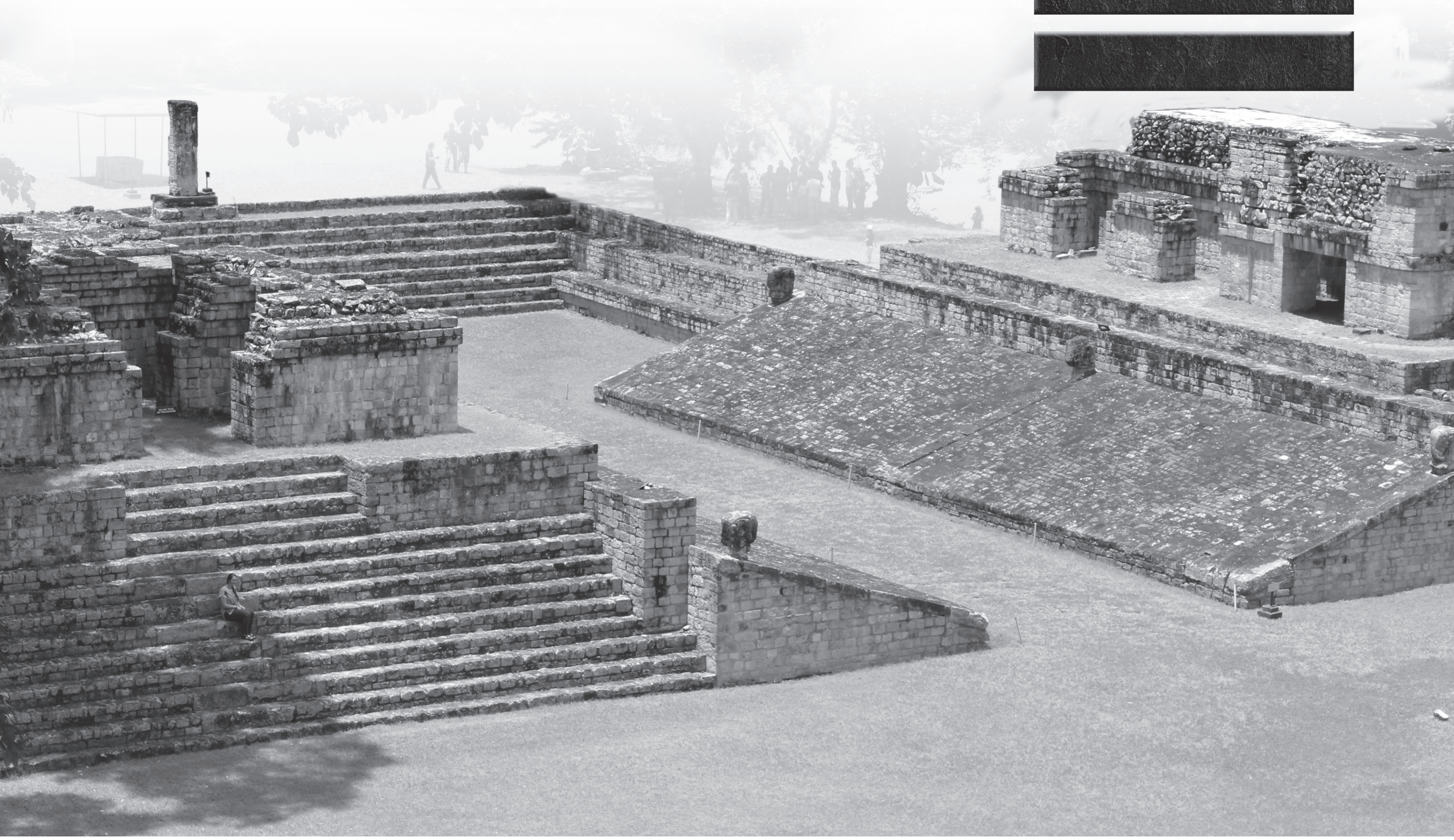
República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA III

Guía del Docente

Undécimo grado

11



Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

La Secretaría de Educación presenta la **"Guía del Docente"** de Matemática para Educación Media, que tiene su fundamento en el Plan de Estudio y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, misma que fue elaborada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con esta Guía se pretende apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido y las formas de aprendizaje. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos que impacten en la motivación de los jóvenes y como consecuencia, se incremente la retención y aprobación, y se mejore el rendimiento académico de los estudiantes en los centros educativos.

En la búsqueda del cambio hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes realicen una labor educativa con calidad y pertinencia y la Secretaría de Educación a su vez, se compromete para que la población tenga acceso a una educación, que mejore en cada generación.

Secretaría de Estado
en el Despacho de Educación

Instructivo de uso
“Guía del Docente”

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar los contenidos para cada grado, prescritos en el Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, usando como parte del proceso el Libro del Estudiante.

Hay un plan de estudio para todas las clases y se espera que el docente lo ajuste según el rendimiento y el entorno de sus estudiantes.

En el Libro del Estudiante hay una diversidad de ejercicios para garantizar el trabajo individual. Muchos de éstos podrán ser utilizados como tareas para resolver en casa y deben ser revisados individualmente o en forma colectiva, siempre dirigida por el docente para afianzar el conocimiento.

Para mayor información véase la “Estructura y Aplicación de la Guía del Docente”.

Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

Desarrollo de Clases de cada Unidad

ESTRUCTURA Y APLICACIÓN DE LA GUÍA DEL DOCENTE

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas. Si el Docente aprovecha esta Guía, le ayudará a desarrollar su clase de manera efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura Global: Está formada por dos partes: la "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía y la forma como se utiliza y el "Desarrollo de Clases de cada Unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la Unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales tomados del Plan de Estudios y Programas Curriculares (PEPC). La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el PEPC, utilizando eficazmente el Libro del Estudiante (LE), para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar la clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo, se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la Programación Semestral y Desarrollo de Clases de cada Unidad.

4. Programa Semestral

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el PEPC, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan semestral de modo que se cumplan todos los temas.

Desarrollo de Clases de cada Unidad

Está divida en cinco secciones:

1) Competencias de la unidad: Presenta las competencias que se pretenden desarrollar en el estudiante en el desarrollo de la unidad.

2) Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado por semestre, relacionándolos con contenidos de grados anteriores y con las matemáticas siguientes.

3) Plan de estudio de la unidad: Presenta la distribución de las clases en cada lección.

4) Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.

5) Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, la evaluación y el proceso de enseñanza.

1) Competencias de la unidad

Se presentan las competencias para cada unidad, tal y como están descritas en el PEPC Área de Matemáticas.

2) Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase. Para el menor manejo del contenido, es mejor darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que lo necesiten.

3) Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la Guía.

4) Puntos de lección

Como cada unidad está dividida en lecciones, en esta parte se explican los puntos en que se deben prestar mayor atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por lo cual se desarrolla el plan de clase.

5) Desarrollo de clase

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, la evaluación y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

a. Objetivo

Se representa el objetivo de la clase (hay casos donde un sólo aplica a dos o más clases seguidas). Es necesario tener éste claro para cada clase.

b. Evaluación

Se indican los ejercicios que el estudiante debe realizar en forma independiente o grupal considerando la estrategia que decida el docente con el propósito de verificar el logro del objetivo.

