República de Honduras
Secretaría de Educación

LÓGICA SIMBÓLICA

Undécimo grado

11

Bachillerato en Ciencias y Humanidades

Educación Media

República de Honduras
Secretaria de Estado en el Despacho de Educación

Subsecretaría de Educación de Asuntos Técnicos Pedagógicos

Subsecretaría de Educación de Asuntos Administrativos y Financieros

Revisión y aprobación:
Dirección General de Desarrollo Profesional

Autora:
Alba Rosa González Sauceda

Diseño y diagramación:
Azael de Jesús Martínez Fúnez

El siguiente texto “Lógica Simbólica”, es un recurso, para el décimo grado de educación media en el área de Martemática.
Esta es una publicación de la Secretaría de Educación de Honduras.

República de Honduras
Secretaría de Educación

LÓGICA SIMBÓLICA

Undécimo grado

11

Bachillerato en Ciencias y Humanidades

Educación Media

Contenido

Contenido

Introducción

El libro que aquí se presenta tiene como propósito principal familiarizar al estudiante con el material y los procedimientos más elementales de la lógica. Constituye, en ese sentido, una introducción a ésta, tan elemental como el rigor y los objetivos mismos de precisión que la materia lo permiten.

Se ha tenido la intención de ofrecer con ello un texto que pueda ser estudiado enteramente por cualquier lector atento, con la suficiente paciencia como para hacer algunos de los ejercicios de que cada lección va acompañada. Por esta razón, tanto el profesor como el estudiante encontrarán en él un instrumento adecuado para adentrarse en estos temas.

Al compilarlo se ha considerado al principiante, en el sentido más estricto del término. En otras palabras: no se da por supuesta otra cosa que un manejo correcto del lenguaje y una normal competencia lingüística. Por esta razón, se asegura que este trabajo puede constituir un libro de texto adecuado, para un curso de introducción a la Lógica o Lógica Simbólica.

El profesor encontrará aquí una guía seria y accesible para la impartición de distintos temas básicos o, por lo menos, sugerencias que podrían apoyar y complementar considerablemente la presentación que haya elegido. Por su parte, el estudiante hallará en él una presentación breve, precisa y, a este nivel, completa de los diversos temas, acompañada, en cada caso, de ejemplos cuidadosamente seleccionados, teniendo, además, con los ejercicios propuestos, la posibilidad de comprobar constantemente sus avances.

El enfoque gradual del libro concede amplio espacio a las relaciones entre la argumentación y el lenguaje. La experiencia como profesora de lógica, me permite hacer la conexión en lo relativo entre el sentido que pueda tener una introducción de símbolos y, en general, de lenguaje formal, por una parte, y la evaluación y el manejo de argumentos en el lenguaje ordinario (o en el lenguaje poco menos que natural de muchas de las disciplinas).

Antes de dar inicio al desarrollo de los temas del curso, y en general, para toda actividad, es importante que nos interroguemos por el origen y propósito de dicho conocimiento, ¿Qué problemas buscó resolver el hombre mediante dicho conocimiento? ¿Qué preguntas vamos a contestar con el aprendizaje del curso? ¿Qué competencias se espera que el estudiante desarrolle? ¿Por qué se consideran importantes estas competencias? ¿Por qué, siendo yo un estudiante de bachillerato, debo tomar el curso de Lógica Simbólica? Entre las competencias que debe tener un estudiante, se destaca su capacidad para construir razonamientos deductivos e inductivos, tal que le permitan verificar hipótesis así como generar nuevas, una competencia necesaria, no sólo para la investigación científica, sino necesaria para actividades como proponer argumentos válidos en un ensayo o para debatir ideas.

Se considera que la lógica matemática acompañada de las competencias lingüísticas permite plantear las mejores soluciones a diferentes tipos de problemas. Al punto que son estas las competencias que son evaluadas por los centros educativos, para determinar el acceso a programas de educación superior.

La competencia lógico matemática no hace referencia exclusiva a operaciones con representaciones simbólicas y ejercicios complejos. En este curso se aprenderá cómo en nuestro lenguaje cotidiano hacemos uso de los razonamientos lógicos deductivos e inductivos, siguiendo unas estructuras básicas que nos permiten afirmar que un razonamiento es o no válido.

Ya Platón en la República nos propone que antes del estudio de una ciencia social como lo es la filosofía era necesaria la preparación de la mente por medio del estudio de la geometría euclidiana, en la cual el discípulo debía entrenarse haciendo demostraciones de teoremas de la geometría, demostraciones que sólo se logran siguiendo una secuencia lógica de pasos ordenados.

Hoy, muchas instituciones educativas exigen a sus aspirantes a cualquier programa académico, presentar pruebas de admisión que pretenden evaluar las competencias tanto lingüísticas como lógico matemáticas. Mediante estas evaluaciones, las instituciones pretenden elegir entre todos sus aspirantes a aquellos que se encuentren más preparados para aprender. Esto es para comprender y elaborar razonamientos lógicos deductivos e inductivos cada vez más complejos.

En este sentido, el curso de Lógica Simbólica es importante para mejorar en la interpretación y construcción de razonamientos lógicos presentes tanto en el lenguaje cotidiano como en todas las áreas especializadas del conocimiento.

La intención es que el estudiante pueda aprender este curso por sí mismo. En el curso de lógica simbólica, analizaremos diferentes expresiones, que nos permitirán aclarar la comprensión de las relaciones entre los conectivos lógicos usados en el lenguaje natural, partiendo para ello de una representación gráfica, a la par desarrollaremos las destrezas lógico matemáticas, dando solución a problemas como éste:

> *"De acuerdo con una encuesta virtual realizada a cincuenta estudiantes del Instituto Central Vicente Cáceres, los amantes de la música de Juanes son 15; mientras que los que únicamente gustan de la música de Shakira son 20, ¿Cuántos son fanáticos de los dos artistas si 10 de los encuestados, entre los 25 que no son fanáticos de Shakira, afirman ser fanáticos de Juanes?"*

Comprenderemos cómo trabajan los conectivos lógicos que usamos diariamente en nuestro leguaje y que pocas veces nos detenemos a analizar y a comprender, por ejemplo, nuestro amigo "Boole afirma que cuando gane su equipo predilecto hará fiesta", pasado un tiempo encontramos que Boole está festejando pero que su equipo predilecto ha perdido ¿Se está contradiciendo el amigo Boole con su afirmación inicial?, En este curso descubriremos y analizaremos el conectivo lógico que ha usado Boole en su afirmación para concluir sobre este asunto.

Identificar los conectivos lógicos, las premisas y comprender su función en el lenguaje nos permitirá diseñar frases cada vez más complejas sin que se pierda la coherencia en la construcción gramatical.

Posteriormente aprenderemos ha simplificar expresiones descifrar usando el lenguaje natural, para ello utilizaremos leyes expresadas por medio de símbolos. Por ejemplo, al expresar en lenguaje natural que "es falso que Agusto no miente"; por medio de la lógica aprendemos a llegar a la simplificación: "Agusto miente" mediante el Algebra de Boole, utilizando leyes lógicas básicas que nos permiten validar la simplificación hecha con un argumento más allá de la simple intuición.

Gracias al desarrollo informático un estudiante de psicología, puede implementar una función lógica en una hoja de cálculo como Excel, que le permita obtener en segundos el resultado de la aplicación de un Test psicológico a una población. En general, gracias a los principios básicos de la lógica se pueden implementar funciones de aplicación en todas las áreas del conocimiento.

Otra interesante aplicación de la lógica es en el proceso de validar nuestros argumentos. Por ejemplo, analicemos que puede concluirse de la siguiente afirmación: “si llueve hace frío”, posteriormente “ocurre que hace frío”, ¿es entonces correcto concluir que llueve?, Por medio de la lógica transformaremos esta expresión en lenguaje simbólico que posteriormente podremos analizar por medio de una tabla de verdad y descubrir en qué caso específico la conclusión puede no derivarse de sus premisas.

En el mundo de la argumentación siempre estamos utilizando unos principios lógicos básicos que estudiaremos en el curso de Lógica Simbólica, permitiéndonos mejorar en la construcción de argumentos más fuertes, basados en los cimientos de la misma.

UNIDAD

1

LECCIÓN 1:

Fundamentación de la Lógica

Clase 1
Sub Competencias:

- Reconocer los personajes de la historia que aportaron a la lógica.
- Realizar la clasificación de la lógica.
- Reconocer el propósito de la lógica.
- Determinar la diferencia entre lenguaje natural y artificial.

Conócete a ti mismo" ("*gnosei seauton*") es la frase que aparecía en el santuario del Dios Olímpico Apolo y que se atribuye a Tales de Mileto (639 a.c), quien es considerado como el primer representante de la filosofía occidental: tanto, así como para reconocérsele como el iniciador de la indagación racional sobre el universo, a Tales de Mileto se atribuye plantear explicaciones de la naturaleza sin hacer referencia a lo sobrenatural.

Es así, como los precursores de la filosofía, llamados los «*presocráticos*», representaron una innovación en el pensamiento, al tratar de explicar las cosas por sí mismas.

En el período Socrático, los filósofos pasarán de preocuparse por los temas de la naturaleza a ocuparse en el hombre. En este período aparecen los sofistas, quienes profundizan en el "*arte de discutir*", a ellos debemos lo que en la lógica se denomina un sofismo, argumentos que parecen válidos pero que realmente no lo son.

Originalmente *logos* significa palabra o discurso, por lo que en un principio se definió la lógica como la rama de la gramática que se ocupaba de ciertas formas de lenguaje.

La lógica se puede clasificar como:

1. *Lógica tradicional o no formal*
2. *Lógica simbólica o formal*

En la lógica no formal o lógica tradicional se considera la destreza, para interpretar y distinguir un razonamiento correcto de un razonamiento incorrecto, como un producto de la experiencia humana obtenida en la relación con el mundo circundante. En palabras de Galindo (1999), se consideran los procesos psicobiológicos del pensamiento lógico.

Como la palabra es la expresión, o manifestación del pensamiento y el pensamiento racional es la base de la filosofía, puede decirse en general, que la lógica es la ciencia del pensamiento racional; es importante aclarar que la lógica no se ocupa del contenido de los pensamientos sino de la manera o forma de los pensamientos.

En respuesta a la necesidad de construir argumentos, para defender o refutar pensamientos de los demás, Aristóteles, considerado por los griegos, "El padre de la lógica", creo métodos sistemáticos para analizar y evaluar dichos argumentos, para lo cual desarrolló la lógica proposicional estableciendo procedimientos para determinar la verdad o falsedad de proposiciones compuestas.

El gran matemático Gottfried Leibniz en 1646 fue el primero en intentar reformar la lógica clásica, planteando que la dependencia lógica entre proposiciones es demostrada reduciendo argumentos complejos en simples, para lo cual propuso representar el conocimiento, en una forma que pudiera ser usado por un razonamiento mecánico y a éste esquema (lógica simbólica) lo llamó una característica universal.

El proceso de la lógica continuó en el siglo XIX. En 1847 el matemático inglés George Boole en compañía de Augustus de Morgan hizo notar el parentesco entre las operaciones lógicas con las matemáticas, pues a partir de los operadores aritméticos de adición, multiplicación y sustracción crearon los operadores lógicos equivalentes de unión, intersección y negación; además formularon los principios del razonamiento simbólico y el análisis lógico. A Boole se le atribuye la invención de las tablas de verdad para comprobar la veracidad de proposiciones compuestas.

Por su origen y desarrollo natural, han sido reconocidos dos tipos básicos de lenguajes: los lenguajes naturales y los lenguajes formales o artificiales.

La lógica como ciencia constituye la lógica formal o simbólica, la cual se encarga de investigar, desarrollar y establecer los principios fundamentales que siguen la validez de la inferencia; es considerada como uno de los sistemas mediante el cual se llega a formas puras y rigurosas.

En el pensamiento simbólico, las palabras se manipulan, según las reglas establecidas, como si fueran simples signos sin preocuparse por su sentido.

De allí, que afirmemos que la lógica se ocupa de la forma de los pensamientos y no de su contenido.

Lenguajes naturales y artificiales

Podemos considerar el lenguaje como un sistema de signos que expresan ideas y que se utiliza para establecer comunicación. El hombre se comunica y participa de este proceso mediante el lenguaje natural humano; sin lenguaje, o con un lenguaje rudimentario, el hombre estaría limitado socialmente.

El lenguaje natural nace de una organización espontánea de las capacidades lingüísticas de una comunidad, y se encuentra dotado de gran cantidad de signos, sobresaliendo las vocales; mientras que el lenguaje artificial se genera cuando una o más personas deciden usar signos especiales, para obtener mejor comunicación, estableciendo reglas que faciliten la operatividad entre los signos; por ejemplo, el lenguaje de la matemática, de la física, química y de otras ciencias.

Este tipo de lenguaje posee gran cantidad de signos y nace de la exigencia de conservar información por lo que se le conoce como formas de comunicación, que pueden ser escritas por medio de íconos, o lenguajes analógicos y digitales.

Ejercicio 1

"Amigo estudiante, recuerda que la motivación es una de las tres condiciones para lograr un aprendizaje significativo", conteste las preguntas siguientes:

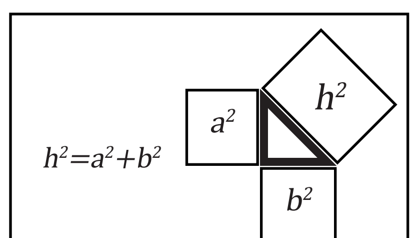
1. ¿Cómo se puede definir la lógica?
2. ¿Elabore un resumen sintético de la historia de la lógica?
3. Mediante un cuadro sinóptico, clasifique la lógica con sus características fundamentales.

Lenguaje Natural

Sócrates. Detalle de La escuela de Atenas - Fresco de Raffaello Sanzio (1511). Tomado de Lógica Matemática, Georffrey Acevedo González

Lenguaje Artificial

Pitágoras (582 a.c).. Detalle. La escuela de Atenas - fresco de Raffaello Sanzio (1511). Tomado de Lógica Matemática, Georffrey Acevedo González



Teorema de Pitágoras

Clase 2
Sub Competencias:

- Realizar la clasificación de la lógica.
- Reconocer el propósito de la lógica.
- Determinar la diferencia entre lenguaje natural y artificial.

Lógica y Linguistica

Por su origen y desarrollo natural, han sido reconocidos dos tipos básicos de lenguajes: los lenguajes naturales y los lenguajes formales o artificiales.

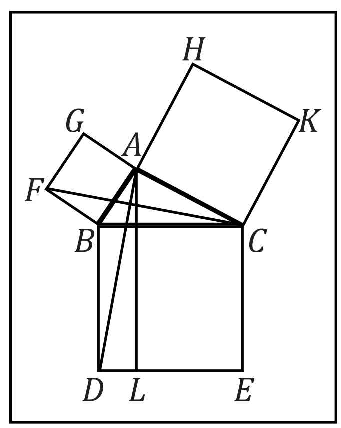
Los lenguajes naturales no se establecieron a través de ninguna teoría, entre ellos están el español, el francés, el inglés, etc. Las teorías y gramáticas de lenguajes naturales, fueron establecidas a posteriori, es decir después de que el lenguaje ya había madurado.

Los lenguajes formales como las matemáticas y la lógica, fueron desarrollados, generalmente, a partir del establecimiento de una teoría, la cual da las bases para que a través de dichos lenguajes se pueda desarrollar la misma teoría.

Los lenguajes naturales y formales tienen puntos en común, en principio, se tiene la existencia de un conjunto finito llamado alfabeto, el cual está constituido de símbolos simples llamados comúnmente letras. En los lenguajes naturales se tienen como ejemplos los alfabetos: latino, griego y árabe-persa, entre otros. En los formales como la lógica se tiene el léxico del cálculo proposicional y de predicados.

Lenguaje artificial

Euclides. Padre de la Geometría. Detalle. La escuela de Atenas - fresco de Raffaello Sanzio (1511). Tomado de Lógica Matemática Georffrey Acevedo González



Teorema de Pitágoras

En los sistemas formales los enunciados del lenguaje consisten en una lista de símbolos, (lógicos o matemáticos) sujetos a diversas interpretaciones. En un lenguaje formal, las palabras y las oraciones están perfectamente definidas, una palabra mantiene el mismo significado prescindiendo del contexto o de su uso.

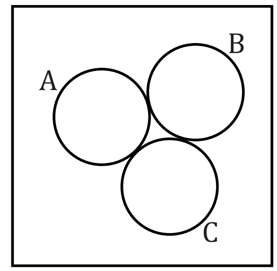
Los lenguajes formales son, por esto, necesariamente exentos de cualquier componente semántico fuera de sus operadores y relaciones, y es gracias a esta ausencia de significado especial, que los lenguajes formales pueden ser usados para modelar una teoría de la ingeniería de sistemas, mecánica, eléctrica, entre otras.

La función del signo consiste en comunicar ideas por medio de mensajes, estos signos pueden ser naturales: el humo (significa fuego), las nubes (indicio de lluvia); o artificiales (símbolos): bandera, escudo; o analógicos (icónicos): fotografías, esquemas, etc.

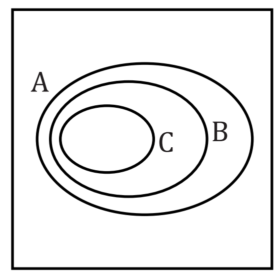
El signo es el vehículo de toda comunicación y pensamiento. Sus características están determinadas por el lugar que el signo ocupa en el sistema y por sus relaciones con los demás signos de dicho sistema. La función esencial de los códigos es evitar toda confusión entre el signo y el mensaje.

