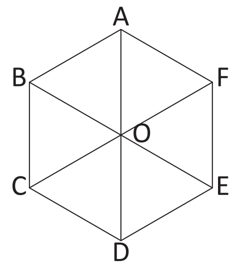
b) A(4, −1), B(3, 1), C(0, 4), D(3, s)

10. Encuentre los vectores $\boldsymbol{b}$ que son paralelos al vector $\boldsymbol{a}$ y tienen magnitud indicada. Clase 8

a) $\boldsymbol{a} = (5, -12)$, $|\boldsymbol{b}| = 26$

b) $\boldsymbol{a} = (-5, 4)$, $|\boldsymbol{b}| = 41$

11. La figura es un hexágono regular cuyos lados miden 2. Encuentre los siguientes: Clase 9



a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB}$

d) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FD}$ e) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$

12. Encuentre el valor de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Clase 10

a) $\boldsymbol{a} = (\sqrt{2} + 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{2} - 1, 1)$

b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2})$

13. Encuentre el valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Clase 10

a) A = $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, B = (1, −1), C = $(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, D = $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

b) A = $(\sqrt{3}, 4)$, B = $(\sqrt{2}, -1)$, C = $(\sqrt{6}, 1)$, D = (−2, −5)

14. Encuentre el valor de s tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. Clase 11

a) $\boldsymbol{a} = (s, 4)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{2}, -1)$ b) $\boldsymbol{a} = (3, s - 1)$, $\boldsymbol{b} = (s, 2)$

15. Encuentre el valor de s tal que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. Clase 11

a) A(3, 1), B(s, −2), C(−1, 2), D(1, s + 1)

b) A(s, 2), B(3, 1), C(−2, 1), D(s, 5)

16. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ($0° \leq \theta \leq 180°$). Clase 12

a) $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -6$

b) $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3\sqrt{6}$

17. Exprese $\boldsymbol{p}$ con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Clase 13

a) $\boldsymbol{a} = (3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -3)$, $\boldsymbol{p} = (13, -4)$

b) $\boldsymbol{a} = (4, -3)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$, $\boldsymbol{p} = (-11, 12)$

18. Encuentre la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$. Clase 14

a) $\boldsymbol{a} = (2, 4)$, $\boldsymbol{b} = (3, 0)$ b) $\boldsymbol{a} = (-3, -3)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1)$

c) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2)$ d) $\boldsymbol{a} = (3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 2)$

19. Exprese en forma matricial. Clase 15

$\boldsymbol{a} = (6, 30°)$, $\boldsymbol{b} = (7, 90°)$, $\boldsymbol{c} = (4, 150°)$, $\boldsymbol{d} = (1, 180°)$, $\boldsymbol{e} = (8, 240°)$

$\boldsymbol{f} = (2, 270°)$, $\boldsymbol{g} = (2, 300°)$, $\boldsymbol{h} = (10, 330°)$

20. Exprese en forma polar. Clase 15

$\boldsymbol{a} = (2, 2)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\boldsymbol{c} = (-1, \sqrt{3})$, $\boldsymbol{d} = (-1, -\sqrt{3})$

Lección 2. Vectores en el espacio

Clase 1. Coordenadas en el espacio

En la Fig. 2.1 tres planos se intersecan perpendicularmente en el punto O. A las tres rectas formadas cada una por la intersección de dos de los tres planos se le denomina eje x, eje y y eje z (Fig. 2.2)

El plano que contiene el eje x y el eje y se llama plano $x - y$. Se define el plano $y - z$ y el plano $z - x$ de la misma manera.

Para cualquier punto P en este espacio se define sus coordenadas como lo siguiente.

Sea A el punto de intersección del eje x con el plano que pasa por P y paralelo al plano $y - z$.

Sea a la coordenada del punto A en el eje x, se define los puntos B y C y sus coordenadas b y c de la misma manera. Entonces se define que las coordenadas del punto P son (a, b, c).

Ejemplo 2.1. En la Fig. 2.2 el sólido OAKB – CMPL es un paralelepípedo rectangular. Encuentre las coordenadas de los puntos A y K.

Solución: El plano que pasa por A y paralelo al plano $y - z$ es el plano PMAK y corta el eje x en el punto A cuya coordenada en eje x es a. Por lo tanto, la coordenada x del punto A es a. De la misma manera se tiene que las coordenadas del punto A son $(a,0,0)$ y las del punto K es $(a, b, 0)$.

Ejercicio 2.1. Encuentre las coordenadas de los puntos B, C, L y M en la Fig. 2.2.

[A]

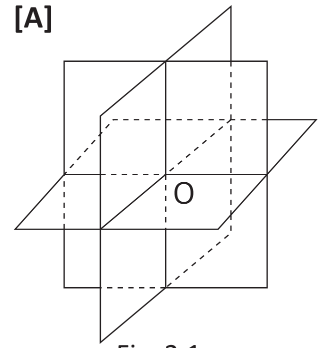


Fig. 2.1

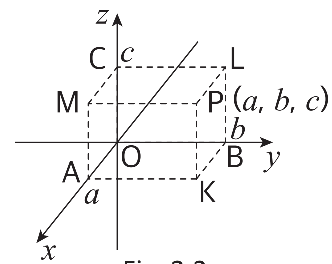


Fig. 2.2

OCMA es paralelo al plano $z - x$ y OAKB al plano $x - y$.

Distancia entre dos puntos

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ dos puntos.
La distancia entre A y B, es decir, la longitud del segmento AB es $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

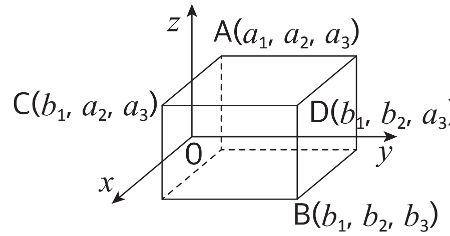
Demostración. En la figura las caras del paralelepípedo rectangular son paralelas a uno de los planos $x - y$, plano $y - z$ o plano $z - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al ΔACD
se tiene que $AD^2 = AC^2 + CD^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$ …(1)

[B]

En particular

$OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



Aplicando al ΔADB, se tiene que $AB^2 = AD^2 + DB^2 = AD^2 + (b_3 - a_3)^2$ . . .(2)

Sustituyendo (1) en (2) se tiene que $AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

Luego $\quad AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

En la demostración están excluidos los casos en que no se puede tomar el paralelepípedo rectangular.

Ejemplo 2.2. Sean A(2, 1, –2) y B(–3, 2, 1) dos puntos. Encuentre la distancia entre A y B.

Solución: $\quad AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-1)^2 + (1-(-2))^2}$

$\quad = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{35}$

Ejercicio 2.2. Encuentre la distancia entre A y B.

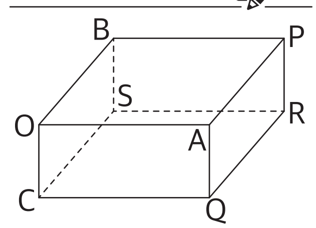
a) A (3, 1, 2) B (4, 5, 6) b) A (2, –1 ,0) B (0, 3, 1)

c) A (0, 0, 0) B (2, –1, 3) d) A (–3, 1, 2) B (4, –2, 2)

Clase 2. Vectores en el espacio

Se definen los vectores en el espacio y sus operaciones como en el plano y se utilizan las mismas notaciones.
Se verifican las mismas propiedades que en las Clases 1.2 y 1.3

[A]



Ejemplo 2.3. La figura muestra un paralelepípedo.
Exprese $\overrightarrow{OR}$ con $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, y $\overrightarrow{OC}$.