En caso de que existan dificultades en la mayoría de los estudiantes el docente debe reforzar esa parte.

c. Proceso de enseñanza

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes concluir en la regla, definición, principio, etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en algunas clase se utiliza la simbología M, RP y *.

M: Significa preguntas o indicaciones de los docentes a los estudiantes.

No es recomendable hace preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como "si" y "no". Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los concentre en el tema de la clase.

RP: Significa reacciones previsibles de los estudiantes.

Hay que preveer las reacciones de los estudiantes, incluyendo las respuestas equivocadas. Para corregir las respuestas equivocadas, no es bueno decir solamente <<esta mala>> y enseñar la respuesta correcta o hacer que contesten otros niños.

Hay que dar tiempo para que piensen porque está equivocada, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

***:** Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

En algunos casos en el LE aparecen ciertas clase utilizando asterisco (*) esto significa que son clases o ejemplos, ejercicios opcionales que el docente puede desarrollar dependiendo el nivel de entendimiento de los estudiantes.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

- La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo, propone como se puede evaluar éste, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
- No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
- Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
- Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores cada 5 ejercicios, o una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
- Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
- La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible. Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:
  – Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
  – En el receso después de la clase.
  – En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo fila para que el docente corrija)

En la Guía del Docente se indica en la página del Libro del Estudiante las partes punteadas que se sugieren que el docente debe tener en la pizarra, sin embargo cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra.

La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, clases, ejercicios de la lección (algunas unidades no tienen ejercicios de lección). Cada clase tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la clase. En la orientación de estos ejemplos es importante hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de resolverlo.

Para resaltar los puntos importantes de la clase estos se remarcan.

En el LE se proponen ejercicios de lección esto con el objetivo de suministrar suficientes ejercicios para que el estudiante pueda resolver en el aula o como tarea en casa. El docente deberá utilizarlos de acuerdo a conveniencia ya que no se tiene tiempo estipulado para esta sección.

La página del LE tiene dos columnas. Una columna de contenidos y otra columna de recordatorios, sugerencias o notas. En el desarrollo de cada clase se encuentran varios iconos, que a continuación se explica cada uno.

Cada ícono representa:

Icono	**Explicación**
	El desarrollo de un ejemplo.
	La propuesta de ejercicios o problemas.
	Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro a la vez algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.
	Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.
	Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.
	Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

A continuación se explica el significado y simbología de la página del desarrollo de clases.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases.

Número de unidad, lección y clase.

Objetivo de cada clase.

Actividades.

Indicador de evaluación por objetivo.

Tiempo indicado por actividad.

Preguntas comentarios e indicaciones del docente.

Reacciones previsibles de los estudiantes.

Página del LE.

Orientaciones Metodológicas.

Puntos y sugerencias de la enseñanza.

Soluciones de los ejercicios propuestos.

Unidad III. Lección 2.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calculan la probabilidad de un evento.
[B] Resuelven problemas cotidianos aplicando probabilidad.

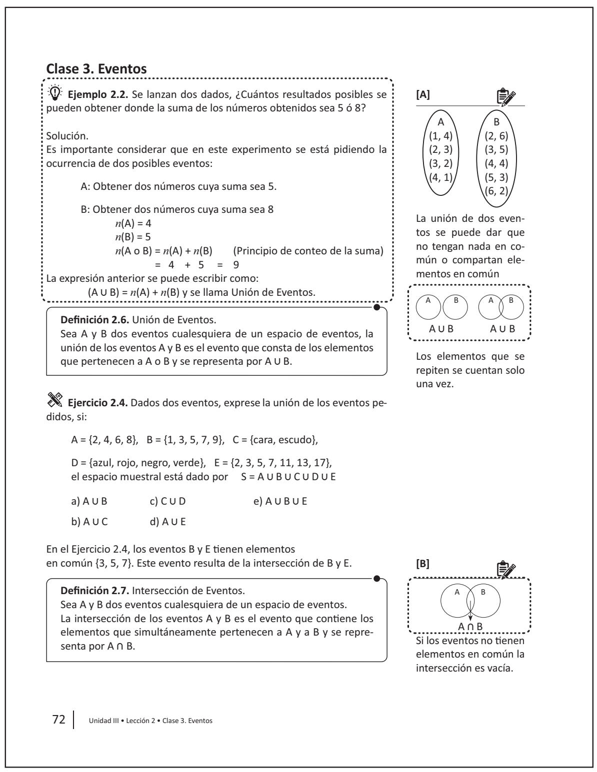
Evaluación: Ejercicio 2.4

[A] Unión de eventos

Ejemplo 2.2
(10 min)
* Tratar de resolver sin consultar el LE
M: ¿Cuál es el espacio muestral que se obtiene de lanzar los dados?
RP: Encuentran el espacio tomando en cuenta que S tiene 6^2 elementos.
M: ¿Cuál de los resultados da una suma de 5?
RP: (1, 4) (2, 3) (3, 2) (4, 1)
M: ¿Cuáles de los resultados da una suma de 8?
RP: (2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2)

*Aplicando el principio de conteo de la suma se encuentra el total de casos que dan 5 ó 8.

Concluir: Se deduce la expresión de la unión de eventos
A ∪ B = n(A) + n(B)


Clase 3. Eventos

Ejemplo 2.2. Se lanzan dos dados, ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener donde la suma de los números obtenidos sea 5 ó 8?

Solución.
Es importante considerar que en este experimento se está pidiendo la ocurrencia de dos posibles eventos:

A: Obtener dos números cuya suma sea 5.

B: Obtener dos números cuya suma sea 8
n(A) = 4
n(B) = 5
n(A o B) = n(A) + n(B) (Principio de conteo de la suma)
= 4 + 5 = 9
La expresión anterior se puede escribir como:
(A ∪ B) = n(A) + n(B) y se llama Unión de Eventos.

Definición 2.6. Unión de Eventos.
Sea A y B dos eventos cualesquiera de un espacio de eventos, la unión de los eventos A y B es el evento que consta de los elementos que pertenecen a A o B y se representa por A ∪ B.

Ejercicio 2.4. Dados dos eventos, exprese la unión de los eventos pedidos, si:

A = {2, 4, 6, 8}, B = {1, 3, 5, 7, 9}, C = {cara, escudo},

D = {azul, rojo, negro, verde}, E = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17},
el espacio muestral está dado por S = A ∪ B ∪ C ∪ D ∪ E

a) A ∪ B c) C ∪ D e) A ∪ B ∪ E
b) A ∪ C d) A ∪ E

En el Ejercicio 2.4, los eventos B y E tienen elementos en común {3, 5, 7}. Este evento resulta de la intersección de B y E.

Definición 2.7. Intersección de Eventos.
Sea A y B dos eventos cualesquiera de un espacio de eventos.
La intersección de los eventos A y B es el evento que contiene los elementos que simultáneamente pertenecen a A y a B y se representa por A ∩ B.

[A]

A: (1, 4) (2, 3) (3, 2) (4, 1)
B: (2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2)

La unión de dos eventos se puede dar que no tengan nada en común o compartan elementos en común

A ∪ B A ∪ B

Los elementos que se repiten se cuentan solo una vez.