Si los signos se encuentran en una relación lógica de exclusión, de inclusión o de intersección, se pueden presentar tres tipos de códigos:

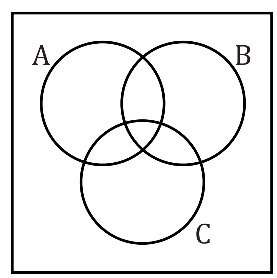
Exclusión:



Inclusión:



Intersección:



El emisor debe codificar el mensaje de tal forma que cuando el receptor reciba el mensaje y lo decodifique pueda reconstruir su sentido a partir de los signos y de las relaciones existentes entre ellos.

Resumen

La lógica se clasifica en:

- **Tradicional o no formal:** son los procesos psicobiológicos del pensamiento lógico y métodos de inferencia, que permiten interpretar y distinguir el razonamiento correcto del incorrecto, mediante la experiencia humana, ya sea por el conocimiento o por la observación de su entorno.

- **Formal o simbólica:** es la encargada de investigar, desarrollar y establecer reglas de inferencia, que conducen a formas puras y rigurosas de pensamiento. La lógica simbólica, manipula las palabras como signos, sin tener en cuenta su sentido.

La lógica pretende que sus razonamientos se caractericen por:

- **Precisión:** mediante el uso de signos.

- **Claridad:** en la medida que el usuario se familiariza con los elementos básicos de un argumento lógico en su forma (representación simbólica) y su significado.

- **Generalidad:** mediante el lenguaje simbólico artificial, el usuario, por una parte simplifica argumentos lógicos complicados y por otra parte, establece reglas que le permiten generalizar conceptos e incrementar la fiabilidad con que se aplica el conocimiento.

Lenguaje:
Sistema de signos que expresan ideas y se utilizan para establecer comunicación.

Lenguaje natural:
Nace de las capacidades lingüísticas de una comunidad.

Lenguaje artificial:
Es aquel que utiliza signos para obtener una comunicación más precisa y clara.

Ejercicio 2

Conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Que es lenguaje natural?
2. ¿Qué es lenguaje artificial?
3. ¿Que tienen en común el lenguaje natural y artificial?
4. ¿Que son los signos y cuál es su función?

UNIDAD

2

LECCIÓN 1:

Proposiciones Simples y Compuestas

Clase 1
Sub Competencias:

- Definir proposiciones simples.
- Identificar proposiciones simples y compuestas.
- Construir proposiciones simples y compuestas reconociendo el valor de verdad.
- Entender el verdadero significado de cada oración que se propone.

__La lógica__ se ocupa del razonamiento a partir de las premisas las cuales son proposiciones que dan la pauta para el proceso deductivo en inductivo

Proposiciones Lógicas

A menudo se nos presentan frases como:

- "Honduras está en América"
- "4 es un número impar"
- "El elefante es un ave"
- "Los perros ladran"

En nuestro diario vivir se le conocen como oraciones o enunciados, en matemática se le llama ***proposiciones lógicas.***

Proposición Lógica: es un enunciado que se califica como falso o verdadero pero no ambos a la vez.

Valor de Verdad: llamaremos valor verdadero o de verdad de una proposición a su veracidad o falsedad. El valor de verdad de una proposición verdadera es verdad y el de una proposición falsa es falso.

__La lógica__ es un método de razonamiento que no acepta conclusiones erróneas.

__Inferir__ es un proceso de unir ideas para llegar a conclusiones verdaderas a partir de proposiciones verdaderas
Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, p, q, r . . . dos puntos y la proposición propiamente dicha.

Los elementos fundamentales de la lógica son las proposiciones. Por ello, las oraciones que no son falsas ni verdaderas, las que son falsas y verdaderas al mismo tiempo, o las que demuestran algún tipo de imprecisión (carecen de sentido), no son objeto de estudio de la lógica. Los enunciados a, b, c, d y p pueden tomar un valor de falso o verdadero, por lo tanto, son proposiciones válidas.

Ejemplo 1

Encontrar el valor de verdad de las propoicones si lo son…

Proposiciones	Valor de verdad
a : "Las rosas tienen espina"	verdadero (v)
b : "La gallina ponen huevos"	verdadero (v)
c : "España es un continente"	falso (f)
d : "La ballena es un pez"	falso (f)
p : "2 es un número primo"	verdadero (v)
q : "Hermosa tarde"	No es proposición lógica

q no es una proposición válida ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, es algo incierto.

Oraciones que no son proposiciones

1. Lava el auto, por favor.
2. Hola, ¿cómo estás?
3. ¡Apúrate!
4. La conceptualización cambia lo absurdo en azul.
5. $x + 5 = 9$.
6. ¡Mañana se acabará el mundo!

Las primeras cuatro oraciones no son proposiciones porque no se puede establecer su valor de verdad. Generalmente las oraciones imperativas, exclamativas e interrogativas no son proposiciones.

El quinto enunciado no es una proposición, ya que no es preciso y por lo tanto no se puede establecer su valor de verdad.

La sexta oración no es una proposición porque su valor de verdad no se puede determinar.

Ejercicio 1

Establece si los siguientes enunciados son proposiciones lógicas y si lo son establece su valor de verdad.

p. México se encuentra en Europa ( )
q. $15 - 6 = 9$ ( )
r. $2x - 3 > 7$ ( )
s. Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año ( )
t. Hola ¿cómo estás? ( )
u. ¡Cómete esa fruta! ( )

Ejemplo 2

Establece el valor de verdad de cada proposición de las siguientes proposicones simples:

p. "El cielo es azul" ( )
q. "2 es un número impar" ( )

Nomenclatura de p y q
Proposiciones Compuestas

También denominadas moleculares, son aquellas que están formadas por dos o más proposiciones simples unidas por los operadores lógicos.

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen junto con la forma en que están conectadas.

Ejemplo 3

Son ejemplos de proposicones compuestas las siguientes:

a. "Fui al banco, pero el banco estaba cerrado"
b. "Los lectores de este libro son jóvenes o universitarios"
c. "Si el miércoles próximo me saco la lotería entonces te regalaré un auto"
d. "8 es un número par y 5 es número primo"
e. "Si un volcán está en El Salvador entonces está en América"
f. "8 es un número par si y solo si es divisible por 2"

Ejercicio 2

a. Indica si las siguientes proposiciones son simples(s) o compuestas(c):

1. "Ana come pizza y bebe refresco", ¿es una proposición? (   )
2. "Ella no nada muy rápido", es una proposición. (   )
3. "San Pedro Sula no está al norte de Tegucigalpa y no hace frío", es una proposición. (   )
4. $7 + 3 = 10$ es una proposición. (   )
5. $2x^2 - 1 = 0$ es una proposición. (   )

b. Elabora tres proposiciones simples y asígnales una letra.

1. ____
2. ____
3. ____

c. Elabora tres proposiciones compuestos y asígnales una letra.

1. ____
2. ____
3. ____

d. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones? En caso que sea una proposición diga si es verdadera (v) o falsa (f)

1. $5 + 2 = 7$ (   )
2. $24 < 32$ (   )
3. El Presidente actuó en contra de la Ley (   )
4. Tu voto es tu opinión (   )
5. ¿Te duele? (   )
6. Me duele (   )
7. La tierra es plana (   )
8. $-17 + 15 = 2$ (   )
9. $x > y - 9$ (   )
10. El Junior será el próximo campeón de Colombia (   )
11. Buenos días (   )
12. Hoy es lunes (   )
13. Hace calor (   )
14. ¿Santa Lucía es más bonita que Valle de Ángeles? (   )

LECCIÓN 2

Conectivos Lógicos: Negación

Clase 1
Sub Competencias:

- Construir proposiciones simples y compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados.
- Entender el verdadero significado de cada proposición que se propone.
- Construir tablas de verdad de proposiciones compuestas
- Establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados.

Analicemos las siguientes proposiciones:

p: "La Matemática Discreta es mi asignatura preferida y Mozart fue un gran compositor".

q: "Él es inteligente o estudia todos los días".

¿Qué tipo de proposiciones son *p* y *q* ?

p: es una proposición compuesta, y está formada por las proposiciones simples: "La Matemática Discreta es mi asignatura preferida" y "Mozart fue un gran compositor".

q: es una proposición compuesta formada por dos proposiciones: "Él es inteligente" o "Él estudia todos los días".

Si observamos las proposiciones compuestas están conectados por "*y*" y "*o*" a estos conectores se le llaman conectivos lógicos.

Conectivos Lógicos

Existen conectivos u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas, es decir, formadas por varias proposiciones. Los operadores o conectores básicos son: y , o, no, entonces, si y solo si

*Surge entonces la necesidad de definir los nexos de estas proposiciones a los cuales se denominan **conectores** u **operadores lógicos**.*

Gramaticalmente, estos nexos, en su mayoría, son denominados partes invariables de la oración.

*Si observamos las porposiciones del ejemplo 2, podemos discriminar que porposiciones simples estan unidas por conectivos lógicos **y, o, si entonces si**, **si sólo si**, por lo que son porposiciones compuestas **a, b, d** y **p**.*

Cada conectivo se le ha asignado convencionalmente un símbolo así que debemos de saberlos identificar correctamento para su uso adecuado.

Ejemplo 1

Las siguientes proposiciones estan unidad por conectores lógicos:

a. "8 es número par y 5 es número primo"
b. "China está en Asia o Colombia está en América"
c. "Si un volcán está en El Salvador, entonces está en América"
d. "8 es número par si y sólo si es divisible por 2"

En el siguiente cuadro se muestran los conectivos lógicos de las proposiciones compuestas con su respectivo símbolo.

Nombre	Conectivo lógico	Símbolo
Negación	No	$\sim$
Disyunción	O	$\vee$
Conjunción	Y	$\wedge$
Implicación Condicional	Entonces	$\Rightarrow$
Doble implicación, bicondicional	Si y sólo si	$\Leftrightarrow$

Conectivo Lógico Negación

Este operador lógico cambia el valor de verdad de una proposición: si a es una proposición verdadera, $\sim a$ es falsa; si a es una proposición falsa, $\sim a$ es verdadera.

Algunos textos utilizan "$\neg$" para indicar negación.

Ejemplo 2

Si se tiene la proposición:

a: "Tengo un billete de cinco lempiras".

La negación de a es:

~a: "No tengo un billete de cinco lempiras".

Si se tiene la proposición:

a: No quiero hacer el viaje.

La negación de a es:

~a: Quiero hacer el viaje.

Negación

Su función es negar la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador "no", se obtendrá su negación (falso) y viceversa.

La negación se presenta con los términos gramaticales: "no", "ni", "no es verdad que", "no es cierto que".

En lenguaje natural el negador es la negación que se representa usualmente con las palabras: "ningún" antes del sujeto de la proposición;

Ejemplo 3

p: ”El pájaro es un animal racional”
∼p: “Ningún” pájaro es un animal racional
q: “Fernando viajará a Italia”
∼q: “Fernando “no” viajará a Italia "
r: “María ha visitado las playas de Honduras”
∼r: María “nunca” ha visitado las playas de Honduras

Tablas de Verdad

En la tabla de verdad de una proposición compuesta p se enumera todas las posibles combinaciones de los valores de verdad para las proposiciones.

p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

Comenzaremos con la tabla de verdad para la negación ∼ .
Es claro que $\sim p$ debe ser verdadera exactamente cuándo p no lo es.

La Negación

Sea p una proposición, la negación de p, representada simbólicamente por $\sim p$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente de tabla de verdad:

Tabla de verdad de la negación

p	$\sim p$
v	f
f	v

“no” antes del verbo de la proposición; o, “nunca” antes del verbo de la proposición,

En los ejemplo 3 y 4 podemos observar que a partir de proposiciones dadas se pueden negar con culquiera de los términos antes mencionados.

El ejemplo que se presenta hay dos proposiciones a las que no se les estableció su valor de verdad, para construir la tabla de verdad, se consideran dos valores verdaderos y dos falsos como se indica en la tabla. Lo anterior es una convención que siempre se debe tener en cuenta.

Ejemplo 4

Si se tiene la proposición:
p: Tengo un billete de cien lempiras
Si el valor de verdad de p es verdadero, la negación de p es:
∼p: No tengo un billete de cien lempiras;
El valor de verdad de $\sim p$ es falso.

p	$\sim p$
v	f

Como solo tenemos una proposición solo se consideran dos valores de verdad verdadero y falso.

Este operador lógico cambia el valor de verdad de una proposición: si p es una proposición verdadera, ∼p es falsa; si p es una proposición falsa, ∼p es verdadera.

Ejemplo 5

Si se tiene la proposición:
q: Quiero hacer el viaje, si el valor de verdad de q es falso, la negación de q es:
∼q: No quiero hacer el viaje.
El valor de verdad de $\sim q$, es verdadero

q	$\sim q$
f	v

Como se nos da en valor de verdad de cada proposición sólo se analiza su caso particular.

Ejercicio 1

a. Identifique el conectivo lógico que se utiliza en las siguientes proposiciones compuestas.

1. "No te encontré en tu casa" ( )
2. Fui al banco y estaba cerrado ( )
3. Tengo una moneda de cinco centavos o una de diez centavos ( )
4. El carro de Juan o es azul o es negro ( )
5. Si me gano la lotería, entonces me compro una casa ( )
6. Estudio en la UPNFM si y sólo si me esfuerzo ( )

b. Sean las siguientes proposiciones:

p. "España está en Europa"

q. "Japón está en Asia"

Escribe las siguientes proposiciones:

a. $p \wedge q$

b. $p \wedge \sim q$

c. $\sim p$

d. $\sim q$

e. $\sim p \wedge q$

f. $\sim p \wedge \sim q$

g. $\sim (p \wedge q)$

c. Dadas las siguiente proposiciones elabore la tabla de verdad de la negación de cada una de ellas.

1. La matemática es la madre de todas las ciencias
2. Honduras con la mejor democracia en América Latina
3. El hombre no es el único animal racional
4. No es cierto que todas las aves vuelan
5. No hay nadie en casa

LECCIÓN 2

Conectivos Lógicos y Tablas de Verdad

Clase 2
Sub Competencias:

- Representar simbólicamente proposiciones compuestas correspondiente que contenga proposiciones simples y operadores lógicos.
- Elaborar correctamente tablas de verdad.

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, además de las leyes lógicas podemos elaborar la correspondiente tabla de verdad; para tal fin y mediante el siguiente ejemplo se enuncian los pasos a seguir:

Paso 1:
Construir la tabla de verdad para la proposición $\sim p, q$, identificar las proposiciones simples presentes en el razonamiento lógico: p, q.

Paso 2:
De acuerdo al número total de proposiciones simples se determina la cantidad de combinaciones posibles entre los valores de verdad de las proposiciones simples.

El ejercicio propuesto tiene dos proposiciones simples p y q, luego, las combinaciones posibles de los valores de verdad serán:

- que $p = v$ y que $q = f$
- que $p = v$ y que $q = v$
- que $p = f$ y que $q = v$
- que $p = f$ y que $q = f$

Es decir que en el caso de tener dos (2) proposiciones simples, sólo hay cuatro (4) casos posibles:

p	q
v	v
v	f
f	v
f	f

Para encontrar el valor de vedad de un proposición compuesta podemos hacer uso de laspropiedades del álgebra de proposiciones o las tablas de verdad.

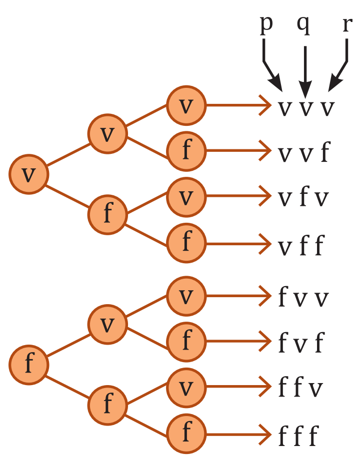
¿Cuántos casos posibles tendremos para la proposición compuesta que contenga *(p∧q)∨r*:

El primer paso será identificar el número de proposiciones simples: *p, q, r*. Si lo analizamos detenidamente, hay dos posibilidades para la ***p*** (v, f), también hay dos posibilidades para la ***q*** (v, f) y dos posibilidades para la ***r*** (v, f):

Luego, el número de combinaciones posibles será de:
$2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 2^3 = 8$

Esta conclusión nos permite encontrar una fórmula para calcular el número de combinaciones posibles de acuerdo al número de variables lógicas o letras proposicionales involucradas en la fórmula proposicional: 2^n.

Para construir una tabla de verdad de proposiciones compuestas las posibles combinaciones dependeran de la cantidad de porposiciones simples que contenga la proposición compuesta.



Aunque lo determinante en el análisis de la tabla de verdad es que se encuentren todas las combinaciones posibles y no el orden en que éstas sean analizadas, el orden es un factor determinante para evitar casos repetidos en el momento de construir la tabla de verdad.

Una convención es iniciar por el caso en que todas las proposiciones simples sean verdaderas, terminando con el caso en el que todas las proposiciones simples son falsas.

Para lograrlo, en la primera columna de izquierda a derecha iniciamos por asignar grupos de valores de verdad iguales consecutivos, en la segunda columna asignamos grupos de valores de verdad iguales consecutivos, en la tercera columna asignamos grupos de valores de verdad iguales consecutivos hasta obtener en la última columna valores de verdad intercalados.