Solución: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR}$

$\quad = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, porque $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OC}$

Por la propiedad conmutativa se puede cambiar el orden de los términos.

Ejercicio 2.3. En la misma figura exprese los siguientes vectores con $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, y $\overrightarrow{OC}$.

a) $\overrightarrow{OP}$ b) $\overrightarrow{OS}$ c) $\overrightarrow{OQ}$ d) $\overrightarrow{RC}$ e) $\overrightarrow{QS}$ f) $\overrightarrow{BQ}$

Componentes

[B]

Sean $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$ y $E_3(0, 0, 1)$ tres puntos.
Se definen tres vectores $\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ y $\boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$.
Cualquier vector $\boldsymbol{a}$ se puede representar en una sola manera como
$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$, donde a_1, a_2 y a_3 son números reales.
Se les denomina las **componentes** de $\boldsymbol{a}$ al (a_1, a_2, a_3) y se denota
$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Los componentes de los vectores en el espacio tienen las mismas propiedades como en el plano.

Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores y k un número real.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$
$$k\boldsymbol{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Véase Lección 1
Clase 5 y 6

Ejemplo 2.4. Sean $\boldsymbol{a}$ = (1, 2, 3), $\boldsymbol{b}$ = (4, 5, 6). Encuentre los siguientes:
a) $|\boldsymbol{a}|$ b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ c) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ d) $-2\boldsymbol{a}$

Solución: a) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ = (1 + 4, 2 + 5, 3 + 6) = (5, 7, 9)

c) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ = (1 − 4, 2 − 5, 3 − 6) =(−3, −3, −3)

d) $-2\boldsymbol{a}$ = (−2(1), −2(2), −2(3)) = (−2, −4, −6)

Ejercicio 2.4. Calcule como en el Ejemplo 2.4.

a) $\boldsymbol{a}$ = (−2, 1, 3), $\boldsymbol{b}$ = (0, 2, 1). Encuentre $|\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ y $3\boldsymbol{a}$.

b) $\boldsymbol{a}$ = (1, −1, 2), $\boldsymbol{b}$ = (−1, 0, 1). Encuentre $|\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ y $-2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Sean A (a_1, a_2, a_3) y B (b_1, b_2, b_3) dos puntos.
Entonces se tiene que $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Véase Lección 1
Clase 7

Ejemplo 2.5. Sean A (1, 2, 3) y B (6, 5, 4) dos puntos.
Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$.

Solución: $\overrightarrow{AB}$ = (6 – 1, 5 – 2 , 4 – 3) = (5, 3, 1)

Ejercicio 2.5. Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$.

a) A (4, 1, 3), B (5, 2, 6)

b) A (3, 1, –5), B (0, 1, 1)

c) A (1, –1, 3), B (–4, 1, 0)

d) A (4, –2, 3), B (1, –1, 3)

Clase 3. Producto interno

Sean $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ dos vectores diferentes de $\boldsymbol{0}$.
Se define el ángulo θ ($0° \leq \theta \leq 180°$) entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, como en el plano.

Véase Clase 1.10

Ahora sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ cualesquier dos vectores.

Se define el producto interno $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ como lo siguiente.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{cases} |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta & \text{si } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \text{ y } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \text{ ó } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Se tiene que:

Si $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ entonces
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

La demostración es la misma que en el plano. Se aplican la ley de coseno y la formula de la distancia.

Ejemplo 2.6. Sean $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (4, 6, 5)$. Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2(4) + 1(6) + 3(5) = 29$

Ejercicio 2.6. Encuentre $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (5, 6, 3)$
b) $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, 2, 1)$
c) $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (5, -1, -1)$
d) $\boldsymbol{a} = (1, 3, -4)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 2)$

Ejemplo 2.7. Sean $\boldsymbol{a} = (0, 1, 1)$ y $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$ dos vectores.
Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $0° \leq \theta \leq 180°$.

Véase ejemplo 1.22

Solución: $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{0(1) + 1(1) + 1(0)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{2}$

Como $0° \leq \theta \leq 180°$, $\theta = 60°$

Ejercicio 2.7. Encuentre el ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $0° \leq \theta \leq 180°$.

a) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 0, -1)$ b) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$

c) $\boldsymbol{a} = (2 - 2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, $\boldsymbol{b} = (2, \sqrt{3}, 1)$

d) $\boldsymbol{a} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 1)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{6}, 1, 1)$

Ejemplo.2.8. Sean $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 3)$ y $\boldsymbol{b} = (x, 4, -2)$. Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Véase ejemplo 1.19

Solución: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -2(x) + 1(4) + 3(-2) = -2x - 2$.
Por otra parte $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.
Por lo tanto $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow -2x - 2 = 0$, $x = -1$ (Respuesta)

Ejercicio 2.8. Encuentre el valor de x tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

a) $\boldsymbol{a} = (1, 3, -2)$, $\boldsymbol{b} = (x, 2, 4)$
b) $\boldsymbol{a} = (-1, 3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, x, -4)$
c) $\boldsymbol{a} = (3, 5, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, x)$
d) $\boldsymbol{a} = (x, -2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, -1)$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la distancia entre A y B. Clase 1
   a) A(–3, 0, 4), B(–1, 2, –5) b) A(1, –2, –5), B(–3, –1, 2)

2. Dados tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, encuentre lo que se pide. Clase 2
   a) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (3, 0, -5)$, $\boldsymbol{c} = (1, 3, -1)$, $|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}|$
   b) $\boldsymbol{a} = (-1, -2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, -1)$, $|3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}|$

3. Encuentre los componentes de $\overrightarrow{AB}$. Clase 2
   a) A(0, –5, 2), B(6, 9, –3) b) A(–1, 7, 5), B(–3, 7, –7)

4. Encuentre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Clase 3
   a) A(–1, 0, 2), B(3, 1, 0), C(2, –4, 1), D(5, 3, –1)
   b) A(1, $\sqrt{2}$, 1), B($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 0), C(–1, $\sqrt{2}$, 3), D($\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, –2)

5. Encuentre el valor del ángulo θ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ donde $0° \leq \theta \leq 180°$. Clase 3
   a) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 2)$
   b) $\boldsymbol{a} = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1)$, $\boldsymbol{b} = (3, -2, -\sqrt{3})$

6. Encuentre el valor de s tal que $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. Clase 3
   a) $\boldsymbol{a} = (3, 4, s)$, $\boldsymbol{b} = (s, 1, -2)$ b) $\boldsymbol{a} = (s, -1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2s, -s + 2, 1)$

Problemas de la Unidad A

1. Dados tres puntos A(–3, 2), B(0, –2) y C(1, –1), encuentre las coordenadas del punto D que satisfacen las condiciones siguientes:
   $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{CD}| = 10$

2. Determine el valor de s de modo que $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ tenga el valor indicado.
   a) $\boldsymbol{a} = (s - 3, 4)$, $\boldsymbol{b} = (s, -s)$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 18$
   b) $\boldsymbol{a} = (s^2 - 2s, 3s)$, $\boldsymbol{b} = (2, s - 4)$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3$

3. Determine el valor de s de modo que la longitud de la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ sea 3 cuando $\boldsymbol{a} = (s - 1, s + 2)$ y $\boldsymbol{b} = (3, -4)$.

Problemas de la Unidad B

1. Sean a, b y c tres números reales tal que $(a, b) \neq (0, 0)$.
   Sea $ax + by + c = 0$ ...(1) una ecuación.

   Si $b \neq 0$, entonces (1) equivale a $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, que es una ecuación de recta.