[B]

A ∩ B

Si los eventos no tienen elementos en común la intersección es vacía.

72 | Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Eventos

Ejercicio 2.4
(10 min) Solución:
a) AUB={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
b) AUC = {2, 4, 6, 8, cara escudo}
c) CUD = {cara, escudo, azul, rojo, negro, verde}
d) AUE = {2,3,4,5,6,7,8,11,13,17}
e) AUBUE = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17}

[B] Intersección de Eventos.
(7 min) *De forma similar que en [A] desarrollar la clase para definir la intersección de eventos.

104 | Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Eventos

4. Programación Semestral:

Unidad (horas)	Contenido	Pág. de GD (Pág. de LE)
I. Geometría elemental (13 horas)	Congruencia de triángulos	2 – 36 (2 – 18)
	Semejanza de triángulos	37 – 41 (19 – 23)
II. Geometría analítica (22 horas)	Parábola	42 – 54 (26 – 32)
	Circunferencias	55 – 60 (33 – 36)
	Elipse	61 – 72 (37 – 44)
	La Hipérbola	73 – 85 (45 – 54)
III. Probabilidad (17 horas)	Conteo	86 – 99 (56 – 67)
	Probabilidad	100 – 121 (68 – 89)

Desarrollo de Clases

Matemáticas III
Unidad I

Geometría elemental

1. Competencias de la Unidad

1. Demostrar la congruencia y semejanza de triángulos aplicando las propiedades y postulados.
2. Utilizar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
3. Demuestran propiedades de los cuadriláteros.

2. Relación y Desarrollo

Matemáticas 8º

Congruencia de triángulos
Cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

Matemáticas 9º

Semejanza de triángulos
Polígonos regulares y el círculo

Matemáticas III

Unidad I
- Lección 1: Congruencia de triángulos
- Lección 2: Semejanza de triángulos

3. Plan de Estudio de la Unidad (13 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Congruencia de triángulos	1	Criterios de congruencia de triángulos	LLL, LAL, ALA Congruencia (≅)
	2	Características de los cuadriláteros	Paralelogramo
	3	Teorema de los dos puntos	Paralelismo (∥)
	4, 5 y 6	Propiedad de la mediatriz	Circuncentro
	7, 8	Bisectriz	Incentro
	9, 10	Baricentro	Medianas
		Ejercicios de la lección	
2. Semejanza de triángulos	1	Definición de semejanza, criterios de semejanza de triángulos	
	2	Semejanza y razón de área	
	3	Semejanza y razón de volumen y área de superficie	
		Ejercicios de la lección	

Puntos de lección

Lección 1: Congruencia de triángulos

En octavo grado se estudió la congruencia de triángulos y los criterios que determinan cuando dos triángulos son congruentes haciendo demostraciones sencillas de manera intuitiva, en esta lección se trata de demostrar las teoremas y corolarios sobre congruencia de triángulos y cuadriláteros aprendidos en años anteriores, considerando que los estudiantes tienen dominio al momento de establecer correspondencias entre lados y ángulos de figuras congruentes.

La demostración de teoremas utilizando la congruencia de triángulos puede resultar difícil para los estudiantes, ya que exige un nivel de razonamiento más elevado, por lo que en el libro se proponen ejemplos y ejercicios donde las demostraciones son guiadas para luego dar paso a resolver ejercicios no guiados, además se tratan los puntos notables de los triángulos incluyendo construcciones con regla y compás para verificación de propiedades.

Lección 2: Semejanza de triángulos

La definición de semejanza es un poco difícil de comprender por parte de los estudiantes. La de la Clase 1 es una forma de enseñarla y aprenderla. La igualdad entre la razón de semejanza y entre los lados correspondientes no está demostrada en el libro, por su complejidad. Tampoco los criterios de semejanza de triángulos.

Unidad I. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Demostrar aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

Evaluación: [A] Resolver Ejercicio 1.2.
[B] Resolver Ejercicio 1.4.

Desarrollo de Clases

[A] Establecer los criterios de congruencia de triángulos (10 min)

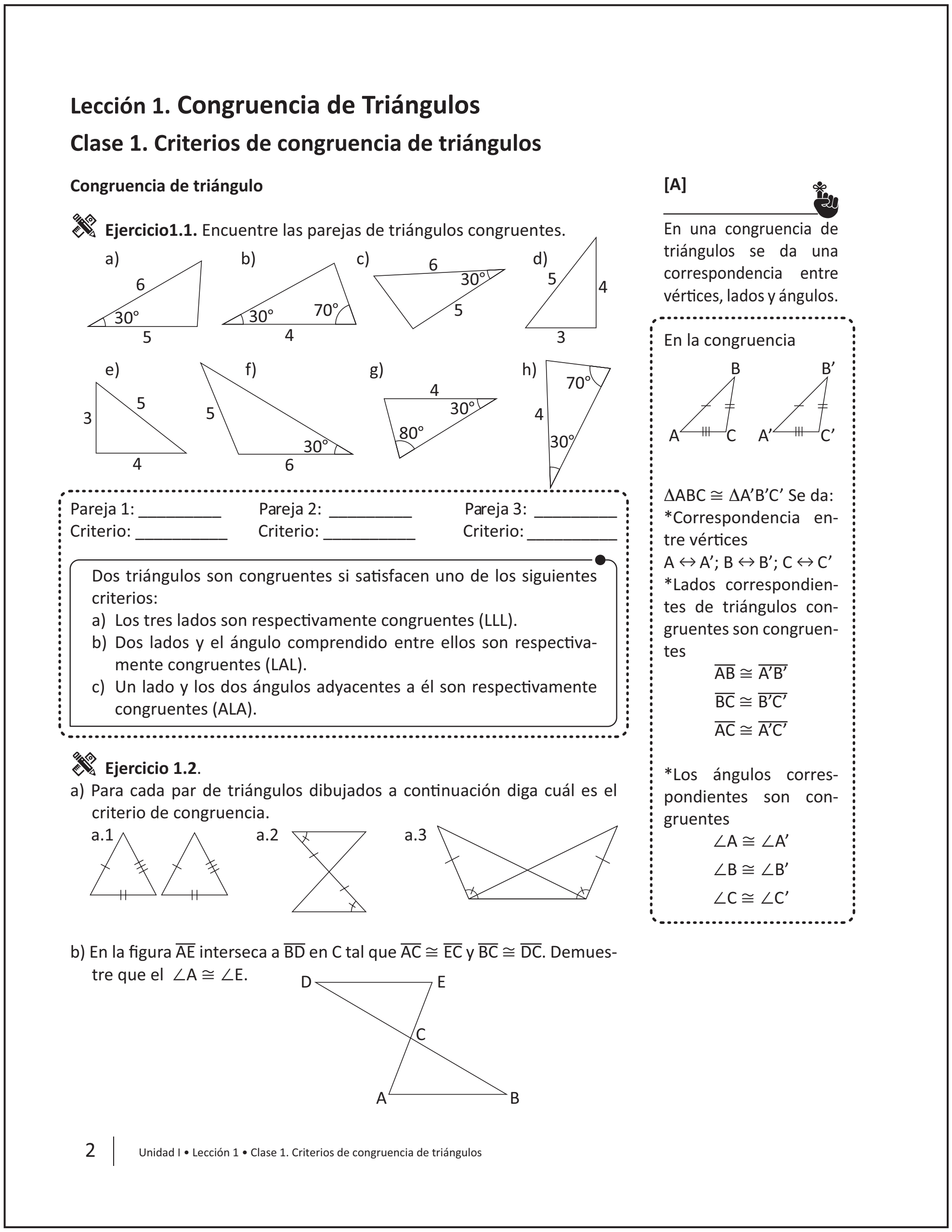
Ejercicio 1.1

Observa la figura ¿Cuáles son las parejas de triángulos congruentes y que criterio lo determina?