De esta manera, una función lógica con 4 letras proposicionales tendrá 16 casos posibles, una función lógica con 5 letras proposicionales tendrá 32 casos posibles, una función lógica con 6 letras proposicionales tendrá 64, una función lógica con 7 letras proposicionales tendrá 128, una función lógica con 8 letras proposicionales tendrá 256, una función lógica con 9 letras proposicionales tendrá 512...

De esta manera, para *n = 3* asignaremos grupos de 4 valores de verdad (8/2) valores de verdad iguales para la primera columna, la mitad de este valor (2) para la segunda e intercalados (1) para la tercera:
Procedemos a llenar la tabla:

p	*q*	*r*
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

Igualmente, para construir una tabla de verdad de 4 proposiciones simples partimos asignado 8 valores verdaderos y 8 falsos, para la segunda columna asignaremos de a 4 valores de verdad, para la tercera de a 2 y para la cuarta columna de a 1.

Sin importar de que formula proposicional se trate, si el número de proposiciones simples es igual, la combinación de los posibles casos de verdad, en la tabla, es la misma.

Si elaboramos la tabla de verdad de proposiciones que contengan p , q y $2^n = 2^2 = 4$

$2^n \div 2$ valores de verdad iguales consecutivos, en la primera columna asignamos grupos de valores de verdad iguales consecutivos, en la segunda $2^n \div 4$

p	*q*
v	v
v	f
f	v
f	f

De esta manera, para ***n = 2*** asignaremos grupos de 2 valores de verdad (4/2) valores de verdad iguales para la primera columna, e intercalados (1) para la segunda.

Ejercicio 1

Elabora tablas de verdad para:

1. S
2. T y U
3. R, V y U

LECCIÓN 2

Conectivos Lógicos: Conjunción

Clase 3
Sub Competencias:

- Construir proposiciones simples y compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados.
- Entender el verdadero significado de cada proposición que se propone.

Conjunción

En lenguaje natural el conjuntor es la conjunción copulativa “y”, la cual establece una relación de unión entre las proposiciones, también cumplen esa función las siguientes palabras: “pero”, “aunque” y “sin embargo”.

En español, la conjunción copulativa se presenta con los términos gramaticales: “y”, “pero”, “mas” y signos de puntuación como: la coma, el punto y el punto y coma.

Ejemplo 1

Sean las proposiciones:
p: “4 es número par”
q: “4 es número natural”,
La conjunción entre las proposiciones es:
$p \wedge q$: “4 es número par y es número natural”

Ejemplo 2

p: "Alejandro quería estudiar"
q: "olvidó sus libros"
$p \wedge q$: "Alejandro quería estudiar", "pero" "olvidó sus libros"

r: "Roberto construyó la casa"
s: "no se ajustó a todo lo indicado en el plano”
$r \wedge s$: "Roberto construyó la casa",
"aunque" no se ajustó a todo lo indicado en el plano”

t: "Miguel nunca fue un buen estudiante"
u: "en el ejercicio profesional es brillante”
$t \wedge u$: "Miguel nunca fue un buen estudiante", "sin embargo" "en el ejercicio profesional es brillante"

Debemos identificar los terminos que se interpretan como "y" pues en muchas oraciones como se muestra en el ejemplo 2 pudiesen presentar alguna dificultad al momento de querer traducir la porposición compuesta.

Ejemplo 3

Sean las proposiciones:

p: " $x \leq 8, x \in Z$ "

$q \wedge s$: "2 es divisor de 6 y es primo"

$r \wedge t$: "8 es número impar y es compuesto"

La Negación entre las proposiciones es:

$\sim p$: "$x \nleq 8, x \in Z$" o "$x > 8, x \in Z$"

$\sim (q \wedge s)$: "No es verdad que 2 es divisor de 6 y es primo"

$\sim (r \wedge t)$: "No es verdad que 8 es número impar y es compuesto"

Tabla de verdad de la conjunción:

Sean p y q proposiciones, la conjunción entre p y q, representada simbólicamente por $p \wedge q$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual la proposición resultante será verdadera solamente cuando el valor de verdad de ambas proposiciones es verdadero, y si una es falsa la proposición compuesta es falsa.

Ludwing Wittegenstein (Viena 1888-1951), nacionalizado, británico en 1938. Estudió ingeniería mecánica en Berlin, La necesidad de entender más las matemáticas lo llevó a estudiar sus fundamentos. Estudió Lógica matemática en Cambridge. Escribió su primer gran trabajo de lógica. Tractatus lógico-philosophicus, durante la primera guerra mundial, es quien ideó la utilización de las tablas de verdad.

Ejemplo 4

Se tienen las proposiciones:

p: Obtengo buenas notas (v)

q: Gano una beca (v)

La conjunción entre p y q es:

$p \wedge q$: Obtengo buenas notas y gano una beca

Si construimos la tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
v	v	v

En este caso se consideran solamente los valores de verdad asignados a cada proposición.

Ejemplo 5

La proposición $p \wedge q$ es verdadera.

La conjunción anterior será verdadera solo en el caso que p sea verdadera y q sea verdadera.

Si se tienen las proposiciones:

r: Trabajo mucho valor de verdad (v)

s: Recibo un bajo sueldo valor de verdad (f)

$r \wedge s$: Trabajo mucho pero recibo un bajo sueldo.

La tabla de verdad de la proposición anterior:

r	s	$r \wedge s$
v	f	f

La proposición $r \wedge s$ es falsa.

En este caso se consideran solamente los valores de verdad asignados a cada proposición.

Ejercicio 1

1. Escriba la proposición compuesta e indique su valor de verdad si:

r: Francisco Morazán era hondureño.
s: Francisco Morazán lideró la libertad de las hondurenos.
$r \wedge s$
p: La tierra es redonda.
q: La tierra es achatada en los polos.
$p \wedge q$
p: La ballena tiene branquias.
s: La ballena es un mamífero.
$p \wedge s$
p: La montaña de Celaque pertenece al departamento de Lempira.
s: La montaña de Celaque no está afectada por el cambio climatico.
$p \wedge s$
p: La evolución tecnológica ha retrasado la evolución del hombre.
s: La evolución tecnológica no aporta a la inteligencia del hombre.
$p \wedge s$

2. Construye una tabla de verdad y determina el valor de verdad de las proposiciones siguientes:
   a. 3 es divisor de 15 y 3 es múltiplo de 6
   b. 15 no es múltiplo de 3 y 2 es primo
   c. 2 es un número par y 5 es divisor de 15
   d. La víbora es un réptil y el canario no es un ave
   e. 10 es múltiplo de 3 y 9 es primo
   f. La vaca es un mamífero y La gallina un ave
   g. 5 es impar y 24 es múltiplo de 4

LECCIÓN 2

Conectivos Lógicos: Disyunción

Clase 4
Sub Competencias:

- Construir proposiciones simples y compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados.
- Establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados.
- Elaborar la tabla de verdad de la disyunción.

Continuación de Conectivos Lógico

Sean las proposiciones:

a: "El tucán es un ave"
b: "El león es un mamífero"

La proposición compuesta:

"El tucán es un ave o el león es un mamífero"
¿Cuál es el conector lógico que une esta proposición compuesta?
La respuesta es la palabra "o" que llamaremos "*Disyunción*" $a \vee b$

Además de los conectivos estdiados podemos tener frases que utilicen los otros conectivos mostrados en la clase 3.

Disyunción

Sean a y b proposiciones, la disyunción entre a y b, representada simbólicamente por $a \vee b$, es una nueva proposición este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual la proposición resultante será falsa solamente cuando el valor de verdad de ambas proposiciones es falso.

En español, la disyunción se presenta con el término gramatical "o".
Si se tienen las proposiciones:

a: "Tengo un libro de Trigonometría".
b: "Tengo un libro de Álgebra".

La disyunción entre a y b es:

$a \vee b$: "Tengo un libro de Trigonometría o uno de Álgebra"

En el lenguaje natural el disyuntor es la conjunción disyuntiva" o", la cual presenta una alternativa entre las proposiciones, por ejemplo: La conjunción en consideración puede tener otro sentido, tal y como se muestra en el ejemplo indicado, porque en el uso cotidiano de dicha partícula puede significar que es verdadera solamente si una de las proposiciones es verdadera, es decir, que es falsa sólo si las dos son falsas.

Tabla de verda de la Disyunción

p	q	$p \vee q$
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	v

Disyunción Inclusiva

Sean p y q proposiciones, la disyunción entre p y q, representada simbólicamente por $p \vee q$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Ejemplo 1

La Disyunción

$a \vee b$: Tengo un libro de Trigonometría o uno de Álgebra.

La tabla de verdad si la proposición "a" es verdadera y la porposición "b" es falsa es la siguiente:

a	b	$a \vee b$
v	f	v

Por consiguiente tengo un libro de trigonometría o uno de algebra es verdadera.

El ejemplo 1 nos muestra el llamado "o incluyente" el cual hace que el valor de verdad de una de las dos proposiciones simples repercuta en el valor verdadero de la proposición disyuntiva

Ejemplo 2

Si se tienen las proposiciones:

a: "Estoy en Tegucigalpa".

b: "Estoy en San Pedro Sula".

La disyunción entre a y b es:

$a \vee b$: "O estoy en Tegucigalpa o estoy en San Pedro Sula".

La expresión "*o estoy en Tegucigalpa o estoy en San Pedro Sula*" denota la imposibilidad de estar físicamente en Tegucigalpa y San Pedro Sula al mismo tiempo, a estas disyunción se le llama exclusiva.

El conectivo lógico "o" del ejemplo 2 actúa como un "o excluyente", donde el valor de verdad de una proposición excluye la veracidad de la otra proposición, esto hace que la proposición disyuntiva siempre tome el valor verdadero.

En el lenguaje español suelen presentarse situaciones que son mutuamente excluyentes entre sí, estas proposiciones reciben el nombre, de disyunción exclusiva se presenta con el término gramatical "o", "o sólo", "o solamente", "o..., o...". Este operador lógico relaciona dos proposiciones para formar una nueva, en la cual la proposición resultante será verdadera cuando solamente una de ellas sea verdadera.

Disyunción Inclusiva

Como se podrá notar en este ejemplo, existe la posibilidad de poseer ambos libros, razón por la cual esta disyunción recibe el nombre de disyunción inclusiva.

Denifición

Sean p y q proposiciones, la disyunción exclusiva entre p y q, representada simbólicamente por: $p \veebar q$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad;

p	q	$p \veebar q$
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	f

La disyunción exclusiva p, q puede expresarse como:

$$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

En español la disyunción exclusiva se presenta con el mismo término gramatical
"o"," o sólo", "o solamente", "o...o..."

Ejemplo 3

Sean las proposiciones:
- a: "El tucán es un ave"
- b: "El tucan es un mamífero"

La disyunción exclusiva entre las proposiciones es:
- $a \vee b$: "O el tucán es un ave o es un mamífero"

La disyunción inclusiva entre las proposiciones siguientes es:
- p: "Javier recibe clases de piano"
- q: "su clase de lógica"
- $p \vee q$: "Javier recibe clases de piano" o" a su clases de lógica"

Recordemos...
El "o excluyente", donde el valor de verdad de una proposición excluye la veracidad de la otra proposición, esto hace que la proposición disyuntiva siempre tome el valor verdadero.

Ejemplo 4

Sean los siguientes enunciados:
- p: "9 es múltiplo de 3"
- q: "5 es divisor de 10"

Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:
1. "9 es múltiplo de 3 y 5 es divisor de 10" $p \wedge q$
2. "No es verdad que 5 es divisor de 10" $\sim q$
3. "5 es divisor de 10 o no es verdad que 9 es múltiplo de 3" $p \vee \sim q$

Este operador lógico relaciona dos proposiciones para la cual la proposición resultante será verdadera solamente cuando el valor de verdad de una de ellas sea verdadera.

Ejercicio 1

Sean las siguientes proposiciones:
- a: "La guacamaya es un ave"

b: "A Luis le gusta escuchar a Guillermo Anderson"

1. Escribe en forma simbólica los siguientes enunciados:
   a. La guacamaya es un ave y a Luis le gusta escuchar a Guillermo Anderson.
   b. La guacamaya es un ave y a Luis no le gusta escuchar a Guillermo Anderson.
   c. No es verdad que la guacamaya es un ave y que Luis le gusta escuchar a Guillermo Anderson.
   d. A Luis le gusta escuchar a Guillermo Anderson o la guacamaya es un ave y
   e. La guacamaya es no un ave o a Luis le gusta escuchar a Guillermo Anderson.
   f. No es verdad que la guacamaya es un ave y que Luis le gusta escuchar a Guillermo Anderson.

2. Sean las siguientes proposiciones:
   a. *p:* "2 es un número primo"
   b. *q:* "25 es múltiplo de 5"
   c. *r:* "$\sqrt{4} = 2$"
   d. *s:* "$4^3 = 64$"

   Escribe las siguientes proposiciones en el lenguaje natural

   a. $p \vee q$
   b. $r \vee \sim q$
   c. $r \vee s$
   d. $\sim r \vee s$
   e. $\sim p \vee s$
   f. $\sim p \vee \sim q$
   g. $\sim (p \vee q)$

4. Considere las siguientes proposiciones:
   a. *p:* "está lloviendo" (f)
   b. *q:* "el Sol está brillando" (v)
   c. *r:* "hay nubes en el cielo" (f)

5. Traduzca al lenguaje común y elaborar la tabla de verdad de la proposición resultante:
   a. $(q \vee r)$
   b. $(p \veebar q)$
   c. $(q \veebar r)$
   d. $(q \vee \sim p)$

6. Traduzca cada una de las siguientes oraciones a notación lógica (introduzca las letras que le haga falta). Establezca el valor de verdad de la proposición compuesta utilizando todas las posibilidades para cada proposición simple:
   a. El número de cédula de Genaro es menor que 5 millones o es mayor que seis millones.
   b. Alejandra está comiendo, o bebiendo.
   c. El gordo Alberto vive para comer o come para vivir.
   d. O yo estoy equivocado, o la pregunta número uno es cierta y la pregunta número dos es falsa.
   e. El número en la pantalla es menor que cuatro o mayor que diez.

LECCIÓN 2

Conectivos Lógicos: Condicional

Clase 5
Sub Competencias:

- Construir proposiciones compuestas reconociendo el conectivo lógico condicional.
- Entender el verdadero significado de cada proposición que se propone.
- Contruir tablas de verdad de la condicional.

Conitnuación Contectivos Lógicos
Analicemos la siguiente proposición compuesta:
"Si 30 es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5"
Observemos que hay dos proposiciones simples *p* y *q*
p: "30 es múltiplo de 10"
q: "30 es múltiplo de 5"

El conectivo lógico entre las proposiciones es la implicación,
$p \Rightarrow q$: "Si 30 es múltiplo de 10, entonces es múltiplo de 5"
como ya mencionamos este conectivo, lógico es el *Condicional.*

Una implicación o proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) *p* y *q*. Se indica de la siguiente manera: $p \Rightarrow q$ (se lee "si *p* entonces *q*").

Ejemplo 1

Sean las proposiciones:
p: "Juan se esfuerza en su objetivo"
q: "Juan logrará hacer su objetivo realidad"
La implicación o condicional entre *p* y *q* será:
$p \Rightarrow q$ "Si Juan se esfuerza en su objetivo, "entonces" "Juan logrará hacer su objetivo realidad"

También podemos tener oraciones condicionales que nos forman proposiciones compuestas por medio del si.. entonces..

La condicional es una constante o conectiva lógica representada con el símbolo ⇒, el cual se coloca entre una proposición denominada antecedente o condición y otra proposición llamada consiguiente o condicionado, por ejemplo: "p ⇒ q" *Esta expresión se lee "si p entonces q" o "p es condición suficiente de q", la cual representa una proposición que será falsa únicamente si el antecedente es verdadero y el consiguiente es falso.*

En lenguaje natural el condicional corresponde a " si ... entonces ... ", aunque también se evidencia con la expresión " ... implica ... "

En español, la proposición a⇒b se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "si a, entonces b", "a sólo si b", "a solamente si b", "b si a", "si a, b", "b con la condición de que a", "b cuando a", "b siempre que a", "b cada vez que a", "b ya que a", "b debido a que a", "b puesto que a", "b porque a", "se tiene b si se tiene a", "sólo si b, a", "b, pues a", "cuando a, b", "los a son b", "a implica b", o cualquier expresión que denote causa y efecto.

Ejemplo 2

Si se tienen las proposiciones:
a: Juan gana el concurso.
b: Juan dona L. 10,000
La condicional entre *a* y *b* es:
$a \Rightarrow b$: "Si Juan gana el concurso, dona L. 10,000".

Parafraseando la condicional, tenemos:

- Juan gana el concurso sólo si dona L. 10,000.
- Juan dona L. 10,000 si gana el concurso.
- Si Juan gana el concurso, entonces dona L 10,000.
- Juan dona L. 10,000 puesto que gana el concurso.
- Juan dona L.10,000 debido a que gana el concurso.
- Juan dona L. 10,000 siempre que gane el concurso.
- Cuando Juan gane el concurso, dona L. 10,000.
- Juan dona L. 10,000 porque gana el concurso.

Haciendo uso del lenguaje español podemos interpretar la misma condicional condiferentes acepciones de la misma, como se muestra en el ejemplo Si Juan gana, dona L.10,000

Con base a este ejemplo, nos podemos preguntar:

- ¿Cuándo se quebrantará la promesa de Juan?

Esto será únicamente cuando Juan gane el concurso y no done el dinero.