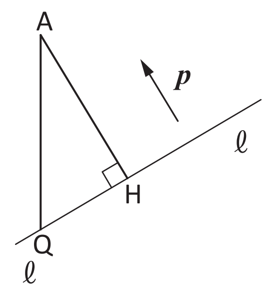
   Si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y (1) equivale a $x = -\frac{c}{a}$, que representa la recta perpendicular al eje x.

   En ambos casos (1) representa una recta ℓ.

   a) Demuestre que el vector $\boldsymbol{p} = (a, b)$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$, donde B y C son dos puntos diferentes de la recta ℓ.

   b) Sea A(s, t) un punto fuera de la recta ℓ.
   Sea H el pie de la perpendicular de la recta ℓ que pasa por A.
   Entonces se verifica las siguientes:
   - $\overrightarrow{AH} \parallel \boldsymbol{p}$
   - Sea Q(u, v) cualquier punto de la recta ℓ.
     AH es igual a la magnitud de la proyección de $\overrightarrow{AQ}$ sobre $\boldsymbol{p}$.

   Utilizando estos hechos, representa AH con a, b, c, s y t.



2. Sean A y B dos puntos diferentes en el espacio cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x - 2y + 3z - 4 = 0$ ... (1)
   Sea $\boldsymbol{p} = (1, -2, 3)$ un vector.
   Demuestre que $\boldsymbol{p} \perp \overrightarrow{AB}$.

Lección 3. Matrices

Clase 1. Definición de matrices (introducción 1)

Ejemplo 3.1. Se administra una tienda de ropa y se quiere hacer un registro de los artículos que se vendieron el día lunes por la mañana y por la tarde, para lo cual se listan los datos en la siguiente tabla.

[A]

Cantidad de piezas vendidas el lunes

Venta	camisas	pantalones	chaquetas
Por la mañana	5	3	6
Por la tarde	7	4	3

La información presentada en la tabla se presenta utilizando un arreglo rectangular llamado matriz.

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz se denota con la letra mayúscula y se utilizan paréntesis para ordenar los números. Ejemplo matriz V.

Definicion 3.1. Una matriz es un arreglo rectangular de números, los cuales constituyen los elementos de la matriz. Cada línea horizontal de elementos se conoce como fila y cada línea vertical de elementos se conoce como columna.

En una matriz a la fila también se le conoce como renglón.

En el ejemplo 3.1 la matriz

$$\begin{array}{rcl} V = & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{... fila 1} \\ \text{... fila 2} \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 \end{array} & \\ & \text{Columnas} & \end{array}$$

Ejemplo 3.2.

Utilice la matriz del Ejemplo 3.1 para responder las siguientes preguntas.

[B]

a) ¿Cuántas filas tiene la matriz V?.

b) ¿Cuántas columnas tiene la matriz V?.

c) ¿Cuál es el tamaño de la matriz V?.

Solución:

a) 2 filas

b) 3 columnas

c) El tamaño de la matriz V es 2 filas x 3 columnas y se denota 2x3.

Definición 3.2. Una matriz A de m x n es un arreglo rectangular de mn números donde m representa el número de filas o renglones y n el número de columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$(a_{11}, a_{21}, \ldots a_{1n})$ → Se llama fila i

Se llama columna j

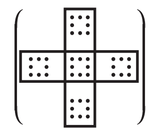
a_{11}, a_{21}, …a_{n1}, etc. Son elementos de la matriz A.

Si una matriz A tiene el mismo número de filas y columnas se le llama matriz cuadrada.

a_{ij} representa el elemento a en la fila i y la columna j.

(i, j) elemento

Fila i



Columna j

Ejemplo 3.3. Localizar las componentes a_{11} a_{31}

$$\begin{array}{c} a_{11} \\ \downarrow \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Fila 1}$$

↓

Columna 1

$a_{11} = 4$

Columna 1

↑

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Fila 3}$$

↑

a_{31}

$a_{31} = 2$

Ejercicio 3.1.

a) Dadas las siguientes matrices determine su tamaño.

a1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ a2) $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a4) $D = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ a5) $E = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) Sean $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b1) ¿Cuánto valen a_{12} a_{22} a_{23}?

b2) ¿Cuánto valen b_{11} b_{31}?

b3) ¿Cuánto valen c_{13} c_{31} c_{33} ?

c) Las cantidades de grasa, carbohidratos y proteínas en los grupos de alimentos son, respectivamente como sigue:
grasa: 5, 0, 0, 10 carbohidratos: 0, 10, 15, 12 proteínas: 7, 1, 2, 8
muestre la información en una matriz de 4 x 3.

d) Suponga que hay 8 kcal por unidad de grasa, 4kcal por unidad de carbohidratos y 5 kcal por unidad de proteína. Muestre esos datos en una matriz de 3x1.

Para definir el tamaño de una matriz primero consideramos el número de filas y luego el número de columnas.
Es decir, tamaño de una matriz: (número de filas) x (número de columnas).

Clase 2. Definición de matrices (introducción 2)

Ejemplo 3.4. Compare el tamaño y las componentes de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+3 & 1 & 2+3 \\ 1+1 & 1-4 & 6-6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a_{11} = b_{11}$ $4 = 1+3$	$a_{12} = b_{12}$ $1 = 1$	$a_{13} = b_{13}$ $5 = 2 + 3$	$a_{21} = b_{21}$ $2 = 1 + 1$
$a_{22} = b_{22}$ $-3 = 1 - 4$	$a_{23} = b_{23}$ $0 = 6 - 6$	Tamaño de A es 2 x 3 Tamaño de B es 2 x 3	

[A]

Todas las componentes de la matriz A y B son iguales y a la vez su tamaño. Por tanto A = B.

Definición 3.3. Dos matrices A=(a_{ij}) y B = (b_{ij}) son iguales si:
a) Son del mismo tamaño.
b) Las componentes correspondientes son iguales.

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

A = B $\Leftrightarrow a = p, b = q$
$c = r, d = s$

Ejercicio3.2.

a) Si $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -x & 3y \end{pmatrix}$ determine a, b, x, y

b) $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

Aplica la definición 3.3 para resolver

Definición 3.4
Matriz fila
Es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera $(a_{11} \quad a_{12} \ \dots \ a_{1n})$; es decir consta de una sola fila.
Matriz Columna
Es un conjunto ordenado de m números escritos de la siguiente manera $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$; es decir consta de una sola columna.

[B]

En el Ejercicio 3.1 nota que la matriz D consta de una sola fila por lo que se conoce como matriz fila.

La matriz B consta de una sola columna por lo que se conoce como matriz columna.

Clase 3. Definición de la adición, matriz nula, matriz opuesta

Ejemplo 3.5.

Una fábrica de cierto producto realiza tres modelos, A, B y C. Partes de cada modelo se realizan en una fabrica F_1 y luego se finalizan en otra fabrica F_2 en otra ciudad. El costo total de cada modelo consta de los costos de manufactura y del embarque. A continuación, se muestran los costos en dólares en cada fábrica.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Costo de Manufactura} & \text{Costo de embarque}\end{array} \\ F_1 = & \begin{pmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l}\text{Modelo A}\\ \text{Modelo B}\\ \text{Modelo C}\end{array}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Costo de manufactura} & \text{Costo de embarque}\end{array} \\ F_2 = & \begin{pmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 30 & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l}\text{Modelo A}\\ \text{Modelo B}\\ \text{Modelo C}\end{array}\end{array}$$

¿Cuál es el costo total de manufactura y embarque de cada modelo?