Solución:

Pareja 1: a y c (LAL)
Pareja 2: b y g (ALA)
Pareja3: d y e (LLL)
M: ¿Qué puede concluir del triángulo b y h? Concluir.
RP: No son congruentes porque el lado que mide 4 no está comprendido entre los ángulos de 30° y 70° en el triángulo h.

- Hacer la misma pregunta para el caso del triángulo a y f.
- Es importante hacer que los estudiantes establezcan la correspondencia entre vértices, ángulos y lados entre triángulos congruentes.
- Concluir con los criterios de congruencia para cada caso.



Lección 1. Congruencia de Triángulos

Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos

Congruencia de triángulo

Ejercicio1.1. Encuentre las parejas de triángulos congruentes.

Pareja 1: __________ Pareja 2: __________ Pareja 3: __________
Criterio: __________ Criterio: __________ Criterio: __________

Dos triángulos son congruentes si satisfacen uno de los siguientes criterios:

a) Los tres lados son respectivamente congruentes (LLL).
b) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (LAL).
c) Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes (ALA).

Ejercicio 1.2.

a) Para cada par de triángulos dibujados a continuación diga cuál es el criterio de congruencia.

a.1 a.2 a.3

b) En la figura $\overline{AE}$ interseca a $\overline{BD}$ en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demuestre que el $\angle A \cong \angle E$.

[A]

En una congruencia de triángulos se da una correspondencia entre vértices, lados y ángulos.

En la congruencia

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ Se da:
*Correspondencia entre vértices
$A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$
*Lados correspondientes de triángulos congruentes son congruentes
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

*Los ángulos correspondientes son congruentes
$\angle A \cong \angle A'$
$\angle B \cong \angle B'$
$\angle C \cong \angle C'$

2 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos

Ejercicio 1.2 (12 min)

En clase pueden resolver el Ejercicio a), b) y c); el resto para tarea en casa. Solución en pág. 21.

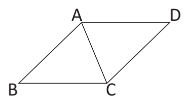
- Discutir en la pizarra las soluciones presentadas por los estudiantes.
- Es posible que algunos estudiantes tengan dificultades con las demostraciones por lo que se sugiere que el maestro apoye haciendo el esquema de la misma para indicar el camino a seguir y de esa manera desarrollar en los estudiantes el razonamiento deductivo.

Objetivo: **[B]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos a cuadriláteros

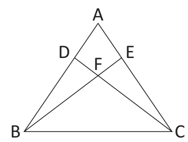
Clase 1
(Continuación)

Evaluación: [B] Resolver ejercicio 1.4

c) La figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.
Demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

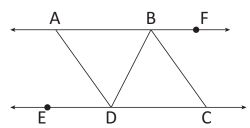


d) En el triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados congruentes AB y AC respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Demuestre que:
d1. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.
d2. Si F es el punto donde se cortan $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$



En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y viceversa.

e) En la figura las rectas AB y DC son paralelas, $\overline{DA}$ biseca el $\angle BDE$ y $\overline{BC}$ biseca el $\angle DBF$. Demuestre:
e1. $\Delta DAB \cong \Delta BCD$
e2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

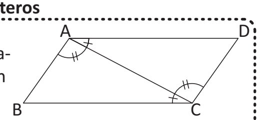


Aplicación de congruencia a los cuadriláteros

[B]

La relación de los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas paralelas y una transversal.

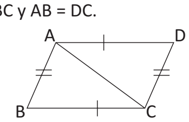
Ejercicio 1.3. Demuestre que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. En el ΔABC y ΔCDA, el $\angle BAC \cong \angle DCA$ y $\angle BCA \cong \angle DAC$	$\boxed{\quad}$
2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$	$\boxed{\quad}$
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 1, 2 y criterio de congruencia $\boxed{\quad}$
4. $\overline{AB} \cong \boxed{\quad}$ $\overline{BC} \cong \boxed{\quad}$	Por 3 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

Teorema 1.1
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Ejercicio 1.4. En el cuadrilátero ABCD, AD = BC y AB = DC.
Demuestre lo siguiente:
a) Los ΔABC y ΔCDA son congruentes
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



Unidad I • Lección 1 • Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos | 3

[B] Aplicación de congruencia a cuadriláteros.
(10 min.)

Ejercicio 1.3
Demostrar que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
- Dibujar el paralelogramo en la pizarra ¿Qué nos piden demostrar?
  RP: que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
  M: Justifique cada uno de los pasos de la demostración en el Ejercicio 1.3 soluciones
  RP: 1) alternos internos y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ respectivamente.
  2) congruencias del mismo segmento
  3) ALA
  4) $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.
- Pasar estudiantes a la pizarra para completar la demostración.
- Concluir que en un paralelogramo sus lados opuestos son congruentes.

Ejercicio 1.4
(13 min)
Solución en pág. 23

Concluir que los criterios de congruencia de triángulos se pueden utilizar para demostrar teoremas de los cuadriláteros.

Nota: Puede dejar más ejercicios complementarios para la casa de la sección de ejercicios de la unidad que le permitan al estudiante desarrollar habilidades en la demostración de teoremas.
Esta clase se puede desarrollar en una hora o en dos dependerá del desempeño y los conocimientos previos que tengan los estudiantes.

Unidad I. Lección 1.
Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos y demostrar las condiciones de suficiencia para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

Evaluación: [A] Resolver Ejercicio 1.5

[A] Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo.

Ejemplo 1.1.
(15 min)

M: Escribir el enunciado y dibujar el paralelogramo en la pizarra. ¿Cuál es la hipótesis y cuál es la tesis?

RP: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{CB} \cong \overline{AD}$ La tesis es ABCD es un paralelogramo.

M: ¿ Qué criterio determina la congruencia de los ΔABC y ΔCDA.

RP: LLL.

M: ¿Cómo son los $\angle CAB$ y $\angle ACD$; $\angle BCA$ y $\angle DAC$?

RP: Son congruentes y alternos internos.

M: ¿Qué se puede concluir de los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$?

RP: Son paralelos.

Concluir que ABCD es un paralelogramo por la definición.

Teorema 1.2

Concluir que cualquier cuadrilátero que reúna una de las condiciones del recuadro es un paralelogramo.

Ejercicio 1.5
(12 min)

Solución en pág. 23.

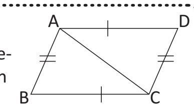
En clase puede resolver a) y dejar como tarea en casa b) y c) y el resto desarrollarlo en casa como tarea. En el caso de que el tiempo finalice asigne como tarea.