Otros ejemplos

- Si un entero es múltiplo de 4 entonces es divisible por 2
- Apruebo el semestre sólo si estudio
- El algoritmo está bien enunciado si el programa corre
- Si dos rectas nunca se cortan necesariamente son paralelas

Simbolice

Si p, entonces q: $p \Rightarrow q$
No es el caso que p y q: $\sim(p \wedge q)$
p entonces q y no $\sim r$:$p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$
p o no q: $p \vee \sim q$
Si p y q, entonces no r *o* s: $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \vee s)$
Si p, entonces q y si q, entonces p: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
Si p y q, entonces r, p o q, entonces r: $(p \wedge q) \Rightarrow r$, $p \vee q \Rightarrow r$
Si p y q, entonces r. Si r y s, entonces t. Si p y q y s, entonces t:
$(p \wedge q) \Rightarrow r$, $(r \wedge s) \Rightarrow t$, $(p \wedge q \wedge s) \Rightarrow t$

Variaciones de la Condicional

Existen otras proposiciones relacionadas con la condicional $a \Rightarrow b$, las cuales se denominan: recíproca, inversa y contrarrecíproca.

- *La Recíproca*, es representada simbólicamente por: $b \Rightarrow a$.
- *La Inversa*, es representada simbólicamente por: $\sim a \Rightarrow \sim b$.
- *La Contrarrecíproca*, es representada simbólicamente por: $\sim b \Rightarrow \sim a$.

La contrarrecíproca (también llamada contrapositiva)

La negación de un proposición condicional $p \Rightarrow q$ dice lo mismo que la proposición $p \wedge \sim q$.

Cabe anotar que una proposición puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad, lo cual no se cumple con la recíproca o la inversa.

Ejemplo 3

A partir de la proposición:
"Si es un automóvil, entonces es un medio de transporte".
La Recíproca sería:
"Si es un medio de transporte, entonces es un automóvil".
La Inversa sería:
"Si no es un automóvil, entonces no es un medio de transporte".
La Contrarrecíproca sería:
"Si no es un medio de transporte, entonces no es un automóvil".

Ejemplo 3

A partir de la proposición:
"Si un número es divisible por 6, entonces es divisible por 3".
La Recíproca sería:
"Si un número es divisible por 3, entonces es divisible por 6".
La Inversa sería:
"Si un número no es divisible por 6, entonces no es divisible por 3".
La Contrarrecíproca sería:
"Si un número no es divisible por 3, entonces no es divisible por 6".

Ejercicio 1

Sean p, q y r las proposiciones siguientes:

p: "Juan llega demasiado pronto"
q: "María llega demasiado tarde"
r: "El jefe se molesta"

1. Traduzca las siguientes oraciones a notación lógica utilizando las letras p, q, r y los conectivos lógicos.
   a. Si Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.
   b. Si María llega demasiado tarde, entonces Juan no llega demasiado pronto.
   c. Si el jefe no se molesta, entonces Juan no llega demasiado pronto y María no llega demasiado tarde.
   d. Si María no llega demasiado tarde y Juan no llega demasiado pronto, entonces el jefe no se molesta.

2. Proporcione la recíproca la inversa y la contrarreciproca de cada una de las siguientes proposiciones.
   a. Si soy listo, entonces soy rico
   b. Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 8$
   c. Si Juan llega demasiado pronto ó María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.

3. Considere la proposición "si a es un número real y $a > 0$, entonces $a^2 > 0$".

LECCIÓN 2

Tablas de Verdad de la Condicional

Clase 6
Sub Competencias:

- Construir proposiciones compuestas reconociendo el conectivo lógico condicional.
- Entender el verdadero significado de cada proposición que se propone.
- Contruir tablas de verdad de la condicional.

Condicional

Analizaremos con detalle cada uno de los cuatro casos que se presentan en la tabla de verdad.

Este operador lógico también se denomina enunciación hipotética o implicación. En la proposición $p \Rightarrow q$, p es el antecedente, hipótesis o premisa; q es el consecuente, conclusión o tesis;

1. Antecedente y consecuente verdaderos

En este caso parece evidente que el condicional "si *p*, entonces *q*" se evalúe como verdadero.

Por ejemplo,
"Si como mucho, entonces engordo" es una sentencia que se evalúa como verdadera en el caso de que tanto el antecedente como el consecuente sean verdaderos.

Ahora bien, obsérvese que ha de evaluarse también como verdadero un condicional en el que no exista una relación de causa entre el antecedente y el consecuente.

Por ejemplo, el condicional
"*Si García Lorca fue un poeta, entonces Gauss fue un matemático*"
ha de evaluarse como verdadero y no existe relación causal entre el antecedente y el consecuente.

Es por esta razón que no hay que confundir el condicional con la implicación lógica.
"*García Lorca fue un poeta implica que Gauss fue un matemático*"

Es una implicación falsa desde el punto de vista lógico. Más adelante estudiaremos la implicación lógica.

2. Antecedente verdadero y consecuente falso

En este caso parece natural decir que el condicional se evalúa como falso. Por ejemplo, supongamos que un político aspirante a Presidente del Gobierno promete:

"*Si gano las elecciones, entonces bajaré los impuestos*"

Este condicional será falso solo si ganando las elecciones, el político no baja los impuestos. A nadie se le ocurriría reprochar al político que no ha bajado los impuestos si no ha ganado las elecciones.

Obsérvese que el hecho de que p sea verdadero y, sin embargo, q sea falso viene, en realidad, a refutar la sentencia $p \Rightarrow q$, es decir la hace falsa.

La proposición resultante será falsa solamente cuando el valor de verdad del antecedente sea verdadero y el valor de verdad del consecuente sea falso.

3. Antecedente falso y consecuente verdadero

Nuestro sentido común nos indica que el condicional $p \Rightarrow q$ no es, en este caso, ni verdadero ni falso. Parece ilógico preguntarse por la veracidad o falsedad de un condicional cuando la condición expresada por el antecedente no se cumple. Sin embargo, esta respuesta del sentido común no nos sirve, estamos en lógica binaria y todo ha de evaluarse bien como verdadero, bien como falso, es decir, si una sentencia no es verdadera, entonces es falsa y viceversa.

La proposición antecedente es falsa porque pueden haber otras alternativas que la hagan verdadera y el consecuente se cumple es decir es verdadera el resultante será verdadera.

Veamos que en el caso que nos ocupa, podemos asegurar que el condicional no es falso. En efecto, como dijimos anteriormente, $p \Rightarrow q$ es lo mismo que afirmar que:

"*p es una condición suficiente para q*"

es decir, p no es la única condición posible, por lo cual puede darse el caso de que q sea verdadero siendo p falso. O sea, la falsedad del antecedente no hace falso al condicional y si no lo hace falso, entonces lo hace verdadero.

Por ejemplo,

"*Si estudio mucho, entonces me canso*"

¿Que ocurriría si no estudio y, sin embargo, me cansara?

Pues que la sentencia no serıa inválida, ya que no se dice que no pueda haber otros motivos que me puedan producir cansancio.

4. Antecedente y consecuente falsos

La situación es parecida a la anterior. La condición p no se verifica, es decir, es falsa, por lo que el consecuente q puede ser tanto verdadero como falso y el condicional, al no ser falso, será verdadero.

Obsérvese, anecdóticamente, que es muy frecuente el uso de este condicional en el lenguaje coloquial, cuando se quiere señalar que, ante un dislate, cualquier otro está justificado.

"Si tú eres programador, entonces yo soy el dueño de Microsoft".
Con todo los casos anteriores podemos ahora resumir la tabla de verdad de la condicional.

Definición

Sean p y q proposiciones, la condicional entre p y q, representada simbólicamente por $p \Rightarrow q$, es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabal de verdad;

Tabla de verdad de la condicional:

p	q	$p \Rightarrow q$
f	f	v
f	v	v
v	f	f
v	v	v

Cuando no se establece el valor de verdad de las proposiciones elaboramos en cuatro presentado caso contrario se analiza el caso particular del valor de verdad de la proposición para los valores de verdad dados.

Para quienes necesitan mayor evidencia de que $p \Rightarrow q$ se debe definir como verdadera cuando p es falsa, se ofrece otra justificación. Casi todas las personas están de acuerdo en que la proposición para todos los números reales x, si $x > 0$, entonces $x^2 > 0$, es verdadera.

p: denotada por $x > 0$
q: denotada por $x^2 > 0$.
El hecho de que la p sea verdadera significa que no importa con cuál número real se sustituya x, la proposición: si p entonces q resultante es verdadera.

Por ejemplo;
si $x = 3$, entonces p y q son ambas ciertas:
($3 > 0$ y $3^2 > 0$ son ambas verdaderas) y, $p \Rightarrow q$ es verdadera, esto se observa en el último renglón de la tabla de verdad de la condicional.

Ahora considere la situación donde p es falsa.
Si $x = -2$, entonces p es falsa ($-2 > 0$ es falsa) y q es verdadera [$(-2)^2 > 0$ es verdadera].

Con objeto de que la proposición sea verdadera en ese caso, debe definirse $p \Rightarrow q$ como verdadera cuando p es falsa y q es verdadera. Esto es justo lo que ocurre en el segundo renglón de la tabla de verdad para la condicional.

Si $x = 0$, entonces p y q son ambas falsas ($0 > 0$ y $0^2 > 0$ son falsas).
Para que la proposición (p entonces q) sea cierta en este caso, debe definirse $p \Rightarrow q$ como verdadera cuando p y q son ambas falsas.
Justo ocurre esto en el primer renglón de la tabla de verdad para la definición la condicional.

Ejercicio 1

Utilizando las siguientes proposiciones

p: "está lloviendo" (f)
q: "el Sol está brillando" (v)
r: "hay nubes en el cielo" (f)

Traduzca al lenguaje común y elaborar la tabla de verdad de la proposición resultante:

a. $(p \Rightarrow q)$
b. $(p \Rightarrow r)$
c. $(q \Rightarrow p)$
d. $(r \Rightarrow q)$
e. $(q \Rightarrow r)$

LECCIÓN 2

Tablas de Verdad de la Condicional (Recíproca y Contrarrecíproca)

Clase 7
Sub Competencias:

- Establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados.
- Elaborar la tabla de verdad de la condicional (Recíproca y Contrarrecíproca).

Condicional

Como ya habíamos visto en lecciones anteriores existen otras proposiciones relacionadas con la condicional $a \Rightarrow b$,:

- La recíproca, inversa y contrarrecíproca (o contrapositiva).
- La recíproca, es representada simbólicamente por: $b \Rightarrow a$.
- Inversa, es representada simbólicamente por: $\sim a \Rightarrow \sim b$.
- La Contra recíproca, es representada simbólicamente por: $\sim b \Rightarrow \sim a$.

Cabe anotar que una proposición puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad, lo cual no se cumple con la recíproca o la inversa.

Dada la proposición condicional $p \Rightarrow q$, su contra reciproca es la proposición, también condicional, $q \Rightarrow p$.

Por ejemplo, la contra recíproca de la proposición "Si María estudia mucho, entonces es buena estudiante" es "Si María no es buena estudiante, entonces no estudia mucho".

Ejemplo 1

Escribir la recıproca y la contrarrecíproca de cada una de las afirmaciones siguientes:
(a) Si llueve, no voy.
(b) Me quedare, solo si tu´ te vas.
(c) Si tienes cien lempiras, entonces puedes comprar un helado.
(d) No puedo completar la respuesta si no me ayudas.

Solución

Escribiremos la reciproca y la contra recíproca de varias formas.

p: llueve *q:* no voy,

a) Si llueve, no voy.

Recíproca es: $q \Rightarrow p$

- Si no voy, entonces llueve.
- Llueve si no voy.
- Una condición necesaria para no ir es que llueva.
- Una condición suficiente para que llueva es no ir.

Si p es verdadera y q es falsa, tenemos la tabla de verdad:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
v	f	f	v

Podemos observar en la tabla de verdad que la proposición $p \Rightarrow q$ tinene un valor de verdad f, pero su recíproca es verdadera, lo que nos confirma lo establecido anteriormente.

Contrarrecíproca es: $\sim q \Rightarrow \sim p$

- Si voy, entonces no llueve.
- Voy solo si no llueve.
- Es necesario que no llueva, para que vaya.
- Es suficiente que vaya para que no llueva.

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
v	f	f	v	f	f

En este caso queda explicito que el valor de verdad de la condicional no se afecta al encontrar su contra recíproca pues, $p \Rightarrow q$ es f y su contrarreciproca, también es falsa.

b) Me quedaré solo si te vas.

r: Me quedaré s: Te vas $r \Rightarrow s$

Si r es falsa y s es verdadera

Reciproca. es: $s \Rightarrow r$

- Si te vas, entonces me quedaré
- Me quedaré, si te vas.
- Una condición necesaria para que te vayas, es quedarme.
- Una condición suficiente para quedarme es que te vayas.

r	s	$r \Rightarrow s$	$s \Rightarrow r$
f	v	v	f

Contra recíproca es: $\sim s \Rightarrow \sim r$

- Si no te vas, entonces no me quedaré.
- No me quedaré si no te vas.
- Es suficiente que no te vayas, para no quedarme.

r	$\sim r$	s	$\sim s$	$r \Rightarrow s$	$\sim s \Rightarrow \sim r$
f	v	v	f	v	v

c) No puedo completar la respuesta si no me ayudas.

u: No puedo completar la respuesta *t:* No me ayudas
u es falsa y *t* es falsa

Reciıproca es: $t \Rightarrow u$

- Si no puedo completar la respuesta, entonces no me ayudas.

u	t	u ⇒ t	t ⇒ u
f	f	v	v

los valores de verdad de la proposición y su contrarrecíproca coinciden.

Contrarrecíıproca es: $\sim t \Rightarrow \sim u$

- Si puedo completar la respuesta, entonces me ayudas.
- Puedo completar la respuesta sólo si me ayudas.
- Es necesario que ayudes para poder completar la respuesta.

u	~u	t	~t	u ⇒ t	~ t ⇒ ~ u
f	v	f	v	v	v

Ejemplo 2

A partir de la proposición: "Si es un automóvil, entonces es un medio de transporte". $p \Rightarrow q$, si p es verdadera y q es verdadera obtenemos tabla de verdad:

p	q	$p \Rightarrow q$
v	v	v

La Recíproca sería: "Si es un medio de transporte, entonces es un automóvil". $q \Rightarrow p$, cuya tabla de verdad es:

q	p	$q \Rightarrow p$
v	v	v

La Inversa sería: "Si no es un automóvil, entonces no es un medio de transporte". $p \Rightarrow q$, cuya tabla de verdad es:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
v	v	f	f	v

La Contrarrecíproca sería: "Si no es un medio de transporte entonces no es un automóvil”, $q \Rightarrow p$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
v	v	f	f	v

Ejercicio 1

1. Construya las tablas de verdad a partir de las siguientes proposiciones:
   "*Si un número es divisible para 6, entonces es divisible para 3*".
   La Recíproca sería:
   "*Si un número es divisible para 3, entonces es divisible para 6*".
   La Inversa sería:
   "*Si un número no es divisible para 6, entonces no es divisible para 3*".
   La Contrarrecíproca sería:
   "*Si un número no es divisible para 3, entonces no es divisible para 6*".

2. Determinar la inversa, recíproca y contrarrecíproca de las siguientes implicaciones y encontrar su valor de verdad aplicando la tabla de verdad de la condicional o implicación.
   - $p \Rightarrow q$: Si 3 es divisor de 6, entonces no es par
   - $p \Rightarrow q$: Si x es múltiplo de 5, entonces es divisor de 25
   - $p \Rightarrow q$: Si un trianguo es un polígono, entonces no es un cuadrilátero
   - $p \Rightarrow q$: Si marte no es un planeta, entonces la luna es un satélite.
   - $p \Rightarrow q$: Si 17 es un número primo entonces no es múltiplo de 50

3. Proporcione la recíproca y la contrapositiva de cada una de las siguientes expresiones.
   a. Si $x + y = 1$, entonces $x^2 + y^2 \geq 1$
   b. Si $x^2 = x$, entonces $x = 0$ o $x = 1$

LECCIÓN 4

Tablas de Verdad de la Variaciones de la Condicional

Clase 8
Sub Competencias:

- Establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados
- Entender las variaciones de la condicional (condición necesaria y condición suficiente).

Variaciones de la Condicional

Relacionadas a la enunciación hipotética, surgen las nociones de condición necesaria y condición suficiente, y puede afirmarse con propiedad que mucha gente tiene integrada estas nociones a su lenguaje cotidiano, tal como se ilustra en el siguiente caso.
Un profesor presenta este problema a sus estudiantes:

"Un hacendado tiene un cierto número de reses, de tal forma que: si las agrupa de 2 en 2, le sobra 1, si las agrupa de 3 en 3, le sobra 1, pero si las agrupa de 4 en 4, no le sobran. Entonces, ¿podría indicar usted el número de reses que tiene el hacendado?".

El razonamiento que presentaron los estudiantes a este problema, fue: "Si el hacendado las agrupa de 2 en 2, sobra 1, por lo tanto no es múltiplo de 2. Si las agrupa de 3 en 3, sobra 1, por lo tanto no es múltiplo de 3. Pero si las agrupa de 4 en 4, no le sobran, por lo tanto es múltiplo de 4. Mmmmm..., pero algo anda mal, porque si el número de reses es múltiplo de 4, también debe ser múltiplo de 2 debido a que 4 es múltiplo de 2. Luego, el problema está mal planteado".