Solución:

La matriz $F_1 + F_2$ proporcionará los costos totales de la manufactura y el embarque de cada modelo.

$$F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 32+40 & 40+60 \\ 50+50 & 80+50 \\ 70+30 & 20+20 \end{pmatrix} \Longrightarrow F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} 72 & 100 \\ 100 & 130 \\ 100 & 40 \end{pmatrix}$$

Definición 3.5. Sean A y B dos matrices m x n, entonces la adición de A y B se denota A + B, está determinada por la matriz obtenida sumando los elementos correspondientes.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

[A]

El tamaño de F_1 y F_2 es 3 x 2

Para conocer el total es necesario sumar las componentes correspondientes a cada producto.

Ejercicio 3.3.

a) Dados las siguientes matrices realice los siguientes cálculos.

$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

a1) A + C a2) A + E a3) A + C + E
a4) B + D a5) B + F a6) B + D + F

b) Realice las siguientes adiciones.

b1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ b2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

b3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Recuerde que la suma de dos o más matrices se puede efectuar solo cuando son del mismo tamaño.

Una matriz cuyos elementos son ceros se le llama matriz nula o matriz cero.

[B]

Ejemplo 3.6.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A, B, C, D son matrices nulas

Observe que las matrices son de diferente tamaño, pero todas sus componentes son ceros.
Se denota la matriz nula de m x n como N_{mn}.

Dada la matriz A de m x n se define como matriz opuesta de A a la matriz m x n determinada por –A. Los componentes de –A son los componentes de A con signo opuesto.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.7.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.4.

a) Encuentre la matriz opuesta

a1) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ a2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ a3) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ a4) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

La matriz opuesta de A es –A y viceversa la opuesta de –A es A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Qué tipo de matriz resulta si sumamos A + (–A)?

Clase 4. Propiedades de la adición de matrices, sustracción

Ejercicio 3.5. Dadas las siguientes matrices calcule:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 & 3 \\ 6 & -8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) A + B b) B + A c) (A + B) + C d) A + (B + C) e) A + D

[A]

¿Qué se puede concluir con respecto a A + B y B + A, (A + B) + C y A + (B + C) ?
¿Qué se concluye de la suma A+D?

Teorema 3.1. Sean A, B y C tres matrices m x n entonces

A + B = B + A propiedad conmutativa
(A + B) + C = A + (B + C) propiedad asociativa
A + N_{mn} = A
A + (–A) = N_{mn}

Demostración:

a) A + B = B + A

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Sumando cada elemento correspondiente de A y B.

$$B + A = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$$

En los números reales se cumple que A + B = B + A

Por tanto A + B = B + A

Ejercicio 3.6. Demuestre la propiedad b), c) y d) del teorema 3.1

Ejercicio 3.7. En el ejercicio 3.5 calcule A + (–B)

[B]

Definición 3.6. Sean A y B dos matrices de m x n, entonces la resta, que se denota A-B, está determinado por la matriz obtenida restando los elementos correspondientes

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ A – B = $\begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.8.

Calcule

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.9. Tomando como referencia las matrices del Ejercicio 3.5 calcule:

a) A – A

b) A – B

c) A + (–B)

¿Qué tipo de matriz resulta A – A?.
¿Qué relación hay entre las matrices resultantes de b) y c)?

Teorema 3.2. Sean A y B dos matrices de m x n entonces:

a) A – A = N_{mn} → matriz nula

b) A – B = A + (–B)

En la sustracción de matrices no se cumple la propiedad conmutativa ni la asociativa.
Observe que si

A – B = X

Es decir X es una matriz que resulta de la resta de A y B entonces se cumple que: A = X + B

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

A – B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$ = X

A = X + B

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.10. Demuestre la propiedad de la sustracción a) y b) en caso de matrices de 2 x 3.

Clase 5. Multiplicación de un escalar por una matriz

Ejemplo 3.8.
Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre A + A.

Solución: A + A = $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

¿Cómo son los elementos de A + A en relación a los elementos de la matriz A?
Los elementos de la matriz A + A son el doble de los elementos de la matriz A, es decir, es como multiplicar todos los elementos de la matriz A por 2.

Definición 3.7
Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y k un número real, se define el producto

$$k\,\mathrm{A} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.9. Dado B = $\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ y $k = 3$ calcule kB.
Solución:

$$k\mathrm{B} = 3\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 24 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.11. Si A = $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ y $k = -4$, $l = 3$ y $m = -\frac{3}{2}$

Calcule: a) kA b) lA c) mA

Ejercicio 3.12. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
verifique que:
a) 1 A = A b) (–1) A = –A c) 0A = N_{22} d) $k\,N_{22} = N_{22}$, donde k es un número real.

Ejemplo 3.10. Si A = $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ encuentre (–2) A + 3 B

$$\begin{aligned}(-2)\mathrm{A} + 3\mathrm{B} &= -2\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -10 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ -16 & -11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

[A]

A + A = 2A;
2A significa que 2 multiplica a todos los elementos de la matriz A.

Al número k se le llama escalar.
Si A es una matriz se dice que kA es producto del escalar k por la matriz A.

El producto de una matriz por un escalar se encuentra multiplicando el escalar por cada elemento de la matriz.

Ejercicio 3.13.

Si A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentre: a) (–3)A – 2B b) 3(A – B) – 4C c) (–2) (A – B – C)

Si A y B son matrices de orden m x n y k y l son números reales, se cumple que:

a) (kl) A = $k(l$A)
b) $(k + l)$ A = kA + lA
c) k(A + B) = kA + kB

[B]

Para expresar tamaño de una matriz también se dice "orden".

Demostración de k(A + B) = kA + kB
Tomando el incisio c) y observando el caso en donde A y B son matrices de orden 2 x 2, se tiene que:

$$k\,(A + B) = k\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right]$$
$$= k\left[\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ka_{11}+kb_{11} & ka_{12}+kb_{12} \\ ka_{21}+kb_{21} & ka_{22}+kb_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix}$$
$$= k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$= kA + kB$$

Se utiliza la propiedad distributiva de los números reales.

Siguiendo este razonamiento, se pueden demostrar todos los incisos para el caso más general donde A y B son matrices de orden m x n.

Ejercicio 3.14. Demuestre los incisos a) y b) de [B]

Clase 6. Multiplicación de matrices

[A]

La primera tabla muestra el resultado de los juegos de dos equipos. En la segunda se presenta la cantidad de puntos obtenidos por cada tipo de juego.

	Ganados	Empatados	Perdidos
Honduras	5	2	3
Costa Rica	3	2	5

Juego	Puntos
Ganado	3
Empatado	1
Perdido	0

Encuentre el total de puntos obtenidos por cada equipo.

Los puntos se obtienen así:
5(3) + 2(1) + 3(0) = 15 + 2 + 0 = 17
3(3) + 2(1) + 5 (0) = 9 + 2 + 0 = 11

Los resultados, Honduras 17 puntos y Costa Rica 11 puntos se pueden expresar con la matriz $\begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$

La situación anterior y sus resultados puede expresarse como el producto de dos matrices de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \;\; 2 \;\; 3} \\ 3 \;\; 2 \;\; 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{5(3)+2(1)+3(0)} \\ 3(3)+2(1)+5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Si denotamos A = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$ se encuentra el producto AB = C multiplicando cada elemento de la primera fila de la matriz A por su correspondiente elemento de la columna de la matriz B. Lo mismo se hace con los elementos de la segunda fila de la matriz A.

El producto de la primera fila de la matriz A por la primera columna de la matriz B se coloca en la posición primera fila -primera columna de la matriz resultante.

Ejemplo 3.11.

Si A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ encuentre AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(1)+0(0) & 3(3)+0(2) \\ 4(1)+1(0) & 4(3)+1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.12.