Clase 2. Características de los cuadriláteros

Condiciones para ser paralelogramo

[A]

Ejemplo 1.1. Demuestre que un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



Proposición	Justificación
1. En el ΔABC y ΔCDA $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$	Congruencia del mismo segmento
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 1, 2 y criterio de congruencia LLL
4. $\angle CAB \cong \angle ACD$ $\angle BCA \cong \angle DAC$	Por 3 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
5. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	Por 4 y condición de paralelismo (ángulos alternos internos)
6. ABCD es un paralelogramo.	Por 5 y definición de paralelogramo.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

Teorema 1.2

Condiciones para ser un paralelogramo

Un cuadrilátero es un paralelogramo si cumple una de las siguientes condiciones:

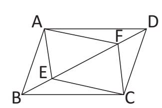
a) Dos pares de lados opuestos son paralelos. (Definición)
b) Dos pares de lados opuestos son congruentes.
c) Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
d) Las diagonales se cortan en el punto medio.
e) Un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.

Otra condición para ser un paralelogramo: Los ángulos consecutivos son suplementarios.

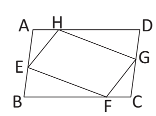
Ejercicio 1.5.

a) Demuestre las condiciones c, d y e para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

b) En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



c) Se toman 4 puntos E, F, G y H en los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestre que EFGH es un paralelogramo.



Tenga en cuenta las condiciones para ser un paralelogramo al demostrar b y c.

4 | Unidad I • Lección 1 • Clase 2. Características de los cuadriláteros

Nota: En el I y II ciclo se estudió las propiedades y las condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, en el III ciclo se continua estudiando pero se le da mayor énfasis a las construcciones y algunas demostraciones sencillas, por lo que es importante que en este grado el estudiante demuestre estos teoremas que le servirán como base para demostrar otros que involucran cuadriláteros.

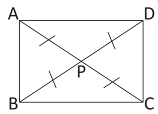
Objetivo: **[B]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos y demostrar las condiciones de suficiencia para que un paralelogramo sea un rectángulo, cuadrado o un rombo.

Clase 2
(Continuación)

Evaluación: [B] Resolver ejercicio 1.6
Resolver ejercicio 1.7

Rectángulos, rombos y cuadrados

Ejercicio 1.6. Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio es un rectángulo. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. PA = PB = PC = PD	Hipótesis
2. ΔPAB, ΔPBC, ΔPCD, ΔPDA son triángulos ☐	☐
3. ∠APD ≅ ∠CPB, ∠APB ≅ ∠CPD	☐
4. ΔPAD ≅ ΔPCB, ΔPAB ≅ ΔPCD	☐
5. m∠PAD = ☐ = ☐ = ☐ y m∠PAB = ☐ = ☐ = ☐	☐
6. m∠DAB = m∠ABC = m∠BCD m∠CDA = 90°	Por 5 y (suma de los ángulos internos de cuadrilátero) ÷ 4
7. ABCD es un rectángulo.	☐

Teorema 1.3
Las diagonales de un:
Rectángulo son congruentes y se cortan en el punto medio.
Rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
Cuadrado son congruentes y perpendiculares y se cortan en el punto medio.

Ejercicio 1.7.

a) Demostrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio entonces este es un cuadrado.

b) Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

[B]

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.

Es importante saber que:
Todo cuadrado es un rectángulo.
Todo cuadrado es un rombo.
La inversa no se cumple.

Unidad I • Lección 1 • Clase 2. Características de los cuadriláteros | 5

[B] Rectángulos rombos y cuadrados

Ejercicio 1.6
(10 min)

M: Escriba el enunciado en la pizarra y dibuje el paralelogramo.
Antes de que los estudiantes abran el libro puede hacer preguntas como las siguientes: ¿Cuál es la hipótesis? ¿Qué datos nos dan en el teorema? ¿Qué nos piden demostrar?

Permitir que los estudiantes sugieran una estrategia para demostrar este ejercicio en el caso de que no hayan ideas entonces que completen las casillas en blanco de la demostración dada.

Solución en pág. 25.

- Concluir que la figura es un rectángulo cuando las diagonales cumplen ciertas características.

Ejercicio 1.7. (8 min). Solución en pág. 26.
Si el tiempo no ajusta resolver como tarea.

Unidad I. Lección 1.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Verificar el teorema de los dos puntos a partir de una construcción.
[B] Demostrar y aplicar el teorema de los dos puntos.

Evaluación: [A] Realizar la construcción del ejercicio 1.8
[B] Resolver los ejercicios 1.9, 1.10, 1.11

Materiales: Regla y escuadras.

[A] (10 min)

Ejercicio 1.8
- Para realizar ésta construcción se debe verificar que los estudiantes tengan sus instrumentos de medición y si es necesario, recordarles como se verifica el paralelismo.

- Puede presentar al menos dos resultados en la pizarra, para que los estudiantes lleguen a generalizar los resultados y deducir el teorema.

Se omite solución.

[B] (20 min)

Ejemplo 1.2
- Realizar en clase la demostración del teorema, al menos la parte 1), ésto les servirá de guía para las demostraciones propuestas en los ejercicios.

Ejercicio 1.9
- Asignar el ejercicio 1.9 en clase, éste permite aplicar el teorema directamente, utilizando medidas específicas.

Solución en pág 26.

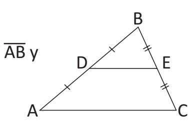
Clase 3. Teorema de los dos puntos

Ejercicio 1.8.
Construya:
- Dibuje un ΔABC
- Marque los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, nombrándolos como D y E respectivamente
- Trace $\overline{DE}$

Verifique:
- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- Compare DE con respecto a AC.

El resultado anterior se cumple por el siguiente teorema.

Teorema 1.4
Teorema de los dos puntos
En el ΔABC, D y E son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $DE = \frac{1}{2}AC$.



[A]
En el Ejercicio 1.8, utilice regla para las mediciones y escuadras para verificar el paralelismo.

[B]
Teorema de los dos puntos también se llama "Teorema del segmento medio de un triángulo" y "Teorema del conector de puntos medios".

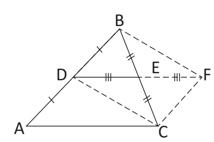
Ejemplo 1.2. Demostración de Teorema de los dos puntos. Utilice la siguiente construcción auxiliar: Sea F el punto que pertenece a la prolongación de $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, tal como se muestra en la figura.

1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

Proposición	Justificación
1. $\overline{BD} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
2. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$	Hipótesis
3. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$	Hipótesis
4. E es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$	Por 2 y 3
5. BDCF es un paralelogramo	Por 4 y condición de paralelogramo
6. $\overline{BD} \cong \overline{FC}$	Por 5
7. $\overline{DA} \cong \overline{FC}$	Por 1 y 6
8. $\overline{DA} \parallel \overline{FC}$	Por 5 y ser A, D, B colineales
9. ADFC es un paralelogramo	Por 5, 8 y condición de paralelogramo
10. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	Por 9 y definición de paralelogramo

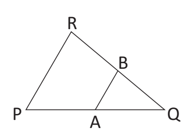
2) $DE = \frac{1}{2}AC$

Proposición	Justificación
1. DF = 2DE	E es punto medio del $\overline{DF}$.
2. DF = AC	ADFC es un paralelogramo
3. 2DE = AC	Por 1 y 2
4. $DE = \frac{1}{2}AC$	Por 3



Para realizar las demostraciones, debe analizar los teoremas de la lección anterior sobre congruencia de triángulos y sobre cuadriláteros.