Esto significa que las condiciones se contradicen y el problema tiene condiciones que no se pueden dar. Por lo tanto, no hay forma de determinar el número de reses del hacendado.

Obsérvese que la proposición condicional $p \Rightarrow q$, se enunciaba
Si p, entonces q
siendo una formulación equivalente,
Una condición necesaria para p es q
y la proposición condicional $q \Rightarrow p$, se enunciaba
Si q, entonces p
siendo una formulación equivalente,
Una condición suficiente para p es q
Por tanto, una formulación equivalente de la proposición bicondicional en estos términos, sería:
Una condición necesaria y suficiente para p es q.

Analizando este problema desde el punto de vista lógico y suponiendo que n es un entero positivo bien definido, se tendrá la siguiente propiedad: "Si n es múltiplo de 4, entonces n es múltiplo de 2", la cual se puede expresar como $a \Rightarrow b$, donde:
a: n es múltiplo de 4 y b: n es múltiplo de 2.

Al ser la proposición $a \Rightarrow b$ verdadera, la condición "n es divisible para 4" es suficiente para que "n sea divisible por 2"; es decir, que basta que n sea divisible por 4 para que ese mismo n sea divisible por 2. Esto significa que a es **condición suficiente** para b.

Por otro lado, la condición "n es divisible por 2" es necesaria para que "n sea divisible por 4"; es decir, que se requiere que n sea divisible por 2 para que ese mismo n sea divisible por 4. Esto significa que b es **condición necesaria** para a.

Otra maneras equivalentes de leer $p \Rightarrow q$ son las siguientes:

(1) p es una condición suficiente para q. Pues es suficiente que q sea verdadera (o que lo que p afirma se cumpla), para que q también lo sea.

(2) q es una condición necesaria para p. Pues cada vez que p se cumple (es verdadera), necesariamente q también se cumple.

Ejemplo 1

Las siguientes proposiciones son verdaderas:

- "Si n es divisible por 16, n es divisible por 2".
- "Si n es divisible por 8, n es divisible por 2".
- "Si n es divisible por 16, n es divisible por 8".

Una misma proposición puede ser condición suficiente para varias proposiciones y viceversa. Una misma proposición puede ser condición necesaria para distintas proposiciones.

Parafraseando las proposiciones anteriores, se tiene:

- "n es divisible por 16" es condición suficiente para que "n sea divisible por 2".
- "n es divisible por 2" es condición necesaria para que "n sea divisible para 8".
- "n es divisible por 8" es condición necesaria para que "n sea divisible por 16".

Cuando la proposición $\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}$ es verdadera, se puede parafrasear de la siguiente manera:

- "basta $\boldsymbol{a}$ para que $\boldsymbol{b}$"
- "se necesita $\boldsymbol{b}$ para $\boldsymbol{a}$"
- "para que suceda $\boldsymbol{a}$, es necesario que suceda $\boldsymbol{b}$"
- "$\boldsymbol{b}$ con la condición de que $\boldsymbol{a}$"

Ejemplo 2

Si consideramos que la siguiente proposición es verdadera:
"*Si estudias, aprobarás el curso*".
Podemos afirmar que es suficiente estudiar para aprobar el curso.
Así mismo, es necesario aprobar el curso como consecuencia de haber estudiado.

Ejemplo 3

Si ahora suponemos que la siguiente proposición es verdadera:
"*Aceptaré el trabajo con la condición de que me traten bien*".
Podemos afirmar que es suficiente que me traten bien para aceptar el trabajo.
Por otra parte, es necesario aceptar el trabajo como consecuencia de que me traten bien.

Ejercicio 1

1. Supongamos que las siguientes proposiciones son verdaderas, reescriba las proposiciones con las palabras suficiente y necesario en cada una de ellas:
   - Si un entero es múltiplo de 4 entonces es divisible por 2
   - Apruebo el semestre sólo si estudio
   - El algoritmo está bien enunciado si el programa corre
   - Si dos rectas nunca se cortan necesariamente son paralelas
   - Si es conductista entonces reduce toda conducta humana a la relación estímulo-respuesta

2. Dada la siguiente proposición: Si Ud. está inscrito en el registro electoral, entonces es mayor de edad.
   En las siguientes afirmaciones escriba las palabras que hacen falta:
   - En este caso, que alguien esté inscrito en el registro electoral es _______________ información para concluir que esa persona es mayor de edad.
   - Por otra parte, ser mayor de edad es una condición _____________, para poder inscribirse en el registro electoral.

LECCIÓN 4

Biccondicional y su Tabla de Verdad

Clase 7
Sub Competencias:

- Establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas reconociendo los conectivos lógicos utilizados
- Elaborar las tablas de verdad del Bicondicional.

Bicondicional

El bicondicional está formado por las implicaciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, las cuales deben tener el mismo valor de verdad para formar una equivalencia entre p y q; en consecuencia, se dice que la proposición p es equivalente a la proposición q y se acostumbra a escribir $p \Leftrightarrow q$.

La proposición bicondicional tiene varias formas de traducción más no de significación, veamos:
p sí y sólo si q
sí y sólo si p

¿Cómo determinar el valor de verdad de la proposición bicondicional? Supongamos verdadera la siguiente proposición:

"Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor"

Sea p: es un día soleado, q: hace calor

si p entonces q y recíprocamente
si q entonces q y recíprocamente
p es una condición necesaria y suficiente para q
q es una condición necesaria y suficiente para p

Surgen cuatro posibilidades:

Caso 1: Es un día soleado y hace calor. En este caso ambas proposiciones se cumplen. Por lo tanto la proposición compuesta p ⇔ q es verdadera.

Caso 2: Es un día soleado pero no hace calor. En este caso se cumple sólo una de las dos proposiciones simples, lo que de acuerdo con la expresión "Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor" no debería darse. Por lo tanto tal proposición compuesta ($p \Leftrightarrow q$) es falsa.

Caso 3: No es un día soleado pero hace calor. En este caso se cumple sólo una de las dos proposiciones simples, lo que de acuerdo con la expresión "Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor" no debería darse. Por lo tanto tal proposición compuesta ($p \Leftrightarrow q$) es falsa.

Si analizamos por separado los posibles valores de verdad de las proposiciones simples podemos ir conformando la tabla de verdad de la bicondicional.

Caso 4: No es un día soleado y no hace calor. En este caso no se cumple las proposiciones simples, lo que no se contradice con la expresión "Si y sólo si es un día soleado entonces hace calor". Por lo tanto la proposición compuesta ($p \Leftrightarrow q$) es verdadera.

De los casos planteados concluimos que la tabla de verdad para la doble implicación toma los siguientes valores:

Sean a y b proposiciones, la bicondicional entre a y b, representada simbólicamente por $a \Leftrightarrow b$ es una nueva proposición, cuyo valor de verdad está dado por la siguiente tabla de verdad:

El ejemplo ilustrativo anterior nos demuestra la conformación de la tabla de verdad de la bicondicional.

Tabla de verdad de la Bicondicional

p	q	$p \Leftrightarrow q$
f	f	v
f	v	f
v	f	f
v	v	v

Se denomina doble implicación. La proposición $p \Leftrightarrow q$ será verdadera cuando los valores de verdad de ambas proposiciones sean iguales. También se puede observar que la proposición $p \Leftrightarrow q$ será falsa cuando los valores de verdad de ambas proposiciones sean diferentes.

Ejemplo 1

Dadas las proposiciones atómicas:

p: Un triángulo es rectángulo

q: Un triángulo tiene un ángulo recto

El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ se puede traducir de las siguientes formas:

- Un triángulo es rectángulo sí y sólo sí tiene un ángulo recto.
- Un triángulo tiene un ángulo recto sí y sólo sí es un triángulo rectángulo
- Si un triángulo es rectángulo entonces tiene un ángulo recto y si un triángulo tiene un ángulo recto entonces es un triángulo rectángulo.
- Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo es que tenga un ángulo recto.
- Una condición necesaria y suficiente para que un triángulo tenga un ángulo recto es que sea un triángulo rectángulo.
- Un triángulo rectángulo es equivalente a un triángulo con un ángulo recto.

Recordemos que podemos dar diversas interpretaciones de una frase que involucre a la bicondicional, el ejemplo presentado nos muestras algunas de ellas.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
f	f	v
f	v	f
v	f	f
v	v	v

Ejemplo 2

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ las longitudes de los lados de un triángulo $\boldsymbol{t}$ siendo $\boldsymbol{c}$ la longitud mayor.

El enunciado $\boldsymbol{t}$: es rectángulo si, y sólo si $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ puede expresarse simbólicamente como $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$, donde p es la proposición "$\boldsymbol{t}$ es rectángulo" y $\boldsymbol{q}$ la proposición "$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$".

Si $\boldsymbol{p}$ es verdadera y $\boldsymbol{q}$ es verdadera su tabla es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
v	v	v

El ejemplo ilustrativo anterior nos demuestra la conformación de la tabla de verdad de la bicondicional.

Ejercicio 1

1. De acuerdo a la definición estudiada para el bicondicional; para determinar los valores de verdad de la proposición bicondicional basta indagar por el valor de verdad de la conjunción entre las implicaciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$. Se propone al estudiante hacer la demostración.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \Leftrightarrow q$
v	v				
v	f				
f	v				
f	f				

2. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   a: "4 es número par y 5 es múltiplo de 2"
   b: "La víbora no es un réptil o el canario es un pez"
   c: "El 21 es múltiplo de 7, entonces 21 es múltiplo de 2"
   d: "La guacamaya es un pez si y solo si el tiburón es un ave"
   e: "Si el oro es un metal, entonces es un buen conductor de electricidad"
   f: "3 es divisor de 18 o 18 es múltiplo de 24"

UNIDAD

3

LECCIÓN 1:

Formación de Tablas de Verdad Utilizando los Conectivos Lógicos Combinados

Clase 1
Sub Competencias:

- Representar simbólicamente proposiciones compuestas correspondiente que contenga proposiciones simples y operadores lógicos.
- Determinar el valor de verdad de una proposición compuesta conociendo el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.
- Dado el valor de verdad de una proposición compuesta determinar el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.

La utilización de los signos de agrupación es en el mismo sentido que los signos de agrupación en las operaciones con números.

Determine la tabla de verdad de la proposición: $\sim (p \wedge q)$

Paso 1: Se hace un recorrido desde adentro hacia afuera de acuerdo a los signos de agrupación: Los signos de agrupación que encontraremos en una fórmula proposicional sigue el orden:
Paréntesis, corchetes, llaves, etc. {[({[(...)]})]}

Paso 2: Se identifica el conectivo que aparece dentro del paréntesis, en este ejemplo propuesto $(p \wedge q)$ es la conjunción.

Paso 3: Se precisa el término de enlace que precede del paréntesis, en el ejemplo la negación.

Paso 4: Se elabora la tabla con el número de columnas determinado por:

a. Proposiciones que intervienen
b. Conectivos utilizados dentro del paréntesis
c. Conectivo utilizado fuera del paréntesis

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
v	v	v	f
v	f	f	v
f	v	f	v
f	f	f	v

Paso 5: Se completa la tabla por columnas, teniendo en cuenta el conectivo y el valor de verdad de cada proposición simple.

De esta manera, sin importar el tamaño de la proposición compuesta, siempre estaremos analizando el valor de verdad para un solo conectivo lógico en cada columna.

Formación de una tabla de verdad

Determine la tabla de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$.

Solución

Tomemos las proposiciones $p, q, r, (p \wedge q)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ interviniendo en este caso; así, la tabla tendrá cinco columnas, una para cada proposición, incluida la proposición dada. Por otro lado, tenemos tres proposiciones en sus formas más simples: p, q y r, así que el número de filas de la tabla es 23 = 8.

Procedemos a llenar la tabla:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
v	v	v	v	v
v	v	f	v	f
v	f	v	f	f
v	f	f	f	f
f	v	v	f	f
f	v	f	f	f
f	f	v	f	f
f	f	f	f	f

Para construir una tabla de verdad de proposiciones compuestas las posibles combinaciones dependeran de la cantidad de porposiciones simples que contenga la proposición compuesta.

Valor de verdad si sabemos que la proposición p es verdadera, ¿cuál será el valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \wedge r$?

Solución

La solución a este problema es muy fácil de obtener, ya que podemos leer en la tercera fila y en la última columna para determinar que cuando p es *v*, q es *f* y *r* es v, la proposición $(p \wedge q) \wedge r$ es *f*.

Ejemplo 1

Determine la tabla de verdad para la proposición $\sim p \vee q$.

Solución:

Las proposiciones representadas son *p, q,* $\sim p$, $\sim p \vee q$. Así, la tabla tendrá cuatro columnas. Las proposiciones en sus formas más simples, representadas en la proposición dada, son dos: p y q; por tanto, el número de filas de la tabla es 22 = 4 filas.

La tabla es la siguiente:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

Ejemplo 2

La proposición "Los perros ladran y muerden" lógicamente implica cada una de las siguientes proposiciones:
"Los perros ladran" y
"Los perros muerden".
Aquí hemos usado el siguiente hecho
$(p \wedge q) \Rightarrow q$.

Tabla de verdad de la proposición anterior:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q$
v	v	v	v
v	f	f	v
f	v	f	v
f	f	f	v

La tabla anterior nos dice que la proposición. "Los perros ladran y muerden", será verdadera se p y q verdaderaso falsas.

Determine la tabla de verdad de la proposición:
$[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$
Empleando tablas de verdad, se construyen las respectivas combinaciones para las variables proposicionales involucradas en la forma proposicional, p, q y r.
Para el efecto se denominará a: $[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$, tal como se muestra en la siguiente tabla:

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow r$	$q\rightarrow r$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$a\leftrightarrow b$
v	v	v	f	v	v	v	v
v	v	f	f	v	v	v	v

Ejercicio 1

a. En los problemas (1. al 4.), construya la tabla de verdad de cada una de las proposiciones dadas.
   1. $\sim(p \wedge q)$
   2. $\sim p \vee \sim q$
   3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge q)]$
   4. $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge \sim q)$

b. Escriba en forma simbólica el enunciado: “Un número p es real y no racional siempre que p sea un irracional” y construya su tabla de verdad.

c. En los problemas (1. al 5.), considere las proposiciones p: un byte tiene 7 bits, q: una palabra consta de 2 bytes, r: un bit es un 0 o un 1. Si se sabe que p es falso y q y r son verdaderos, escriba enunciados para las proposiciones dadas en cada caso, y determine si el enunciado es verdadero o falso.
   1. $p \wedge q$
   2. $p \vee r$
   3. $\sim(p \wedge q)$
   4. $\sim p \vee \sim q$
   5. $[(p \wedge q) \vee r] \wedge [(p \vee r)]$

d. Determinar los posibles valores de verdad para las proposiciones:
   1. $p \wedge \sim q$
   2. $\sim (p \wedge \sim q)$
   3. $p \Rightarrow \sim q$
   4. $\sim p \wedge \sim q$
   5. $p \Rightarrow \sim q$
   6. $\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
   7. $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$

LECCIÓN 2

Propiedades de la Conjunción y Disyunción

Clase 1
Sub Competencias:

- Utilizar las propiedades del álgebra en el análisis de las proposiciones simbólicas.
- Emplear propiedades de los operadores lógicos para modificar estructuras lógicas.
- Dada una propiedad de los operadores lógicos, demostrarla empleando otras propiedades.

Leyes Lógicas

Las operaciones lógicas definidas entre las formas proposicionales y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas Leyes del Álgebra de Proposiciones o Leyes Lógicas.

Estas propiedades pueden ser utilizadas para la simpificación de expresiones donde se combinen los operadores lógicos.

A continuación se presentan, las de uso más frecuente, con las equivalencias lógicas más útiles junto con los nombres que reciben.

Conjunción	Propiedad	Disyunción
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	Conmutativa	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$[(p \vee q) \vee r]\ [p \vee (q \vee r)]$	Asociativa	$[(p \wedge q) \wedge r]\ [p \wedge (q \wedge r)]$
$(p \wedge p) \equiv p$	Idempotencia	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge v) \equiv p$	Identidad	$(p \vee f) \equiv p$
$(p \wedge f) \equiv f$	Absorción	$(p \vee v) \equiv v$

Podemos observar que algunas de las propiedades tienen el mismo significado que en las operaciones de números.

El signo "≡", nos indica que podemos utilizar una o la otra expresión equivalentemente.

Leyes de los Operadores Fundamentales Conjunción y Disyunción

Ley de doble negación	$\sim(\sim p) \equiv p$
Conmutatividad de la condicional	$(p \Leftrightarrow q) \equiv (q \Leftrightarrow p)$
Leyes distributivas	$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
Leyes de Morgan	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
Tercero excluido	$(p \vee \sim p) \equiv v$
Contradicción	$(p \wedge \sim p) \equiv f$
Contrapositiva o contrarrecíproca	$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Veremos la utilidad de las propiedades o leyes lógicas para interpretar el valor de verdad de expresiones que involucren varios conetores lógicos.

Implicación Condicional	$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ $(\sim p \Rightarrow q) \equiv (q \vee p)$ $\sim(p \Rightarrow \sim q) \equiv (p \wedge q)$
Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Para demostrar estas propiedades u otras, se pueden emplear tablas de verdad o utilizar algunas de las propiedades más elementales, como se verá a continuación en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1

Si se requiere demostrar la equivalencia lógica:
$[p\wedge q)\rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ se puede emplear tablas de verdad o propiedades de los operadores lógicos.