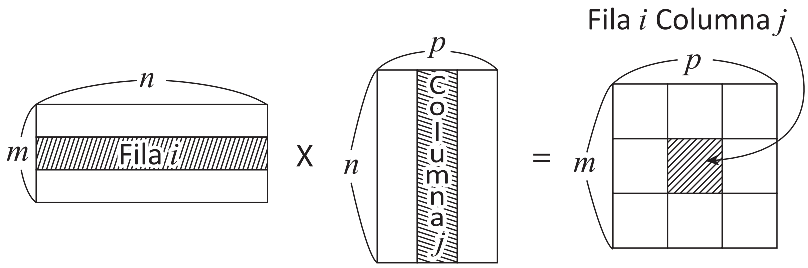
Si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ encuentre AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

Definición 3.8. Si A es una matriz de orden m x n y B es una matriz de orden n x p, el producto de las matrices AB = C es una matriz de orden m x p, donde cada elemento c_{ij} es el producto de la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B.

El producto de matrices solo puede ejecutarse si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Si A es una matriz de orden m x n y B es una matriz de orden n x p el producto C es una matriz de orden m x p.



$A \times A = A^2$

Producto de matrices cuadradas:

$(AB)C = A(BC)$
$A(B+C) = AB + AC$
$(A+B)C = AC + BC$

Ejemplo 3.13.

a) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(1)+3(0) & -4(3)+3(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)(1) & 2(2)+(-1)(-4) & 2(0)+(-1)(-5) \\ 4(3)+2(1) & 4(2)+2(-4) & 4(0)+2(-5) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 14 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1(-3)+4(0)+2(1) & 1(2)+4(4)+2(0) & 1(1)+4(-3)+2(2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 18 & -7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(3)+0(1)+1(0)+3(4) \end{pmatrix} = (24)$

Ejercicio 3.15. Encuentre el producto de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejemplo 3.14.

a) Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ encuentre AB y BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-11 & -44+44 \\ 3-3 & -11+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-11 & 33-33 \\ -4+4 & -11+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que AB = BA.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ encuentre AB y BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 3-4 \\ 0+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & 0+0 \\ 9-8 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se concluye que AB ≠ BA

c) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ encuentre AB y BA

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2+0 & -3+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No se puede efectuar el producto porque la matriz B es de orden 3x2 y la matriz A es de orden 1x3.

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden, generalmente el producto AB no es igual al producto BA.

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

Clase 7. Matriz inversa

En el ejemplo 3.14 inciso a) se tiene que

$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A esta última matriz se le llama matriz identidad.

Son ejemplos de matriz identidad las siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de orden 2x2; 3x3 y 4x4 respectivamente.

En la matriz Identidad a la línea formada por 1 se le denomina diagonal principal.

Ejemplo 3.15.

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentre AI y IA.

$$AI = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 0+11 \\ 1+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 11+0 \\ 0+1 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

Se concluye que A I = I A = A.

> Sea A una matriz de n x n e I la matriz identidad de orden n x n entonces A I = I A = A.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz nula del mismo orden que la matriz A. Encuentre A N y N A.

$$A\,N = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

$$N\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

> Sea A una matriz de n x n y N la matrtiz nula de orden n x n entonces AN = NA = N

De aquí en adelante si está claro el orden de la matriz, se utiliza I y N sin mencionar su orden.

[A]

Solo las matrices cuadradas tienen matriz identidad.

En la matriz identidad los elementos de la diagonal principal son 1 y los demás elementos son 0.

Matriz Identidad de orden 3x3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal.

En la matriz nula todos los elementos son ceros.

$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de orden 3x3.

Si A = $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ encuentre AB.

¿Qué observa?

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Si AB = BA = I se dice que B es la matriz inversa de A.

En general la matriz inversa de A se representa como A^{-1} y se lee "matriz A inversa".

Ejemplo 3.16. Si A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ encuentre la matriz inversa de A.

Solución: Si A es una matriz de 2x2 entonces sea B = $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ que se cumpla AB = I.

Por definición se sabe que $AA^{-1} = I$ entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$= \begin{pmatrix} 2w+5y & 2x+5z \\ w+3y & x+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la igualdad de las matrices se forman dos sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 2w+5y = 1 \\ w+3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+5z = 0 \\ x+3z = 1 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas encontramos los valores para w, x, y, z.
$y = -1$ entonces $2w + 5y = 1$, $2w + 5(-1) = 1$, $w = 3$.
$z = 2$ entonces $2x + 5z = 0$, $2x + 5(2) = 0$, $x = -5$.

$\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ satisface BA = $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I$

por lo tanto $B = A^{-1}$. La matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.16. Verifique que B = $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ comprobando que AB = BA = I

[B]

Todo número real diferente de cero tiene un inverso multiplicativo $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

De forma análoga si la matriz A tiene su matriz inversa A^{-1} entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Si A^{-1} es la matriz inversa de A, entonces A es la matriz inversa de A^{-1}.

Clase 8. Matriz inversa (Forma general)

Ejemplo 3.17.

Si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2x2 donde

$ad - bc \neq 0$, encuentre la matriz inversa de A en forma general.

Solución: Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ la matriz inversa de A.

Por definición $AA^{-1} = I$ por tanto:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} aw+by & ax+bz \\ cw+dy & cx+dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se forman dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} aw+by = 1 \\ cw+dy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+bz = 0 \\ cx+dz = 1 \end{cases}$$

Se resuelven para encontrar los valores para w, x, y, z.

$$\begin{cases} d(aw+by = 1) \\ -b(cw+dy = 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} d(ax+bz = 0) \\ -b(cx+dz = 1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} adw + \cancel{bdy} = d \\ -bcw - \cancel{bdy} = 0 \\ \hline adw - bcw = d \end{array} \qquad \begin{array}{l} adx + \cancel{bdz} = 0 \\ -bcx - \cancel{bdz} = -b \\ \hline adx - bcx = -b \end{array}$$

$w(ad - bc) = d$, cuando $ad - bc \neq 0$ $\qquad$ $x(ad - bc) = -b$ cuando $ad - bc \neq 0$

$$\boxed{w = \frac{d}{ad-bc}} \qquad \boxed{x = \frac{-b}{ad-bc}}$$

$$\begin{cases} -c(aw+by = 1) \\ a(cw+dy = 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} -c(ax+bz = 0) \\ a(cx+dz = 1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -\cancel{acw} - bcy = -c \\ \cancel{acw} + ady = 0 \\ \hline -bcy + ady = -c \end{array} \qquad \begin{array}{l} -\cancel{acx} - bcz = 0 \\ \cancel{acx} + adz = a \\ \hline -bcz + adz = a \end{array}$$

$y(ad - bc) = -c$, cuando $ad - bc \neq 0$ $\qquad$ $z(ad - bc) = a$, cuando $ad - bc \neq 0$

$$\boxed{y = \frac{-c}{ad-bc}} \qquad \boxed{z = \frac{a}{ad-bc}}$$

Estos valores satisfacen $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I$

En forma general la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $ad - bc \neq 0$ es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . . . . sacando $\frac{1}{ad-bc}$ como factor común.

A la expresión $ad - bc$ se le llama determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y se denota por $|A|$.

También se denota el determinante de la matriz A como det (A).

Determinante de una matriz de 2x2.
El determinante de una matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de 2x2 se define como $|A| = ad - bc$.

La matriz inversa de 2x2
Si A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz de 2x2 y $|A| \neq 0$

entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.17. Encuentre el determinante de las siguientes matrices:

a) A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) B = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c) C = $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Si el $|A| = 0$ la matriz A no tiene inversa.