Ejercicio 1.9. En el ΔPQR, A y B son los puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ respectivamente. Si RP = 16, $m\angle P = 58°$ y $m\angle Q = 38°$, obtenga AB y $m\angle BAQ$.



6 | Unidad I • Lección 1 • Clase 3. Teorema de los dos puntos

Nota: Para la demostración del teorema, se debe partir de una construcción auxiliar, los estudiantes deben utilizar el siguiente concepto:
- Condiciones suficientes para los paralelogramos.

Unidad I. Lección 1.

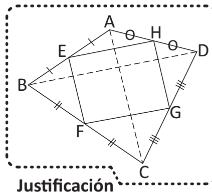
Clase 3

(Continuación)

Clase 4, 5 y 6

(Continúa en la siguiente página)

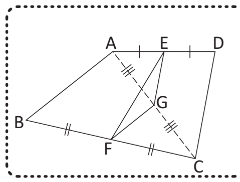
Ejercicio 1.10. Demuestre que el cuadrilátero EFGH que se obtiene uniendo los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. E, F, G y H son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ respectivamente	Hipótesis
2. En el ΔABD, $\overline{EH}$ || $\overline{BD}$	☐
3. En el ΔBCD, ☐	Teorema de los dos puntos
4. $\overline{EH}$ || $\overline{FG}$	Igualando 2 y 3
5. En ΔACD, $\overline{HG}$ || $\overline{AC}$	☐
6. ☐	Teorema de los dos puntos
7. $\overline{HG}$ || $\overline{EF}$	Igualando 5 y 6
8. EFGH es un paralelogramo.	☐

Para los ejercicios 1.10 y 1.11: Aplique el teorema del segmento medio de un triángulo a los triángulos que se forman con las diagonales.

Ejercicio 1.11.
En el dibujo $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y los puntos E y F son los puntos medios de los lados AD y BC respectivamente. El punto G es el punto medio de la diagonal AC, ¿Qué tipo de triángulo es ΔEFG?



Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

Propiedad de la mediatriz

[A]

Construcción

Ejercicio 1.12.
Construya:
- Trace un segmento, $\overline{AB}$
- Trace la mediatriz de $\overline{AB}$
- Coloque un punto P sobre la mediatriz, no colineal con A y B

Verifique:
- Compare PA con PB

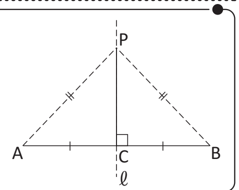
Lo anterior es una propiedad.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Teorema 1.5 Propiedad de la mediatriz
La recta ℓ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

1) Si P está en ℓ, entonces PA = PB

2) Si PA = PB, entonces P está en ℓ.



Unidad I • Lección 1 • Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz | 7

3. CA = CB… C es el punto medio del $\overline{AB}$.
4. ΔPAC ≅ ΔPBC… Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LLL.
5. $m\angle$ACP = $m\angle$BCP = 90°… Por 4 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes y ser ángulos adyacentes.
6. $\overline{PC} \perp \overline{AB}$… Por 5.
7. P está en ℓ y es la mediatriz. Por 3 y 6.

[B] Continuación
(15 min)

Ejercicio 1.10

- Para el Ejercicio 1.10 hacer énfasis en la sugerencia dada.
  Si los estudiantes pueden seguir el esquema del ejercicio 1.10, podrán desarrollar de manera similar la demostración del Ejercicio 1.11.

Solución en pág. 27.

Ejercicio 1.11

- Si no queda tiempo de desarrollar los últimos ejercicios puede asignarlos de tarea.

Solución en pág. 27.

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

[A]

Ejercicio 1.12

(25 min)
Los estudiantes deben concluir que PA = PB.

Demostración parte 2)
Se debe considerar la sugerencia y sólo el caso que el punto P sea distinto al punto C.

Solución:
1. PA = PB… Hipótesis.
2. PC = PC… Congruencia del mismo segmento.

Clase 4, 5 y 6
(Continuación)

Ejercicio 1.13
(20 min)
Para los ejercicios a) y b) Hacer énfasis en que apliquen la propiedad de la mediatriz.

Solución en pág. 27.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

[B] (45 min)

Ejercicio 1.14
Los estudiantes deben concluir que las mediatrices coinciden en un punto. Sería interesante comparar que no importa el tipo de triángulo que construyan, esto siempre se cumple.

Ejercicio 1.15. Demostración
Solución en pág. 28.

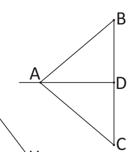
Demostración:
1) Si P está en ℓ, PA = PB

Proposición	Justificación
1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	C es punto medio del $\overline{AC}$.
2. $\angle ACP \cong \angle BCP$	Perpendicularidad (ángulos rectos).
3. $\overline{PC} \cong \overline{PC}$	Congruencia del mismo segmento
4. $\Delta PAC \cong \Delta PBC$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL
5. PA ≅ PB	Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

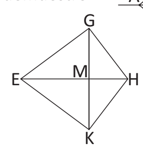
2) Demuestre que sí PA = PB, entonces P está ℓ.

Para la parte 2), debe llegar a demostrar que C es punto medio y que $m\angle ACP = m\angle BCP = 90°$

Ejercicio 1.13.
a) Si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el ΔABC es isósceles.



b) En la figura, M está en el $\overline{GK}$, GE = KE, GM = KM y H está en la recta EM. Demostrar que GH = KH.



En el ejercicio a), no utilice congruencia de triángulos en la demostración, emplee la propiedad de la mediatriz.

Circuncentro de un triángulo

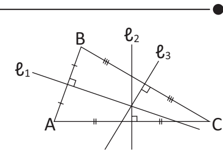
[B]

Construcción

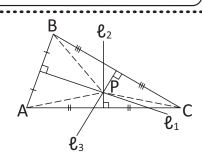
Ejercicio 1.14.
a) Construya el ΔABC
b) Trace las mediatrices de los lados del ΔABC.
c) ¿Qué observa respecto a las mediatrices? ¿Coinciden en un punto?

Dos o más rectas son **concurrentes** si hay un solo punto que está en todas ellas.

Teorema 1.6. Concurrencia de las mediatrices.
Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.



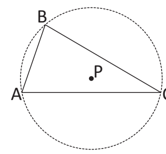
Ejercicio 1.15. Demuestre el teorema anterior considerando a P como punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P también está en la recta ℓ_3 y que PA = PB = PC.



8 | Unidad I • Lección 1 • Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

Ejercicio 1.16.
Utilice la construcción del Ejercicio 1.14 y nombre con P el punto de intersección de las mediatrices y trace una circunferencia con centro en P y con radio PA.
1) ¿Qué observa con respecto a la circunferencia y los vértices del triángulo?
2) ¿Cómo se llama este tipo de circunferencia?