Empleando propiedades de los operadores lógicos, se debe transformar la estructura de una de las formas proposicionales (o de ambas) hasta establecer la equivalencia lógica requerida.
En este ejemplo se trabajará sobre la primera forma proposicional, hasta obtener la estructura de la segunda.

$[(p \wedge q) \Rightarrow r]$	$\equiv [\sim(p\wedge q)\vee r]$	Por la Ley de la Implicación.
	$\equiv [(\sim p\vee \sim q)\vee r]$	Por la Ley de Morgan de la Disyunción
	$\equiv [\sim p\vee(\sim q\vee r)]$	Por la Ley Asoc. de Disyunción
	$\equiv [\sim p\vee(q\Rightarrow r)]$	Por la Ley de la Implicación
$[(p \wedge q) \Rightarrow r]$	$\equiv [p\Rightarrow(q\Rightarrow r)]$	Por la Ley de la Implicación

Hace suponer que $[p \wedge q) \Rightarrow r]$, resulto de la traducción de una frase que involucraba tres proposiciones simples unidas por los conectivos lógicos .
Con esto se concluye que las dos formas proposicionales son equivalentes entre sí.

Hace suponer que $[p \wedge q) \Rightarrow r]$, resulto de la traducción de una frase que involucraba tres proposiciones simples unidas por los conectivos lógicos $\wedge$, $\Rightarrow$.

Ejemplo 2

Utilizar las propiedades de los conectivos lógicos para simplificar.

$[\sim p\vee q]\vee[\sim q\vee \sim p]$	
$\equiv \sim p \vee (q \vee \sim q)\vee \sim q$	Asociativa de disyunción
$\equiv \sim p \vee \mathbf{V} \vee \sim p$	Por tercero excluido
$\equiv (\sim p \vee \mathbf{V}) \vee \sim p$	Asociativa de la disyunció
$\equiv \mathbf{V} \vee \sim p$	Propiedad de identida
$\equiv \mathbf{V}$	Propiedad de identidad

Lo interesante de la simplificación es que debemos identificar las leyes más indicadas para poder simplificar al máximo la expresión

Ejemplo 3

Usando el algebra de proposiciones, simplificar las siguientes porposiciones:

$\sim\{[(\sim p)\vee(\sim q)]\vee\sim q\}$	
$\equiv\sim\{[\sim p\vee(\sim q\vee\sim q)]\}$	Proposición Asociativa
$\equiv\sim\{[\sim p\vee\sim q]\}$	Proposición Idempotencia
$\equiv\sim(\sim p)\wedge\sim(\sim q)$	Ley de Morgan
$\equiv p\wedge q$	Doble negación

Ejemplo 4

Simplificar

$[(\sim p\wedge q)\Rightarrow(r\vee\sim r)]\wedge\sim q$	
$\equiv[(\sim p\wedge q)\Rightarrow \mathbf{f}]\wedge\sim q$	Contradicción
$\equiv[\sim(\sim p\wedge q)\vee \mathbf{f}]\wedge\sim q$	Condicional
$\equiv[(p\vee\sim q)\vee \mathbf{f}]\wedge\sim q$	Cond. Morgan y doble Negación
$\equiv[(p\wedge\sim q)]\wedge\sim q$	Idempotencia
$\equiv\sim q\wedge[(\sim q\wedge p)]$	Conmutativa
$\equiv\sim q$	Absorción

También podemos utilizar las leyes de lógicas para la siplificaciones de expresiones dadas.

Debemos analizar las propiedades que se pueden aplicar para ir simplificando la expresión dada.

También podemos utilizar las leyes de lógicas para la siplificaciones de expresiones dadas. Debemos analizar las propiedades que se pueden aplicar para ir simplificando la expresión dada. Lo interesante de la simplificación es que debemos identificar las leyes más indicadas para poder simplificar al máximo la expresión.

Ejercicio 1

Considere las siguientes proposiciones y simplifiquelas aplicando las porpiedades del álgebra de proposiciones aplicando las porpiedades del álgebra de proposiciones:

a. $[(\sim p\vee q)\vee(\sim q\vee\sim p)]$
b. $\sim\{[(\sim p)\vee(\sim q)]\vee\sim q\}$
c. $(p\vee\sim p)\wedge[p\wedge(q\vee p))]$
d. $\sim\{(p\vee p)\Leftrightarrow p\}$
e. $\sim[\sim(p\wedge q)\Rightarrow\sim q]\vee q$
f. $[(p\vee\sim q)\wedge q]\Rightarrow p$

LECCIÓN 2

Traducción al Lenguaje Simbolico y Formación de Tablas de Verdad

Clase 1
Sub Competencias:

- Representar simbólicamente proposiciones compuestas correspondiente que contenga proposiciones simples y operadores lógicos.
- Determinar el valor de verdad de una proposición compuesta conociendo el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.
- Dado el valor de verdad de una proposición compuesta determinar el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.

Traducción al Lenguaje Simbólico

Ejemplo 1

Traduzca al lenguaje simbólico la proposición:
"Si la seguridad privada es efectiva, disminuyen los índices de asalto en la ciudad y el turismo se desarrolla. Los índices de asalto no disminuyen, pero la seguridad privada es efectiva. Entonces, el turismo no se desarrolla".

Solución:
Se pueden identificar las siguientes proposiciones simples:

a: La seguridad privada es efectiva.
b: Los índices de asalto disminuyen en la ciudad.
c: El turismo se desarrolla.

Los operadores lógicos que se encuentran presentes en esta proposición compuesta son la condicional, la conjunción y la negación.
La traducción es: $[(a \Rightarrow (b \wedge c)) \wedge (\sim b \wedge a)] \Rightarrow (\sim c)$

Nótese la importancia del uso del signo de agrupación para preservar la idea original del enunciado

Determinación de valores de verdad

Bajo la suposición de que los valores de verdad de las proposiciones simples *a, b, c* y *d* son respectivamente *f, f, v, v,* indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $\sim(a \vee b) \Rightarrow (c \wedge \sim d)$

b) $\sim(c \Leftrightarrow a)\ (b \wedge d)$

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuestas debemos determinar cuál es el conectivo que es el operador principal y luego aplicar el valor de verdad de los conectivos lógicos implicados en la proposición compuesta

Solución:

a) $\sim(f \vee f) \Rightarrow (v \wedge f)$

$\sim(f) \Rightarrow f$

$v \Rightarrow f$

f

El valor de verdad de esta proposición es falso.

b) $\sim(v \Leftrightarrow f)\ (f \wedge v)$

$\sim(f)\ f$

$v \vee f$

v

El valor de verdad de esta proposición es verdadero

Determinación de valores de verdad

Determine el valor de verdad de las proposiciones *a, b, c* si la proposición $[\,(a \wedge \sim b) \Rightarrow c\,]$ es falsa.

Solución:

El operador principal de esta proposición compuesta es la condicional. Dado que esta implicación tiene un valor de verdad falso únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, se obtiene que: $(a \wedge \sim b)$ debe ser verdadero; y, *c* debe ser falso.

Estos valores lógicos se obtienen si y sólo si a es verdadero, *b* es falso y c es falso, con lo cual quedan determinados los valores de verdad.

Para determinar el valor de verdad de una proposición compuestas debemos determinar cual es el conectivo que es el operador principal y luego aplicar el valor de verdad de los conectivos lógicos implicados en la proposición compuesta.

Ejemplo 2

Considere las proposiciones: “Juan compró la entrada para el cine”, denotémosla con la letra p y “Juan tiene derecho a entrar al cine”, que denotaremos con la letra q. La proposición $p \Rightarrow q$ dice que “si Juan compró la entrada, entonces tiene derecho a entrar al cine”.

Si aceptamos las proposiciones p *y* $p \Rightarrow q$, entonces podemos lógicamente concluir q, es decir, “Juan tiene derecho a entrar al cine"

El ejemplo anterior es un caso particular de una regla general. Considere las fórmulas $[p \wedge (p \Rightarrow q)]$ y q.

Mostraremos que $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$

A continuación presentamos la tabla de verdad de $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$

p	q	$(p$ □ $q)$	$p \wedge (p$ □ $q)$
v	v	v	v
v	f	f	f
f	v	v	f
f	f	v	f

Comparando las columnas 1 y 4 vemos que en efecto $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.

¿Qué propiedad se ha demostrado con la tabla anterior?

Ejemplo 3

Considere las proposiciones: “Si llueve, entonces voy al cine” y “No voy al cine”. Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos lógicamente concluir la proposición “No llueve”. La regla general detrás de este argumento es la siguiente.

Considere las fórmulas $(p \Rightarrow q)$ *y* $\neg q$.

Tenemos que $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$
v	v	v	f	f	f
v	f	f	f	v	f
f	v	v	v	f	f
f	f	v	v	v	v

Las afirmaciones anteriores lo podemos observar en la cuarta fila donde vemos $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ es verdadera.

¿Qué propiedad hemos demostrado con la tabla anterior?

Ejercicio

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas si p es verdadera, q es falsa y r es verdadera
   a. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   b. $\sim p \Leftrightarrow (q \vee r)$
   c. $\sim(p \vee q) \wedge r$
   d. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

2. Determine el valor de verdad de *p, q* y *r* si las siguientes proposiciones compuestas.
   - $\sim(p \Leftrightarrow (q \vee r))$ es veredadera
   - $(p \wedge q) \vee \neg(p \Rightarrow q)$ es falsa
   - $((p \Rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es verdadera

3. Considere las siguientes fórmulas:
   $p \Rightarrow q$, $\neg p \Rightarrow \neg q$, $q \Rightarrow p$, $\neg q \Rightarrow \neg p$, $p \rightarrow (q \wedge r)$, $\neg p \rightarrow (q \vee r)$, $(p \vee q) \rightarrow \neg r$, $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
   Para cada una de ellas responda las siguientes preguntas:
   - ¿Cuál es la recíproca?
   - ¿Cuál es la contrapositiva?

4. Construya la tabla de verdad de cada una de la fórmulas dadas en el Ejercicio 1.

5. "Si el lunes voy a clase, no iré al banco" y "Si no voy al banco el lunes, entonces no podré comprar el disco". Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos lógicamente concluir que "Si el lunes voy a clase, no podré comprar el disco". Demostrar mediante una tabla de verdad que la regla general detrás de este argumento es la siguiente: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

6. "Si Rodrigo viene, ir´e al cine" y "Si Isabel viene, ir´e al cine". Si aceptamos ambas proposiciones, entonces podemos l lógicamente concluir que "Si Rodrigo o Isabel vienen, ir´e al cine". Demostrar mediante una tabla de verdad que la regla general detrás de este argumento es la siguiente: $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$

LECCIÓN 4

Formas Proposicionales

Clase 1
Sub Competencias:

- El propósito de esta lección es brindar al estudiante elementos para la clasificación de una proposición como tautológica.
- Identificar tautologías.
- Determinar si dos proposiciones son equivalentes
- Dada una proposición identificar la proposición contraria, recíproca y contrarrecíproca.
- Diferenciar y aplicar las leyes del algebra de proposiciones.

Tautologías

Como sabemos, la tabla de verdad del condicional nos dice que éste sólo es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, y verdadero en el resto de casos. Esto coincide completamente con argumento válido, según la cual, un argumento será válido exactamente

No siempre es fácil averiguar intuitivamente si un argumento es válido o no, por lo que en ocasiones es necesario recurrir a métodos más fiables que la intuición.

Dado que podemos convertir cualquier argumento en un condicional, podemos usar el método de las tablas de verdad para averiguar si un argumento dado es válido o no. Evidentemente, un argumento sólo será válido cuando el condicional correspondiente sea una tautología y no será válido en el resto de casos (si es una contradicción o si es una contingencia).

Ejemplo 1

- Premisa 1) Si estudio entonces aprobaré.
- Premisa 2) No he estudiado.

Lo primero que debemos hacer para evaluar o decidir si el argumento es válido o no, es formalizarlo:

Conclusión: No aprobaré.
premisa 1): $p \Rightarrow q$ (si estudio entonces aprobaré)
premisa 2): $\neg p$ (no estudio)
Conclusión: $\neg q$ (no apruebo)

En segundo lugar, tenemos que convertir el argumento en un condicional. Como hemos visto, el antecedente del condicional estará formado por la conjunción de todas las premisas, y el consecuente por la conclusión, de modo que obtenemos lo siguiente: $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ al

Este es en consecuencia el condicional que le corresponde argumento del ejemplo. Es el momento de hacer su tabla de verdad, que quedará como sigue:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
v	v	v	f	f	v
v	f	f	f	f	v
f	v	v	v	v	v
f	f	v	v	v	f

Como vemos la tabla anterior nos revela que el condicional analizado es una contingencia, es decir, que es posible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa.

Ejemplo 2

Evaluar el siguiente ejemplo:

- Premisa 1) Si Alicia llega tarde a casa, será castigada.
- Premisa 2) Alicia ha llegado tarde a casa.

Conclusión: Alicia será castigada. Como en el caso anterior, obtenemos el condicional que le corresponde al argumento que vamos a evaluar, que, tras formalizar cada una de las premisas y la conclusión, quedará como sigue: $[(p\to q)\wedge\ p]\to q$

Observe:

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\wedge p$	$[p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

La tabla nos indica que la fórmula evaluada es una tautología, por correspondiente es válido, y la tabla de verdad correspondiente es la prueba de su validez.

Ejercicio 1

Demostrar que la proposición es una tautología o no, para demostrarlo, debemos construir la tabla de verdad:

a. Si no hay ruidos y no estas sordo, entonces debes oirme $(\sim p\wedge\sim q)\to r$.
b. Iré al cine o al teatro si me invitas $r\to(p\vee q)$.
c. En el caso que venga María vendrá Rosa y Pedro $p\to(q\wedge r)$.
d. Juan debe declarar y ser sincero, o no declarar $(p\wedge q)\Rightarrow\sim p$.
e. Federico se irá a Tela o a Copán si y solo si gana la lotería y no se pierde en la ruleta $(p\vee q)\Leftrightarrow(r\wedge\sim s)$.
f. El hombre lobo es unn invento, si lo mismo ocurre con Santa Claus, entonces los niños son engañados $\wedge(\ q\Rightarrow r)$.

LECCIÓN 5

Equivalencias Lógicas

Clase 1
Sub Competencias:

- Reconocer los diferentes tipos de formas proposicionales.
- Identificar implicaciones y equivalencias lógicas.

Equivalencia Lógica

Sean a y b dos formas proposicionales, se dice que a es equivalente lógicamente a b, denotado por $a \Leftrightarrow b$, si y sólo si $a \Leftrightarrow b$ es una tautología. Cuando se requiere sustituir una estructura por otra que sea equivalente, alternativamente el símbolo se lo reemplaza por $\equiv$.

Las tautologías permiten estructurar métodos de demostración que son ampliamente utilizados en el campo de la lógica. De ahí la importancia de familiarizarse con el simbolismo manejado y su correspondiente aplicación.

Equivalencia Lógica

La forma proposicional: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$, se puede traducir al lenguaje común como "cada vez que se tiene p, se tiene *q*", y es lógicamente equivalente a "cuando no se tiene q, entonces no se tiene *p*".

En otras palabras, se dice que una tautología es una función lógica que es verdadera para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus premisas.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
v	v	f	f	v	v	v
v	f	f	v	v	v	v
f	v	v	f	f	f	v
f	f	v	v	v	v	v

La forma proposicional: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, se puede traducir al lenguaje común como "no es cierto que se tiene p o q", y es lógicamente equivalente a "ni se tiene p, ni se tiene q".

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
v	v	f	f	f	v	v	v
v	f	f	v	v	f	f	v
f	v	v	f	v	f	f	v
f	f	v	v	v	f	f	v

Las tautologías permiten estructurar métodos de demostración que son ampliamente utilizados en el campo de la lógica. De ahí la importancia de familiarizarse con el simbolismo manejado y su correspondiente aplicación.

En otras palabras, se dice que una tautología es una función lógica que es verdadera para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus premisas.

Ejemplo 1

Demostrar que las proposiciones $p \Rightarrow q$ y la proposición $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
v	v	f	v	v	v
v	f	f	f	f	v
f	v	v	v	v	v
f	f	v	v	v	v

vemos la tabla anterior nos revela las proposiciones $p \Rightarrow q$ y la roposición $\neg p \vee q$ son lógicamente equivalentes:

Ejemplo 2

Tautología trivial

Esta tautología establece que cualquier proposición es equivalente así misma, esto es $p \Leftrightarrow p$. Veamos la tabla de verdad correspondiente observe:

p	$p \Leftrightarrow p$
v	v
f	v

Este resultado permite concluir que la doble negación de una proposición es la misma proposición.

Ejercicio 1

En los problemas 1 a 4, indique si el par de proposiciones dadas en cada caso, es un par de proposiciones lógicamente equivalentes.

1. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)], [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$
2. $p \Rightarrow q, \sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$
3. $p \wedge q, \sim(\sim p \vee \sim q)$
4. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r), p \rightarrow (q \vee r)$
5. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)$

Simbólicamente, podemos determinar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes Sí y sólo si: proposición_1 ⟺ proposición_2

Es una tautología: Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al conectarlas mediante la bicondicionante se obtiene una proposición que es una tautología. Para indicar que dos proposiciones P(p, q,...) y Q(p, q,...) son lógicamente equivalentes escribimos: P(p, q,...) ≡ Q(p, q,...) o P ⇔ Q.

UNIDAD 4

LECCIÓN 1
Razonamientos

Clase 1
Sub Competencias:

- Reconocer la estructura de un razonamiento.
- Dado un razonamiento establecer su validez empleando tablas de verdad.
- Dado un razonamiento establecer su valides empleando las leyes del álgebra de proposiciones.