Ejercicio 3.18. Encuentre si existe la matriz inversa de las matrices planteadas en el ejercicio 3.17.

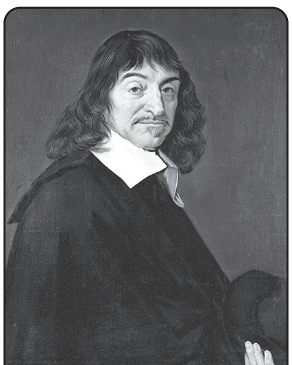
Matemáticas I

Unidad IV

Fundamentos de álgebra

- Lección 1: Ecuaciones de rectas
- Lección 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado en tres variables

Algo de historia



René Descartes
(1596 – 1650)

René Descartes fue un filósofo matemático y físico francés, nació el 31 de marzo de 1596, procedía de una familia de funcionarios, su padre era un consejero del Parlamento de Gran Bretaña, y su madre murió poco después de su nacimiento.

Descartes estuvo en una escuela jesuita (La Flèche en Anjou) donde estudió matemáticas y escolasticismo con el propósito de orientar la razón humana para comprender la doctrina cristiana, luego estudió derecho en la universidad, profesión que nunca ejerció.

Descartes hizo servicios militares, sin embargo su interés siempre estuvo centrado en los problemas de matemáticas y filosofía a lo que dedicó gran parte de su vida, trató de aplicar a la filosofía los procedimientos racionales, inductivos de la ciencia y concretamente de matemáticas.

Dentro de sus contribuciones a la matemática está la sistematización de la geometría analítica, contribuyó en la elaboración de la teoría de las ecuaciones, propuso el uso de las últimas letras del alfabeto para designar las cantidades desconocidas (variables) y las primeras letras para las conocidas (constantes), inventó el método de los exponentes para indicar las potencias de números (x^2), además formuló la regla conocida como la Ley de los Signos de Descartes, para descifrar el número de raíces negativas y positivas de cualquier ecuación algebraica.

René Descartes falleció el 11 de febrero de 1650 de una enfermedad respiratoria.

Fuente: http://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/597/Rene%20Descartes

Lección 1. Ecuaciones de rectas

Clase 1. La gráfica de la función de primer grado

Si para cada valor de x el valor de y está dado por la ecuación $y = mx + n$ donde $m \neq 0$, se dice que y es la función de primer grado de x.

m y n son constantes es decir no cambian sus valores.

Ejemplo 1.1. ¿Cuáles son funciones de primer grado de x?

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -3x^2 + 4x + 1$ c) $y = \sqrt{x+1}$

d) $y = 3$ e) $y = \frac{1}{x}$ f) $3x + 2y + 1 = 0$

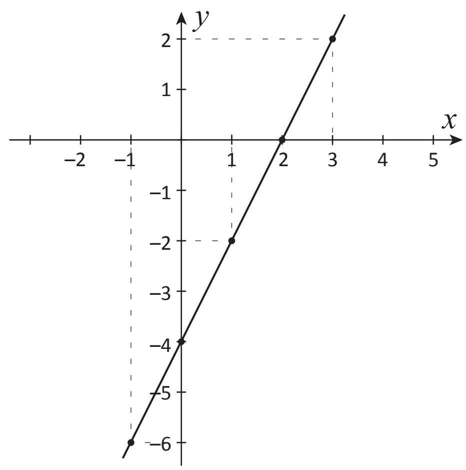
solución: a) y f)

El inciso f) es equivalente a $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.2. Dibuje la gráfica de la función $y = 2x - 4$

Solución:

x	-1	0	1	2	3
y	-6	-4	-2	0	2



La gráfica interseca el eje x en (2, 0) y el eje y en (0, –4)

La pendiente es la inclinación de la recta.

La gráfica de la función $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ es una recta.

A la expresión $y = mx + n$ se le llama **ecuación de** esta **recta**.

Al coeficiente m se le denomina **pendiente** de esta recta.

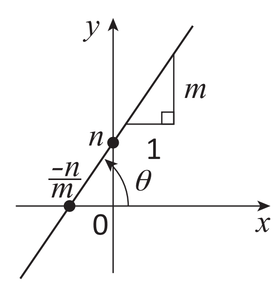
La recta cruza el eje y en el punto $(0, n)$.

A la constante n se le denomina **intercepto en y**.

La recta cruza el eje x en el punto $(-\frac{n}{m}, 0)$.

Al número $-\frac{n}{m}$ se le denomina **intercepto en x**.

Cuando el valor de x aumenta en 1, el valor de y aumenta en m.



$\tan\theta = m$

Ejercicio 1.1. Dibuje la recta $y = -2x + 4$.

Ejemplo 1.3. Encuentre la pendiente, el intercepto en y y el intercepto en x de la recta $y = -3x + 6$

Solución:
La pendiente es -3, el intercepto en y es 6 y el intercepto en x es $\frac{-6}{-3} = 2$.

Ejercicio 1.2. Encuentre la pendiente, el intercepto en x y el intercepto en y.
a) $y = 3x - 6$ b) $y = x + 5$ c) $y = -4x + 8$ d) $y = 5x + 7$

Ejemplo 1.4. Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es 3 y cuyo intercepto en y es 1

Solución: $y = 3x + 1$

Ejercicio 1.3. Encuentre las ecuaciones de las siguientes rectas.

	a)	b)	c)	d)
Pendiente	4	-3	5	$\frac{1}{2}$
Intercepto en y	2	1	-2	3

Ejemplo 1.5. Encuentre la ecuación de la recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto (3, 5).

Solución:
Como la pendiente es 2, la ecuación es $y = 2x + n$. Como el punto (3, 5) está en la recta, se tiene que $5 = 2(3) + n$, $n = -1$.
Por lo tanto $y = 2x - 1$ (Respuesta)

La ecuación de la recta cuya pendiente es m y pasa por el punto (a, b) es
$y - b = m(x - a)$

Ejercicio 1.4. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y que tiene la pendiente dada.

a) $(2, -1)$, la pendiente es 1

b) $(1, 3)$, la pendiente es 3

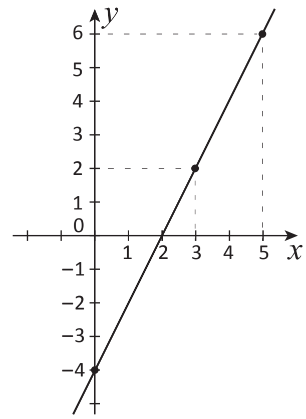
c) $(-2, 1)$, la pendiente es -3

c) $(-3, 0)$, la pendiente es -1

Clase 2. Ecuaciones de rectas

Ejemplo 1.6. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (5, 6).

[A]



Solución 1:
Sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta. Como dos puntos están en la recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación, por lo tanto

$$\begin{cases} 3m + n = 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 5m + n = 6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

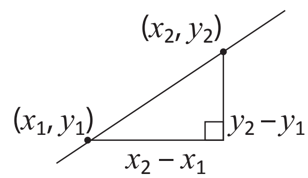
(2) – (1)

$$\begin{array}{r} 5m + n = 6 \\ -\ (3m + n = 2) \\ \hline 2m = 4 \\ m = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $m = 2$ en (1), se obtiene que $n = -4$
Respuesta $y = 2x - 4$

Nota: Del cálculo de arriba se obtiene lo siguiente.

> La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) donde $x_1 \neq x_2$ es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Solución 2:
La pendiente de la recta es $\dfrac{6-2}{5-3} = 2$.
Por lo tanto, la ecuación de la recta es $y = 2x + n$. Sustituyendo (3, 2), se tiene que $2 = 2(3) + n$, $n = -4$
Respuesta: $y = 2x - 4$

Solución 2 utiliza la nota.