Circunferencia circunscrita.



Es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo

Al punto P se le llama **circuncentro**.

Definición 1.1
El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama circuncentro del triángulo.

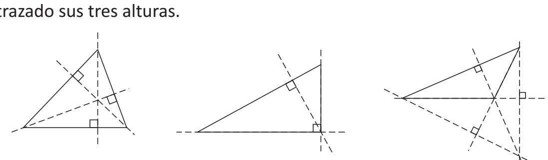
Ejercicio 1.17.
a) Construya un triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo; y la circunferencia circunscrita a cada uno. Compare la ubicación del circuncentro en cada caso.
b) ¿Cómo ha de ser el triángulo para que el circuncentro se sitúe en uno de sus lados? Cuando eso sucede, ¿con qué punto coincide el circuncentro? ¿Por qué?

Ortocentro

[C]

Ejercicio 1.18. Para cada uno de los siguientes triángulos se han trazado sus tres alturas.

Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.



a) ¿Qué tienen en común los tres triángulos?
b) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en un vértice?
c) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en el interior del triángulo?
d) ¿En cuál se intersecan en el exterior?

Ese punto se llama **ortocentro**.

Teorema 1.7. Concurrencia de las alturas.
Las tres alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro del triángulo.

Ejercicio 1.16

Para el ejercicio 1.16 deben hacer uso de la construcción realizada y deben concluir que la circunferencia pasa por los tres vértices y se llama circunferencia circunscrita.
(Se omite solución)

Ejercicio 1.17

En el ejercicio 1.17 deben concluir sobre la relación de los tipos de triángulos y la ubicación del circuncentro.

a)
- Triángulo acutángulo: El circuncentro está en el interior del triángulo.
- Triángulo obtusángulo: El circuncentro está en el exterior del triángulo.
- Triángulo rectángulo: El circuncentro es el punto medio de la hipotenusa del triángulo.

(Se omite la construcción).

b) Triángulo rectángulo y coincide con el punto medio de la hipotenusa.

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

[C] (45 min)

Ejercicio 1.18. Solución
a) Las tres alturas se intersectan en un punto.
b) Triángulo rectángulo.
c) Triángulo acutángulo.
d) Triángulo obtusángulo.

Unidad I. Lección 1.

Clase 4, 5 y 6

(Continuación)

Clase 7 y 8

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Demostrar el teorema de la bisectriz de un ángulo.

Evaluación: [A] Resolver el ejercicio 1.21

Ejercicio 1.19

Solución. Véase la pág. 29

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

[A] Construir la bisectriz de un ángulo (10 min)

Ejercicio 1.20.

M: ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?

Concluir: Es el rayo que divide el ángulo en dos ángulos congruentes.

Hacer la construcción de la bisectriz del ∠ABC y ubicar P en la bisectriz.

* Al trazar las perpendiculares a los lados del ángulo desde P, haga que el alumno note que se formaron dos triángulos rectángulos.

M: ¿Cómo son los triángulos que se formaron?

Concluir: Congruentes.

M: ¿Qué criterio define la congruencia de los triángulos?

Concluir: Criterio de congruencia de los triángulos rectángulos.

***Concluye:** los puntos en la bisectriz de un ángulo están a la misma distancia desde sus dos lados.

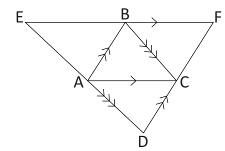
Ejercicio 1.19.

Demuestre el teorema anterior.

Considere la siguiente construcción auxiliar:

En el ΔABC, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el ΔDEF. Demuestre que las mediatrices de los lados del ΔDEF son las tres alturas del ΔABC.

Utilice las condiciones para ser paralelogramo.



Los símbolos >, >> en los segmentos están indicando paralelismo.

Clase 7 y 8. Bisectriz

Ejercicio 1.20.

Construya:

a) Dibuje el ∠ABC y trace su bisectriz.
b) Marque un punto P en la bisectriz.
c) Desde P, trace segmentos que sean perpendiculares a los lados BA y BC.
d) Nombre los puntos de intersección como K y L respectivamente.

Verifique:

Compare la longitud de $\overline{KP}$ con respecto a la de $\overline{LP}$.

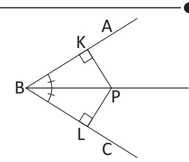
[A] Construcción

Puede trazar la bisectriz utilizando regla y compás, o haciendo uso del transportador.

El resultado anterior se cumple en el siguiente teorema:

Teorema 1.8. Propiedad de la bisectriz de un ángulo.

El punto P está en el interior del ∠ABC.
P equidista de los rayos BA y BC si y sólo si el rayo BP es la bisectriz del ∠ABC.



La bisectriz de un ángulo lo divide en dos ángulos congruentes.

Equidista:
P equidista de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ entonces $\overline{PK} \perp \overline{BA}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$,
Además, PK = PL.

Demostración:

Si K y L equidistan de P, entonces el rayo BP es la bisectriz del ∠ABC.

Proposición	Justificación
1. PK = PL	Hipótesis
2. $\overline{PK} \perp \overline{BA}$; $\overline{PL} \perp \overline{BC}$	Hipótesis
3. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	Congruencia del mismo segemento.
4. ΔBKP ≅ ΔBLP	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia hipotenusa-cateto de triángulos rectángulos.
5. ∠KBP ≅ ∠LBP	Por 4 y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.
6. Rayo BP es la bisectriz del ∠ABC	Por 5 y definición de bisectriz.

Para demostrar un teorema que involucre un "si y sólo si" deben demostrarse ambos sentidos.

Considere:
$\overline{PK} \perp \overline{BA}$,
$\overline{PL} \perp \overline{BC}$ y los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.

Ejercicio 1.21. Demuestre el otro sentido del teorema.
Si rayo BP es la bisectriz del ∠ABC entonces K y L equidistan de P.

Demuestre el teorema 1.8 (7 min)

M: Escribir el enunciado y dibujar la construcción en la pizarra. ¿Cuál es la hipótesis y cuál es la tesis?

RP: K y L equidistan de P

La tesis es $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz de ∠ABC.

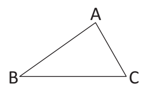
Objetivo: **[B]** Construir un triángulo y una circunferencia circunscrita al mismo.

Clase 7 y 8
(Continuación)

Evaluación: [B] Realizar la construcción del Ejercicio 1.22

Materiales: Regla y escuadras

Ejercicio 1.22.
En el ΔABC,
a) Trace las bisectrices de sus ángulos.
b) ¿Coinciden las bisectrices en un punto?, si es así ¿el punto está en el interior o exterior del triángulo? Nombre el punto de intersección como I.
c) Trace desde éste, segmentos perpendiculares a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$.(Nombre esos puntos P, Q y R respectivamente).
d) Compare la medida de estos segmentos ($\overline{IP}$, $\overline{IQ}$ y $\overline{IR}$).

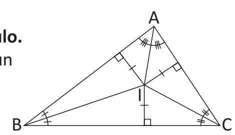


[B]

La construcción del Ejercicio 1.22 se utiliza posteriormente.