Razonamiento

Con proposiciones compuestas que pueden ser representadas por la conjunción de proposiciones denominadas premisas o hipótesis, la condicional como operador lógico principal; y, una proposición final denominada conclusión.

Las premisas o hipótesis corresponden al antecedente de la implicación, mientras que la conclusión es su consecuente.

$$\underbrace{[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \ldots \wedge H_N]}_{\substack{\text{Cojunto de hipotesis} \\ \text{ANTECEDENTE}}} \qquad \underset{\substack{\text{Condicional} \\ \text{OPERADOR LÓGICO}}}{\Rightarrow} \qquad \underbrace{C}_{\substack{\text{Conclusión} \\ \text{CONSECUENTE}}}$$

La lógica simbólica se ocupa de analizar la validez de los razonamientos; no nos puede decir si la información contenida en una hipótesis es verdadera o falsa. Los términos válido y no válido se refieren a la estructura del razonamiento, no a la veracidad o falsedad de las proposiciones.

El punto importante a recordar es que la veracidad o falsedad de las premisas y la conclusión, no determinan la validez del razonamiento.

En otras palabras, se dice que una tautología es una función lógica que es verdadera para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus premisas.

Validez de un Razonamiento

Un razonamiento es válido cuando la forma proposicional que representa su estructura lógica es una tautología. Si dicha forma proposicional es una contradicción o contingencia, entonces el razonamiento no es válido, en cuyo caso se denomina falacia.

Determinación de la validez de un razonamiento.

Ejemplo 1

Determine si el siguiente razonamiento es válido:
"Si Pablo recibió el e-mail, entonces tomó el avión y estará aquí al mediodía. Pablo no tomó el avión. Luego, Pablo no recibió el e-mail".

Solución:

Se procede primero a identificar las proposiciones simples:

a: Pablo recibió el e-mail.
b: Pablo tomó el avión.
c: Pablo estará aquí al mediodía.

Luego, se identifican las hipótesis y la conclusión:

H_1 : $a \Rightarrow (b \wedge c)$
H_2 : $\sim b$
C : $\sim a$

A partir de estas proposiciones pueden obtenerse las siguientes formas proposicionales:

H_1 : $p \Rightarrow (q \wedge r)$
H_2 : $\sim q$
C : $\sim p$

Con lo cual, la estructura lógica del razonamiento sería:

$[H_1 \wedge H_2] \Rightarrow C$
$[p \Rightarrow (q \wedge r) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

p	q	r	$p \wedge q$	H_1 $p \rightarrow (p \vee q)$	H_2 $\sim q$	$(H_1 \wedge H_2)$	$[H_1 \wedge H_2] \Rightarrow C$
v	v	v	f	f	f	v	v
v	v	f	f	f	f	v	v
v	f	v	f	f	v	f	v
v	f	f	v	f	v	f	v
f	v	v	f	v	f	f	v
f	v	f	f	v	f	f	v
f	f	v	f	v	v	f	v
f	f	f	v	f	v	f	v

Puesto que la forma proposicional resultó tautológica, podemos concluir que el razonamiento es válido.

Todos los razonamientos argumentos pueden convertirse en un condicional, pues, después de todo, lo que el argumento está afirmando es que si las premisas son verdaderas, entonces la conclusión también lo es, o dicho de otro modo
$P_1\ P_2 \ldots P_n$ ⍰ C

Es decir, un argumento es en realidad, un condicional en el que el antecedente es la conjunción de todas las premisas P_1∧P_2∧P_3…∧P_n y el consecuente es la conclusión C.

Como sabemos la tabla de verdad del condicional nos dice que este solo es falso cuando el antecedente es verdadero y consecuente falso y verdadero en el resto de los casos.

Esto coincide completamentoe con la definicion de argumento válido, según el la cual, un arguemento será válido exactamente en los mismo casos en que el quele corresponde sea verdadero si el consecuente es verdadero y el consecuente falso, Otro método para determinar la validez de este razonamiento consiste en la utilización de las propiedades de los operadores lógicos:

un argumento no podrá ser válido si las premisas son verdaderas y la conclución falsa.

$[(p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$	
$\sim[(p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \sim q] \vee \sim p$	Por ley de implicación
$\sim[(\sim p \vee (q \wedge r)) \wedge \sim q] \vee \sim p$	Por ley de implicación
$\sim(\sim p) \vee (q \wedge r)) \vee \sim(\sim q) \vee \sim p$	Ley de Morgan de la conjunción
$(\sim(\sim p) \wedge \sim(q \wedge r)) \vee \sim(\sim q) \vee \sim p$	Ley de Morgan de la Conjunción
$p \wedge \sim(q \wedge r)) \vee q \vee \sim p$	Ley de doble Negación
$p \wedge (\sim q \vee \sim r)) \vee q \vee \sim p$	Ley de De Morgan de la conjunción
$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)) \vee (q \vee \sim p)$	Ley Distributiva de la conjunción
$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)) \vee \sim (q \wedge \sim p)$	Por ley De Demorgan de la conjunción
$(p \wedge \sim q) \vee \sim (p \wedge \sim q)) \vee (q \wedge \sim r)$	Por ley Asociativa de la Disyunción
$V \vee (p \wedge \sim r)$	Ley del Tercero Excluido
V	Absorción de la Disyunción

Ejercicio 1

Formaliza los argumentos siguientes y construye sus tablas de verdad correspondientes:

1. Si trabajo, gano dinero, y si estoy ocioso, me divierto. O bien trabajo o bien estoy ocioso. Luego, o gano dinero o me divierto.

2. Si trabajo, no me divierto, y si estoy ocioso, no gano dinero. O bien trabajo o bien estoy ocioso. Luego, o no gano dinero o no me divierto.

3. Si alguien es sabio, es una persona inteligente. Si una persona es inteligente, entonces calla sobre aquello que no sabe. Por tanto, si alguien es sabio, calla sobre lo que no sabe.

LECCIÓN1

Continuación de Razonamientos

Clase 2
Sub Competencias:

- Reconocer la estructura de un razonamiento.
- Dado un razonamiento establecer su validez empleando tablas de verdad.
- Dado un razonamiento establecer su valides empleando las leyes del álgebra de proposiciones.

Recordemos que un argumento será válido cuando el condicional correspondiente sea una tautología.

En otras palabras, se dice que una tautología es una función lógica que es verdadera para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus premisas.

Continuación de Razonamiento

No siempre es fácil averiguar intuitivamente si un argumento es válido como ya mencionamos anteriormente por lo que debemos recurrir a métodos más fiables que la intuición.

Como ya se dijo anteriormente dado que podemos convertir cualquier argumento en un condicional vamos a nuevamente utilizar las tablas de verdad con los dos siguientes ejemplos para averiguar si son argumentos válidos.

- Premisa 1 : Si estudio entonces aprobaré
- Premisa 2 : No he estudiado
- Conclusión : No aprobaré

Lo primero que debemos hacer para evaluar o decidir si el argumento es válido o no es formalizarlo:

- Premisa 1 : $p \Rightarrow q$ si estudio entonces aprobaré
- Premisa 2 : $\sim p$ no estudio
- Conclusión : $\sim q$ no apruebo

En segundo lugar tenemos que convertir el argumento en un condicional. Como hemos visto el antecedente de la condicional estará formado por la conjunción de todas las premisas, y el consecuente por la conclusión, de modo que obtenemos el siguente $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$.

Este es en consecuencia al condicional que le corresponde al argumento del ejemplo. Es el momento de hacer su tabla que quedará como sigue:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$(p\rightarrow q)\wedge\sim p$	$[(p\rightarrow q)\wedge\sim p]\rightarrow q$
v	v	v	f	f	v
v	f	f	f	f	v
f	v	v	v	v	v
f	f	v	v	v	f

Como vemos en la tabla vemos que el argumento analizado es una contingencia, lo que significa que puede ser verdadero o no, es decir, que es posible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa.

Evaluando el segundo ejemplo

- Premisa 1 : Si Alicia llega tarde a casa será castigada
- Premisa 2 : Alicia ha llegado tarde a casa.
- Conclusión : Alicia será castigada.

Como en el caso anterior, obtenemos el condicional que corresponde al argumento que vamos a evaluar, que , tras formalizar cada una de sus premisas y la conclusión, quedará como sigue

- Premisa 1 : $p \Rightarrow q$
- Premisa 2 : p
- Conclusión : q

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Su tabla de verdad correspondiente será:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	v	f	v
f	f	v	f	v

La tabla de verdad nos indica que la fórmula evaluada es una tautología, por lo tanto podemos concluir que el argumento correspondiente es válido y que la tabla de verdad es prueba de su validez.

Algunos tipos de razonamientos no pueden ser válidos desde ningún punto de vista. Para determinar su no validez no es necesario utilizar el cálculo lógico basta con poner un poco de atención y un poco de práctica.

Ejercicio 1

1. Irak dice que si los aviones norteamericanos sobrevuelan su territorio, los derribará. Si esto último ocurre, la ONU endurecerá sus sanciones económicas contra Irak. Por lo tanto, si los aviones norteamericanos sobrevuelan Irak, se llevarán a cabo las sanciones de la ONU.

2. O la Televisión modifica sus esquemas y renueva su programación o se producirá una huida masiva de telespectadores y veremos las calles inundadas de gente.

3. Si se ganan las elecciones y nuestros representantes acceden al poder, confiaremos en ellos si y sólo si cumplen sus promesas y el poder no les corrompe.

4. Aristóteles nació en Estagira y fue tutor de Alejandro Magno. Pero si nació en Estagira fue de nacionalidad macedónica. Por tanto Aristóteles fue de nacionalidad macedónica.

5. O el animal no es un pájaro o tiene alas. Si el animal es un pájaro, entonces pone huevos. El animal no tiene alas. Por tanto, no pone huevos.

6. O ahorro el sueldo cada mes o me lo gasto para vivir. Si ahorro, no puedo vivir. Pero si quiero vivir no puedo ahorrar. Por tanto, no es posible vivir y ahorrar.

7. Si el número *n* es positivo, entonces *n2* es positivo. Si *n* es negativo, entonces *n2* es positivo. *N* es positivo o negativo. En consecuencia, *n2* es positivo.

LECCIÓN 2

Inferencias Lógicas

Clase 1
Sub Competencias:

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración
- Reconocer y aplicar la demostración directa e indirecta
- Reconocer y aplicar las refutaciones por contradicción y contraejemplo.
- Aplicar las propiedades y el álgebra de las proposiciones para realizar demostraciones lógicas, empleando técnicas directas, técnicas de contraposición, contraejemplos y reducción al absurdo.

Para definir las inferencias lógicas es necesario precisar algunos conceptos tales como razonamiento y demostración.

Razonamiento

Es el proceso que se realiza para obtener una demostración.

En matemáticas, a menudo nos ocupamos de la demostración lógica de ciertas afirmaciones. Cualquier sistema lógico debe empezar con algunos términos fundamentales, definiciones, y axiomas o postulados.

Demostración

Es el encadenamiento de proposiciones que permiten obtener otra proposición, llamada conclusión, a partir de ciertas proposiciones iniciales supuestas como verdaderas, que reciben el nombre de premisas.

Las Inferencias Lógicas

Son las conclusiones que se pueden obtener después de realizar un razonamiento, este razonamiento solamente es verdadero si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las premisas deben ser verdaderas.
2. Durante el proceso de deducción las premisas deben relacionarse sujetas a las leyes de la lógica. Así, el conocimiento obtenido de proposiciones verdaderas preestablecidas (premisas), y aplicando las leyes de la lógica a esas premisas, se denomina conclusión.

A continuación se plantean algunas reglas de inferencia, se propone al estudiante, como ejercicio, probar su validez utilizando las tablas de verdad:

------ La clave ------

PONENS = PONER **TOLLENS = SACAR = NEGAR**

Reglas de inferencia:

A medida que vallas estudiando las reglas de inferencias encontrarás que éstas son usadas continuamente en el lenguaje natural. Las usamos para obtener conclusiones que consideramos normalmente válidas.

Lo que haremos ahora, es detenernos a analizar porqué consideramos a estas inferencias válidas, aprenderemos que al construir la tabla de verdad de la inferencia lógica se puede determinar la validez de la misma, a la vez que aprendes a identificar las diferentes inferencias lógicas en los razonamientos que hacemos continuamente.

Poder identificar una inferencia lógica y poder clasificarla como válida o no mediante la construcción de la tabla de verdad te dará las bases para elaborar argumentos sólidos, presentes en todas las actividades académicas ya sea en la elaboración de ensayos o debates, como en las actividades cotidianas.

Veamos la primera regla, denominada Modus Ponendo Ponens ó MPP, también llamada simplemente MP ó Modus Ponens, nombre que puedes leer como Modo Afirmando_ Afirmando, veamos:

Modus Ponens (M. P) o Modus Ponendo Ponens (MPP)

¿Cómo interpretar esta ley?, observa el siguiente ejemplo:

Daniel escucha la siguiente afirmación
"Si llueve hace frío"
En la siguiente "*escena*", Daniel observa llover, es decir
"llueve"
¿Qué puede concluir Daniel? Que hará frío, es decir
"hace frío"

Para obtener tan "obvia" conclusión, Daniel ha utilizado la más común de las inferencias lógicas, la cual denominaremos **MPP** ó **Modus Ponendo Ponens.**

En este ejemplo, las proposiciones simples son:
p = llueve
q = hace frío

Ejemplo:

Modus Ponens (M. P)
1-Si llueve hace frío
2-llueve
3-luego Hace frío

Las proposiciones así declaradas, nos permiten expresar en lenguaje natural lo expresado en lenguaje simbólico así:

Ejemplo 1

$p \Rightarrow q$ = Si llueve hace frío
Así que nuestro ejemplo puede ser representado en el lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$p \Rightarrow q$	se lee: si p entonces q
p	se lee: ocurre p
$\therefore q$	se lee: de donde q

El símbolo ∴ (de donde) representa la conclusión de las premisas dadas; es decir que la conclusión, en este caso, es la proposición q Ahora ya estamos listos para interpretar la regla de inferencia tal y como nos fue presentada en un comienzo, esto es:
$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q.$

¿Cómo leer la regla de inferencia?

$p \Rightarrow q$: si p entonces q

$\wedge\, p$: y p (y se da p, y ocurre p)

$\Rightarrow q$: entonces q (en conclusión q)

Es decir que $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ puede ser leído
"Si p entonces q y si ocurre p, luego ocurre q".

La magia del asunto radica en que mediante la aplicación de lo que ya has aprendido en el capítulo de conectivos lógicos podemos determinar la validez de la inferencia lógica *Modus Ponen* mediante la construcción de la tabla de verdad, de la cual esperamos obtener una tautología.

Ejercicio 1

1. Un razonamiento es válido si y sólo si su estructura lógica es una forma proposicional tautológica.
   a) Verdadero b) Falso

2. El razonamiento: "Si te gustan las Matemáticas, entonces eres hábil para la Geometría. Luego, no te gustan las Matemáticas", es válido.
   a) Verdadero b) Falso

3. El razonamiento "Si trabajo arduamente gano un buen sueldo, pero no gano un buen sueldo. Por lo tanto, no trabajo arduamente", es válido.
   a) Verdadero b) Falso

LECCIÓN 2

Inferencias Lógicas Silogismo Disyuntivo

Clase 2
Sub Competencias:

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración.
- Reconocer y aplicar la demostración directa.
- Reconocer y aplicar las silogismo disyuntivo para el análisis de razonamientos lógicos.

Silogismo disyuntivo (S. D) o Modus Tollendo Ponens (MTP)

- $p \vee q$
- $\sim p$
- $\therefore q$

Esta ley se enuncia así: Si una disyunción es verdadera y una de sus proposiciones simples es falsa, entonces necesariamente la otra proposición será verdadera. Simbólicamente se escribe así:

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ o $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$

Silogismo disyuntivo (S. D)
Cae Cara o Sello
No cayó sello
luego cayó cara.

Ejemplo 1

Premisa 1: O la energía interna de un átomo puede cambiar con continuidad o cambia sólo a saltos.
Premisa 2: La energía interna de un átomo no puede cambiar con continuidad
Conclusión: La energía interna de un átomo cambia sólo a saltos.
Simbólicamente:
p: La energía de un átomo puede cambiar con continuidad
q: La energía de un átomo puede cambiar con continuidad

- Premisa 1 : $p \vee q$
- Premisa 2 : $\sim p$
- Conclusión : q

Si tenemos una expresión disyuntiva y tenemos la negación de una de las dos alternativas de esa disyunción, podemos concluir la otra. Silogistmo Disyuntivo

Silogismo Disyuntivo (DS)

Dadas tres premisas, dos de ellas implicaciones, y la tercera una disyunción cuyos miembros sean los antecedentes de los condicionales, podemos concluir en una nueva premisa en forma de disyunción, cuyos miembros serían los consecuentes de las dos implicaciones. Lógicamente, si planteamos una elección entre dos causas, podemos plantear una elección igualmente entre sus dos posibles efectos, que es el sentido de esta regla.

Ejemplos

Ejemplo 2

Deducir una conclusión del siguiente conjunto de premisas.

- Premisa 1 : $\sim q \vee r$
- Premisa 2 : $\sim r$
- Conclusión : $\sim q$

Ejemplo 3

- Premisa 1 : $(s \wedge t) \vee r$
- Premisa 2 : $\sim(s \wedge t)$
- Conclusión : r

Ejemplo 4

Demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas.