Se puede sustituir (6, 5) también.

Ejercicio 1.5. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

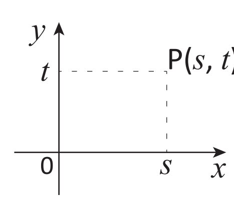
a) (1, 4), (3, 10) b) (1, 2), (3, 0)

c) (1, –3), (3, –1) d) (1, –1), (–1, 3)

Hay rectas que no son gráficas de funciones de primer grado.

[B]

Las coordenadas del punto.

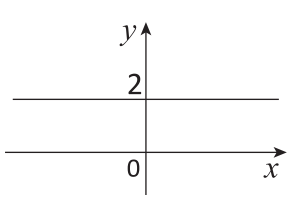


Ejemplo 1.7. Dibuje el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la siguiente ecuación.

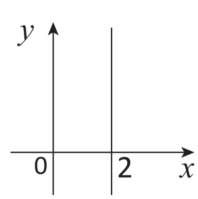
a) $y = 2$ b) $x = 2$

Solución

a)



b)



En a) del Ejemplo 1.7. la pendiente de la recta es 0.
En b) no se define la pendiente.

Ejercicio1.6. Encuentre la ecuación de la recta que satisface las siguientes condiciones.

a) La pendiente es 0, el intercepto en y es -1.

b) Paralela al eje x y que pasa por el punto (3, 1).

c) Paralela al eje y y el intercepto en x es 3.

d) Perpendicular al eje y y pasa por el punto $(-2, 1)$.

Ejercicio 1.7. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

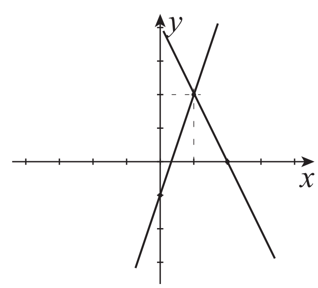
a) $(-3, 2)$, $(4, 2)$ b) (2, 1), (2, 5)

Clase 3. Intersección de dos rectas

Ejemplo 1.8. Encuentre las coordenadas del punto de intersección de las rectas $y = 3x - 1$ y $y = -2x + 4$.
Solución:
Que un punto esté en la intersección de dos rectas equivale a que sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones, es decir, son la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$ por lo tanto $x = 1$, $y = 2$
Respuesta (1, 2)

Punto de intersección ⟺ Solución del sistema de ecuaciones



Dos rectas no paralelas se intersecan en un punto.
"Encontrar el punto" quiere decir encontrar las coordenadas del punto.

Ejercicio 1.8. Encuentre el punto de intersección.

a) $y = 3x - 4$, $y = x - 2$ b) $y = -2x + 4$, $y = 2x - 8$

c) $y = -2x + 1$, $y = 3$ d) $y = 3x - 2$, $x = -1$

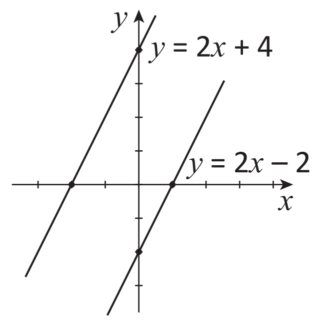
e) $x = 3$, $y = -2$

Ejemplo 1.9. Investigue si las rectas tienen puntos en común:
$y = 2x - 1, \quad y = 2x + 3$
Solución:
Se trata de resolver

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ Igualando y se tiene que $2x - 1 = 2x + 3$

Esto equivale a que $0 = 4$, que es imposible.

Que el sistema de ecuaciones no tenga soluciones equivale a que las rectas no tengan puntos en común. Las rectas son paralelas.



Dos rectas son paralelas.

Dadas las ecuaciones de dos rectas
$y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, igualando y se tiene que $mx + n = m'x + n'$.

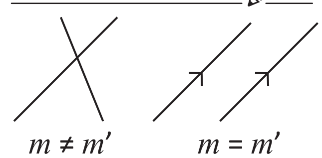
Si $m \neq m'$, como en el caso del ejemplo 1.8, estas rectas se intersecan en un punto.

Si $m = m'$, y $n \neq n'$, como en el caso del ejemplo 1.9, estas rectas son paralelas.

Si $m = m'$, y $n = n'$, las dos rectas son idénticas.

En resumen

> Sean $y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, dos rectas:
> Si $m \neq m'$, entonces estas rectas se intersecan en un punto.
> Si $m = m'$, y $n \neq n'$, entonces estas rectas son paralelas.



Ejercicio 1.9. Encuentre los grupos de rectas paralelas.
a) $y = 2x + 1$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = -2x - 5$

d) $y = 2x + 4$ e) $y = 4x - 2$ f) $y = 3x + 1$

g) $y = -3x - 2$

Ejemplo 1.10. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a $y = 3x - 1$ y pasa por el punto (2, 1).

"Encontrar la recta" quiere decir encontrar su ecuación.

Solución:
De la condición del paralelismo, se sabe que la pendiente es 3.
Por lo tanto, la ecuación es $y = 3x + n$. Sustituyendo (2, 1), se tiene que;
$1 = 3(2) + n, \quad n = -5$.
Respuesta: $y = 3x - 5$

Ejercicio 1.10. Encuentre la recta que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto indicado.

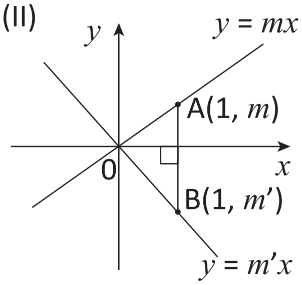
a) $y = 2x - 1$, (3, 2) b) $y = x + 3$, (1, 2)

c) $y = -3x + 1$, (1, 3) d) $y = -2x + 1$, (−2, 3)

Clase 4. Perpendicularidad de las rectas

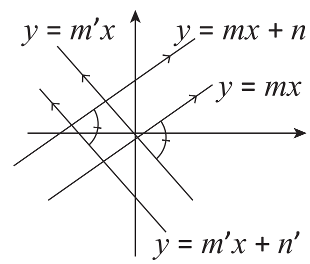
Dos rectas $y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, son perpendiculares si y sólo si $mm' = -1$

Demostración:
(I) $y = mx + n$ y $y = m'x + n'$, son perpendiculares $\Leftrightarrow$ $y = mx$ y $y = m'x$ son perpendiculares.
(II)



En el ΔOAB
el $\angle AOB = 90°$
$\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$
$\Leftrightarrow (1^2 + m^2) + (1^2 + m'^2) = (1 - 1)^2 + (m - m')^2$
$\Leftrightarrow 2mm' = -2$
$\Leftrightarrow mm' = -1$

Otra pareja de rectas perpendiculares es:
$x = a$ y $y = b$



Teorema de Pitágoras y su recíproco.

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$
$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Ejemplo 1.11. Investigue si las dos rectas son perpendiculares o no.

a) $y = 3x - 1$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$ b) $y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{2}x - 2$

Solución:

a) $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$. Son perpendiculares.

b) $2 \times \frac{1}{2} = 1$. No son perpendiculares.

Ejercicio 1.11. Encuentre las parejas de rectas perpendiculares.

a) $y = x + 3$ b) $y = -2x + 1$

c) $y = \frac{2}{3}x + 4$ d) $y = 2x + 1$

e) $y = \frac{1}{2}x + 5$ f) $y = -\frac{3}{2}x - 1$

g) $y = -x - 1$

Ejemplo 1.12. Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ y pasa por el punto (4, 1).
Solución:
Sea $y = mx + n$ la recta. Como es perpendicular a $y = 2x + 1$, se tiene que
$2m = -1, \quad m = -\frac{1}{2}$. Por lo que $y = -\frac{1}{2}x + n$.
Sustituyendo el punto (4, 1) en $y = -\frac{1}{2}x + n$, se obtiene $n = 3$.
Respuesta: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Ejercicio 1.12. Encuentre la recta perpendicular a la recta dada y que pasa por el punto indicado.
a) $y = 3x + 2$, (6, 1) b) $y = x - 1$, (−2, 3)
c) $y = \frac{1}{2}x + 5$, (3, −1) d) $y = \frac{2}{3}x + 4$, (−4, 5)

Clase 5. Sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables y sus gráficas

Ejemplo 1.13. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 & \ldots(1) \\ x - y - 3 = 0 & \ldots(2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 & \ldots(1) \\ 4x - 2y + 4 = 0 & \ldots(2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + y - 4 = 0 & \ldots(1) \\ 4x - 2y + 8 = 0 & \ldots(2) \end{cases}$

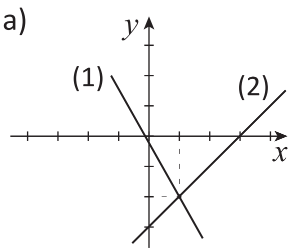
Solución:
a) $x = 1, \quad y = -2$

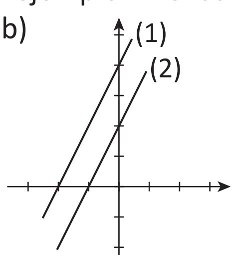
b) (1) x 2 $\quad 4x - 2y + 8 = 0$
(2) $\quad \underline{-(4x - 2y + 4 = 0)}$
$4 = 0$ Es imposible. Respuesta: No hay solución.

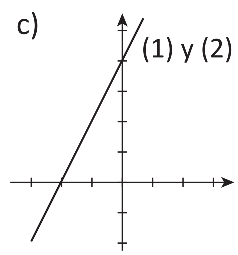
c) (1) x (−2) $4x - 2y + 8 = 0$ es igual a (2).
Por lo tanto, los valores de x y y que satisfacen (1), satisfacen también (2).
Respuesta: $x = s$, $y = 2s + 4$ (s número real)

Hay otras formas como ser
$x = \frac{1}{2}t - 2$, $y = t$

Las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 1.13. son;

a)


b)


c)


En resumen:

Si las rectas	Se intersecan en un punto	Son paralelas	Coinciden
Número de soluciones	1	0	infinitas

Ejemplo 1.14. Encuentre el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.

No es necesario solucionarlo.

a) $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ 6x+2y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ -6x+2y-4=0 \end{cases}$

Solución: Se convierten todas las ecuaciones a la forma de $y = mx + n$.

Sistema de ecuaciones	Gráficas	Número de soluciones
a) $\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=-3x-2 \end{cases}$	Paralelas	0
b) $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+2 \end{cases}$	Se intersecan	1
c) $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x+2 \end{cases}$	Coinciden	Infinitas

Ejercicio 1.13. Encuentre el número de solución.

a) $\begin{cases} 3x-y+3=0 \\ -6x+2y+4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-2y+2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ -2x+y+1=0 \end{cases}$

***Ejemplo 1.15.** Determine el valor de a de modo que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga solución.

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ (a+1)x+2y+1=0 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones no tiene solución cuando las rectas son paralelas.

Solución:

El sistema equivale a $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=-\dfrac{a+1}{2}x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Que no tiene solución equivale a que las rectas son paralelas y por lo tanto sus pendientes son iguales.

Hay que confirmar que las dos rectas son diferentes.

$3=-\dfrac{a+1}{2}$ y $1 \neq -\dfrac{1}{2}$. $a=-7$ (Respuesta)

***Ejercicio 1.14.** Determine el valor de a de modo que el sistema no tenga solución.

a) $\begin{cases} -2x-y-2=0 \\ 2ax-y+1=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y+1=0 \\ (a-1)x+y-2=0 \end{cases}$

Lección 2. Sistema de ecuaciones de primer grado en tres variables

Clase 1. Método de eliminación

Para encontrar los valores de las tres variables se necesitan tres ecuaciones.

Ejemplo 2.1. Resuelva.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=2 \;\dots(1) \\ -2x+y+z=5 \;\dots(2) \\ 2x+3y+2z=6 \;\dots(3) \end{cases}$$

Primero forme ecuaciones que contengan solo x y y.

Solución:

$$\begin{array}{lr} (1) & 3x+2y+z=2 \\ (2) & -(-2x+y+z=5) \\ \hline & 5x+y=-3 \;\dots(4) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} (1)\times 2 & 6x+4y+2z=4 \\ (3) & -(2x+3y+2z=6) \\ \hline & 4x+y=-2 \;\dots(5) \end{array}$$

De (4) y (5) se obtiene $x=-1$, $y=2$.
Sustituyéndolos en (1) se obtiene $z=1$

Respuesta: $x=-1$, $y=2$, $z=1$

Hay que elegir la variable que se va a eliminar según la forma de las ecuaciones.

En el método de eliminación: se busca reemplazar las ecuaciones originales del sistema en ecuaciones equivalentes, hasta llegar a un sistema de ecuaciones con una solución obvia.

Ejercicios 2.1. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2y+z=-6 \\ -2x-2y+z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y-z=3 \\ 2x-y+2z=3 \\ x+3y-3z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ x+3y+2z=3 \\ -2x+y+z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 2x+y+3z=0 \\ 3x+3y+2z=-7 \end{cases}$

Clase 2. Método de sustitución

Hay otra manera de obtener ecuaciones de dos variables.

Ejemplo 2.2. Resuelva.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \ \ldots(1) \\ 3x + 2y + 2z = 2 \ \ldots(2) \\ 2x - 3y + 3z = 2 \ \ldots(3) \end{cases}$$

Solución:
De (1) se tiene que $z = -2x + y - 2$ ….(4)
Sustituyendo (4) en (2) y (3), se obtiene

$3x + 2y + 2(-2x + y - 2) = 2.$ $\quad -x + 4y = 6$ …(5)

$2x - 3y + 3(-2x + y - 2) = 2,$ $\quad -4x = 8$ …(6)

De (5) y (6) se obtiene $x = -2,\quad y = 1$
Sustituyendo estos valores en (4), se obtiene $z = 3$.

Respuesta: $x = -2,\quad y = 1,\quad z = 3$

En el método de sustitución hay que despejar para una variable en una de las ecuaciones y sustituir este valor en las otras dos ecuaciones para formar un sistema de 2 ecuaciones en 2 variables y asi facilitar su solución.

Ejercicio 2.2. Resuelva.

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5 \\ -2x + 3y - 4z = 2 \\ 4x - y + 3z = 6 \end{cases}$

10

MATEMÁTICA I
Libro del Estudiante

TEMPLO ROSALILA

Constituye uno de los pocos ejemplos de policromía y escultura en estuco que se conservan del mundo maya. La iconografía representa una especie de culto al primer gobernante K'inich Yax K'uk Mo, o fundador de la dinastía de gobernantes de Copán. Construido en el 571 d.C. por el Gobernante 10. Rosalila consta de tres niveles. La fachada da al Oeste, en dirección al sol poniente, al mundo de los muertos. A los lados de la entrada hay un ave celestial con rasgos de quetzal y de guacamaya, de cuya boca emerge el rostro del sol: Kinich Ahau.

Fotografía: © Guni Matamoros.

República de Honduras
Secretaría de Educación