- Premisa 1 : $\sim q \vee s$
- Premisa 2 : $\sim s$
- Premisa 3 : $(\neg r \wedge s) \rightarrow q$
- Demostrar: $r \wedge s$

Premisa 4 : De las premisas 1 y 2 se puede concluir $\sim q$ por MTP
Premisa 5 : De las premisas 3 y 4 se puede concluir $\sim(\sim(r \wedge s))$ por MTT, que es equivalente a $r \wedge s$ por la ley de la doble negación.

Ejercicio 1

Determinar la conclusión de las premisas identificando cada una de las leyes.

1. P1 $\sim p \Rightarrow p$ ________________
   P2 $p \rightarrow \sim r$ ________________
   $\therefore$ ________ ________________
2. P1 $(p \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow r)$ ________________
   P2 $(p \vee t)$ ________________
   $\therefore$ ________ ________________
3. P1 $((t \vee p) \rightarrow r$ ________________
   P2 $t \rightarrow (t \vee p)$ ________________
   $\therefore$ ________ ________________
4. P1 $s \Rightarrow q$ ________________
   P2 $2 \sim q$ ________________
   $\therefore$ ________ ________________

LECCIÓN 2

Inferencias Lógicas Tollendo Tollens

Clase 3
Sub Competencias:

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración.
- Reconocer y aplicar la demostración directa e indirecta.

Modus Tollens (M.T) o Modus Tollendo Tollens (MTT)

- $p \Rightarrow q$ se lee : si p entonces q
- $\sim q$ se lee : ocurre $\sim q$
- $\therefore \sim p$ se lee : de donde $\sim p$

Esta regla de inferencia dice que si una implicación es verdadera y su consecuente es falso, entonces su antecedente será necesariamente falso; simbólicamente se expresa así: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Modus Tollens (M. T)
Si llueve hace frío
no hace frío
luego no llovió

Ejemplos 1

Premisa 1: Si un ángulo de un triángulo es mayor de 90º, entonces la suma de los otros dos ángulos es menor de 90º.

Premisa 2: La suma de los otros dos ángulos no es menor de 90º. Si tenenos una expesión condicional, y tenemos la negación del consecuente de ese condicional, podemos concluir en la negación del antecedente.

Conclusión: Un ángulo de un triángulo no es mayor de 90º.
Simbólicamente:
p: Un ángulo de un triángulo es mayor de 90º.
q: La suma de los otros dos ángulos es menor de 90º.

- Premisa 1 : $p \Rightarrow q$
- Premisa 2 : $\sim q$
- Conclusión : $\sim p$

Ejemplos

Ejemplo 2

Deducir una conclusión del siguiente conjunto de premisas.

- Premisa 1 : $q \Rightarrow \neg r$
- Premisa 2 : $\sim(\sim r)$
- Conclusión : $\sim q$

Ejemplo 3

- Premisa 1 : $p \vee (q \Rightarrow r)$
- Premisa 2 : $\sim r$
- Conclusión : $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Ejemplo 4

Demostrar que la conclusión es consecuencia de las premisas dadas.

Premisa 1 : $\sim b$
Premisa 2 : $a \Rightarrow b$
Premisa 3 : $\sim a \Rightarrow c$
Demostrar $\boldsymbol{c}$

Premisa 4: De la premisa 2 y de la premisa 1, puede concluir $\sim a$ por el MTT.
Premisa 5: De las premisas 3 y 4, se puede concluir la proposición c por el MPP.

Ejercicio 1

1. Dadas las siguientes hipótesis:
   H_1: Si el Gobierno no realiza las gestiones apropiadas, entonces el evento no se realizará en nuestro país.
   H_2: El turismo se reactiva en nuestro país.
   H_3: El evento se realizará en nuestro país.

2. Una conclusión que puede inferirse a partir de ellas es:
   a. El evento no se realizará en nuestro país.
   b. El turismo no se reactiva en nuestro país.
   c. El turismo se reactiva en nuestro país y el Gobierno no realiza las gestiones apropiadas.
   d. El Gobierno no realiza las gestiones apropiadas.
   e. Si el Gobierno realiza las gestiones apropiadas, el turismo se reactiva en nuestro país.

3. Para que el razonamiento $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow c$ sea válido, la conclusión c puede ser reemplazada por una de las siguientes formas proposicionales:
   a. $\sim q$
   b. $\sim p \wedge q$
   c. $\sim p \wedge \sim q$
   d. $p \wedge q$
   e. $\sim p$

4. Dado el razonamiento $(H_1 \wedge H_2) \Rightarrow C$, donde:
   H_1: Si estudio, apruebo el curso de nivel cero.
   H_2: Apruebo el curso de nivel cero y viajo a Galápagos.

   Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:
   a. No apruebo el curso de nivel cero
   b. No estudio y no apruebo el curso de nivel cero.
   c. Estudio y viajo a Galápagos
   d. Apruebo el curso de nivel cero
   e. Estudio y no viajo a Galápagos

LECCIÓN 2

Inferencias Lógicas Silogismo Hipotético

Clase 4
Sub Competencias:

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración
- Reconocer y aplicar la demostración directa
- Reconocer y aplicar las el silogismo hipotetico para analizar argumentaciones presentadas.

Dados dos implicaciones, de las cuales, el antecedente de la una sea el consecuente de la otra (el mismo enunciado), podemos construir una nueva implicación cuyo antecedente sea el de aquella implicación cuya consecuencia sea el antecedente de la otra implicación, y cuyo consecuente sea el de ésta última, cuyo antecedente era consecuencia del primero.

Silogismo Hipotético (S: H)

- $p \Rightarrow q$ se lee: si p entonces q
- $q \Rightarrow r$ se lee: si q entonces r
- $\therefore p \Rightarrow r$ se lee: de donde si p entonces r

Es un argumento que se expresa simbólicamente así:
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Silogismo Hipotético (S: H)
Si llueve hace frío
Si hace frío llevo un abrigo
luego si llueve llevo un abrigo

Ejemplo 1

Premisa 1: Si el agua se hiela, entonces sus moléculas forman cristales.
Premisa 2: Si las moléculas forman cristales, entonces el agua aumenta de volumen.

Conclusión: Si el agua se hiela, entonces el agua aumenta de volumen.

Simbólicamente:
p: El agua se hiela
q: Sus moléculas forman cristales
r: El agua aumenta de volumen

- Premisa 1 : $p \Rightarrow q$
- Premisa 2 : $q \Rightarrow r$
- Conclusión : $p \Rightarrow r$

Ejemplos

Ejemplo 2

Deducir una conclusión del siguiente conjunto de premisas.

- Premisa 1 : $q \Rightarrow \neg p$
- Premisa 2 : $\neg p \Rightarrow r$
- Conclusión : $q \Rightarrow r$

Ejemplo 3

- Premisa 1 : $(s \vee t) \rightarrow \neg p$
- Premisa 2 : $(s \vee t) \Rightarrow (r \vee q)$
- Conclusión : $(r \vee q) \rightarrow \neg p$

Ejemplo 4

A partir de las premisas dadas indicar la demostración de la conclusión.

- Premisa 1 : $\sim r$
- Premisa 2 : $\neg p \Rightarrow q$
- Premisa 3 : $q \Rightarrow r$
- Demostrar p

Premisa 4: De las premisas 2 y 3 se concluye $\neg p \rightarrow r$ por S. H
Premisa 5: De las premisas 1 y 4 se concluye p por MTT.

Ejercicio 1

Determinar la conclusión de las premisas identificando cada una de las leyes.

1. P1 $\sim p \Rightarrow p$ ______________________
   P2 $p \rightarrow \sim r$ ______________________
   $\therefore$ __________ ______________________
2. P1 $(p \rightarrow s) \wedge (t \rightarrow r)$ ______________________
   P2 $(p \vee t)$ ______________________
   $\therefore$ __________ ______________________
3. P1 $((t \vee p) \rightarrow r$ ______________________
   P2 $t \rightarrow (t \vee p)$ ______________________
   $\therefore$ __________ ______________________
4. P1 $s \Rightarrow q$ ______________________
   P2 $2 \sim q$ ______________________
   $\therefore$ __________ ______________________

LECCIÓN 2

Otras Inferencias Lógicas

Clase 5
Sub Competencias:

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración Reconocer y aplicar la demostración directa
- Reconocer y aplicar las dilema constructivo,la absorción la conjunción y la adición y la simplificación en el análisis de razonamientos lógicos.

Si se tienen dos implicaciones unidas por la conjunción y la disyunción de los antecendentes de la implicación, entonces podemos conlcuir la conjuncion de los consecuentes de las implicaciones.

.Si se tiene una implicación entre dos premisa, podemos concluir la implicación del antecedente con la conjunción del consecuente y el antecedente.

Dilema constructivo (D.C)

- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$
- $p \vee r$
- $\therefore q \vee s$

Silogismo Hipotético (S: H)
Si llueve hace frío
Si hace frío llevo un abrigo
luego si llueve llevo un abrigo

Absorción (Abs)

- $p \Rightarrow q$
- $\therefore p \Rightarrow (q \wedge p)$

Absorción (Abs.)
Si estudio aprendo
Estudio, luego aprendo y estudio

Simplificación (Simp.)

- $p \wedge q$
- $\therefore p$

Simplificación (Simp.)
Estudio y aprendo
Luego, estudio

Conjunción (Conj)

- p
- q
- ∴ p ∧ q

Conjunción (Conj.)
Estudio
Trabajo
Luego, etudio y trabajo

Si tenemos una expresión conjuntiva podemos concluir el antecedente

De dos premisas podemos formar la conjunción de ellas.

Adición (Ad.)

- p
- ∴ p ∨ q

Adición (Ad.)
Estudio
Luego, etudio ó trabajo

Si en un momento dado tenemos una premisa por adición podemos formar la disyuncion de esta con otra premisa.

Ejemplo 1

En el siguiente ejercicio se propone un ejemplo de construcción de una prueba de validez:
Si gana Gloria o Héctor, entonces pierden tanto Jorge como Kelly. Gloria gana. Por lo tanto, pierde Jorge.

Para analizar y construir la prueba de validez, es necesario utilizar un lenguaje simbólico que permita simplificar los enunciados, así:
Identificación de las premisas:

- G = Gloria gana
- H = Héctor gana
- J = Jorge pierde
- K = Kelly pierde

Por lo tanto la prueba de validez será:

1. $(G \vee H) \Rightarrow (J \wedge K)$
2. G
   ∴ J (Se lee: de donde J, J es la premisa que esperamos demostrar).
3. $G \vee H$ 2, Ad. (por Adición en 2)
   Necesitamos llegar a J desde la G, observamos que para llegar a la J se requiere $G \vee H$, como sólo tengo la G, adiciono H. Por lo

tanto aplico la ley de Adición en la premisa 2, lo que se escribe 2, Ad. (Ad indica que apliqué la ley de adición)

4. $J \wedge K$ 1,3 M.P
5. $J \wedge K$ es la consecuencia de $G \vee H$ la ley de inferencia M.P (Modus Ponendo Ponens) con las premisas 1 y 3. 4, Simp. Tenemos $J \wedge K$, pero solo nos interesa la J, por lo tanto simplificamos. Aplicando la ley de inferencia de simplificación en la premisa 4.

Ejercicio 1

Analizar y construir la prueba de validez, es necesario utilizar un lenguaje simbólico que permita simplificar el enunciado siguiente:

- "Si sigue lloviendo, entonces el río crecerá. Si sigue lloviendo. Si sigue lloviendo y el río crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas".

- "Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad".

- "O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o bien los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error".

LECCIÓN 2

Inferencias Lógicas

Clase 6
Sub Competencias:

- Comprender, identificar y construir leyes de inferencia.
- Aplicar las leyes de inferencia a en la demostración.
- Reconocer y aplicar la demostración directa.
- Reconocer y aplicar las silogismo disyuntivo para el análisis de razonamientos lógicos.

Para tener certeza de aplicar correctamente las reglas debemos de discriminar la forma de cada una de ellas.

Pasos a seguir para inferir el valor de verdad de un frase

A medida que se avance en el estudio de las reglas de inferencias se encontrará que éstas son usadas continuamente en el lenguaje natural. Las usamos para obtener conclusiones que consideramos normalmente válidas.

Lo que se hará ahora, es detenerse a analizar porqué consideramos a estas inferencias válidas, ejercitaremos la construcción de la prueba de validéz de la inferencia lógica que pueden determinar la validez de la misma, a la vez aprender a identificar las diferentes inferencias lógicas en los razonamientos que hacemos continuamente.

El éxito para abordar adecuadamente las premisas a problemas de inferencia, consiste en realizar un análisis que permita identificar una estrategia y saber cuales reglas aplicar.

Para aplicar las reglas de inferencia:

1. Analice el problema a resolver, teniendo en cuenta que debe demostrar y las premisas proporcionadas con el problema. Debe crear o ingeniar una estrategia de forma que le permita llegar al resultado (o demostración) que le indica el problema.

2. En las demostraciones se tienen que utilizar todas las premisas proporcionadas con el problema (todas las premisas que participan).

3. Para realizar una demostración se puede utilizar una o varias reglas de inferencia. También se puede repetir la utilización de una o varias de ellas.

4. Antes identifique que tipos de proposición tiene en las premisas del problema.

5. Es importante tener claridad de a que tipo de proposición aplica cada regla, para así comprender como y en que momento las puede utilizar.

Ejemplo 1

En el siguiente ejercicio se propone un ejemplo de construcción de una prueba de validez:

- "Si sigue lloviendo, entonces el río crecerá. Si sigue lloviendo".
- "Si sigue lloviendo y el río crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas".
- "Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad".
- "O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o bien los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error".

Es importante reconocer correctamente las premisas.

Para analizar y construir la prueba de validez, es necesario utilizar un lenguaje simbólico que permita simplificar los enunciados, así:

Identificación de las premisas:

C: continúa lloviendo
R: el río crece
P: el puente es arrastrado por las aguas
S: un solo camino es suficiente para toda la ciudad
E: los ingenieros han cometido un error

Se debe interpretar en la frase como estas premisas están conectadas para posteriormente elaborara el análisis con las reglas de inferencia.

Por lo tanto la prueba de validez será:

1. $C \Rightarrow R$
2. $(C \wedge R) \Rightarrow P$
3. $(C \Rightarrow P) \rightarrow \neg S$
4. $S \vee E$ $\qquad /\therefore E$

----

5. $C \Rightarrow (C \wedge R)$ $\qquad$ *1, Abs.*
6. $C \Rightarrow P$ $\qquad$ *5,2, S. H.*
7. $\sim S$ $\qquad$ *3,6, M. P.*
8. E $\qquad$ *4,7, D. C.*

Ejemplo 2

- Si no ocurre, que si un objeto flota en el agua entonces es menos denso que el agua, entonces se puede caminar sobre el agua. Pero no se puede caminar sobre el agua.
- Si un objeto es menos denso que el agua, entonces puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.
- Si puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso, entonces el objeto flotará en el agua.
- Por tanto, un objeto flotará en el agua si y sólo si es menos denso que el agua.

Utilizando el siguiente lenguaje formal:

P: un objeto flota en el agua
Q: es menos denso que el agua
R: se puede caminar sobre el agua
S: puede desplazar una cantidad de agua igual a su propio peso.

Las premisas en forma simbólica son:

1. $\neg(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
2. $\sim R$
3. $Q \Rightarrow S$
4. $S \Rightarrow P$ $\quad\quad\quad /\therefore P \leftrightarrow Q$

Demostrar $P \Leftrightarrow Q$ equivale a demostrar que $P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$.

$P \Rightarrow Q$	Por MPP entre 1 y 2
$Q \Rightarrow P$	Por S. H entre 3 y 4

Ejercicio 1

Analizar y construir la prueba de validez, es necesario utilizar un lenguaje simbólico que permita simplificar el enunciado siguiente:

- Si un hombre se orienta siempre por su sentido del deber, tiene que renunciar al goce de muchos placeres, y si se guía siempre por su deseo de placer, a menudo olvidará su deber.

- O bien un hombre se guía siempre por su sentido del deber, o bien siempre se orienta por su deseo de placer.

- Si un hombre se guía siempre por su sentido del deber, no descuidará a menudo su deber, y si siempre se guía por su deseo de placer, no renunciará al goce de muchos placeres.

- Luego, un hombre debe renunciar al goce de muchos placeres si y sólo si no descuida a menudo su deber.

Tomando el siguiente lenguaje formal:

P: se orienta por su sentido del deber
Q: renuncia al goce de placeres
R: se guía por su deseo de placer
S: olvidará su deber

Las premisas quedan así:

1. $P \Rightarrow Q$
2. $R \Rightarrow S$
3. $P \vee R$
4. $P \Rightarrow \neg S$
5. $R \Rightarrow \neg Q$ $\quad\quad /\therefore Q \Leftrightarrow \neg S$

11

LÓGICA SIMBÓLICA

PAUAHTUN O BACAB

Representación de uno de los dos personajes míticos que soportan los cielos, de acuerdo a la cosmogonía maya. En Copán se puede apreciar este personaje representado por un anciano desdentado, de cuya escultura completa solamente se conserva la cabeza que tiene un tocado de lirio de agua anudado, el cual es un símbolo de fertilidad y del inframundo.

(Descripción facilitada por el Instituto Hondureño de Antropología e Historia)

Fotografía: José Antonio Ramos Cartagena

República de Honduras
Secretaría de Educación