Esto nos lleva al siguiente teorema:

Teorema 1.9. Concurrencia de las bisectrices de un triángulo.
Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.



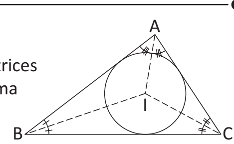
Ejercicio 1.23. Complete la demostración del teorema 1.9.
En el ΔABC, sea I el punto de intersección de las bisectrices de $\angle BAC$ y $\angle BCA$.

Proposición	Justificación
1. $\overline{AI}$ es la bisectriz del $\angle BAC$	Hipótesis
2. ☐ es la bisectriz del $\angle BCA$	Hipótesis
3. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$	Por 1 y propiedad de bisectriz.
4. I equidista de $\overline{AC}$ y ☐	Por 2 y ☐
5. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$	Por 3, 4 y propiedad transitiva.
6. ☐ es la bisectriz de ☐	Por 5 y propiedad de la bisectriz.

Ejercicio 1.24. Utilizando la construcción empleada en el Ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. ¿Por qué la circunferencia es tangente a los tres lados?

Circunferencia inscrita: Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo entonces se dice que la circunferencia está inscrita en el triángulo y el triángulo está circunscrito en la circunferencia.

Definición de Incentro
El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama Incentro.



Unidad I • Lección 1 • Clase 7 y 8. Bisectriz | 11

Ejercicio 1.23. (3 min)
*Pedir opiniones a los estudiantes acerca de que camino pueden seguir para demostrar este teorema, si no surgen ideas pueden completar la demostración que está en LE.
Solución en pág. 29.

M: ¿Qué estrategia se puede seguir para demostrar este teorema?
RP: Demostrar que los triángulos ΔBKP y ΔBLP son congruentes.
Hacer la demostración del teorema.

Ejercicio 1.21
(5 min) *Es importante que el estudiante note que el teorema 1.8 debe ser demostrado en ambas direcciones ya que consta de un si y sólo si.
Solución en pág. 29.

[B] Construir la bisectriz de los ángulos de ΔABC (10 min)

Ejercicio 1.22
a) Se omite la construcción.
b) Coinciden / interior
c) Se omite la construcción.
d) Son congruentes.

Concluye: Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.

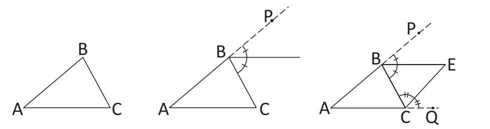
Clase 7 y 8
(Continuación)

Objetivo: **[C]** Trazar las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo.
- Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior se intersecan en un punto y este equidista de los lados del triángulo.
- Definir excentro.

Evaluación: [C] Resolver los ejercicio 1.27

Ejercicio 1.25. Realice la siguiente construcción:
Construya un triángulo equilátero y luego construya su circunferencia inscrita.

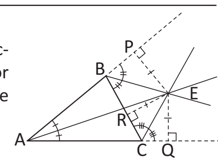
Ejercicio 1.26. Explique las construcciones realizadas en cada paso.



Conteste:
a) ¿Cómo se llaman los ángulos PBC y QCB?
b) ¿Qué son los rayos BE y CE?
c) Verifique si la bisectriz del ángulo interior ∠BAC es también concurrente en el punto E.

El punto E se llama **Excentro**.

Teorema 1.10
El punto donde se intersecan dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior en un triángulo, se llama excentro y éste equidista de los lados del triángulo.



Ejercicio 1.27. Complete la demostración. Considere en el ΔABC las bisectrices BE y CE de los ángulos exteriores ∠PBC y ∠QCB respectivamente y tome tres puntos P, Q y R tal que, $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$. Demuestre que el rayo AE es la bisectriz del ∠BAC. (Vea la figura de Teorema 1.10).

Proposición	Justificación
1. Rayo BE es la bisectriz de ∠PBC	
2. ☐ es la bisectriz de ☐	Hipótesis
3. $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$	
4. PE = RE	Por 1, 3 y propiedad de bisectriz.
5. ☐	Por 2, 3 y propiedad de bisectriz.
6. PE = QE	
7. ☐ es la bisectriz de ☐	

[C]

Puede calcar las figuras y hacer las verificaciones con regla, transportador y compás.

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, se le llama bisectriz exterior.

Está es también una aplicación de la propiedad de la bisectriz.

La circunferencia inscrita en un triángulo es tangente a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos.

¿Cuántas de estas circunferencias se pueden construir en el ΔABC?

12 | Unidad I • Lección 1 • Clase 7 y 8. Bisectriz

Ejercicio 1.24
(10 min) En la construcción del ejercicio 1.22 trace una circunferencia con centro en el punto I y de radio PI.
Solución en pág. 30.
*Hacer notar al estudiante que la circunferencia trazada está inscrita en el triángulo.
Concluye: que a ese punto se le llama incentro.

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

Ejercicio 1.25
(10 min)
(Se omite la solución)

[C]

Ejercicio 1.26
(20 min)
Analizar la construcción
M: ¿Cómo son los ángulos ∠PBC y ∠QCB?
RP: Ángulos externos
M: ¿Qué tipo de construcción se hizo en ΔABC?
RP: Bisecar ángulos externos
* Concluye que los rayos BE y CE son bisectrices de los ángulos exteriores del ΔABC y concurren en el punto E.
*Verificar si la bisectriz del ángulo interior ∠BAC concurre en el punto E.

Definir excentro (10 min)
Trace una circunferencia con centro en el excentro y radio EB. M: ¿Pasa la circunferencia por las extensiones de dos de los lados del triángulo? RP: Si

Ejercicio 1.27. (15 min)
Solución en pág. 30

*Pedir opiniones a los estudiantes acerca de que camino pueden seguir para demostrar este teorema, si no surgen ideas pueden completar la demostración que está en LE.

Objetivo: **[A]** Demostrar que las medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

- Definir baricentro como el punto donde se encuentran las tres medianas de un triángulo.

Unidad I. Lección 1.

Clase 9 y 10

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: [A]Resolver ejercicio 1.28

Clase 9 y 10. Baricentro

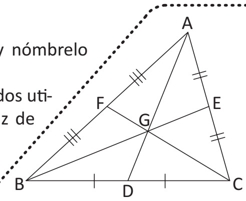
Trazar las medianas de un triángulo

Ejemplo 1.3.

a) Dibuje en el cuaderno un triángulo y nómbrelo ΔABC.

b) Encuentre los puntos medios de los lados utilizando la construcción de la mediatriz de un segmento.

c) Una los vértices con el punto medio del lado opuesto correspondiente.



Una **mediana** de un triángulo es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene 3 medianas.

Teorema 1.11 Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

Ejemplo 1.4. Demuestre el Teorema 1.11.

Solución:

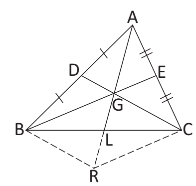
En el ΔABC, sean D y E los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente (Vea la figura de la derecha).

Proposición	Justificación
1. En el ΔABC, $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ son medianas y se cortan en G.	Construcción e hipótesis
2. Rayo AG corta a $\overline{BC}$ en L y se extiende a R tal que $\overline{AG} \cong \overline{GR}$.	Construcción
3. D es el punto medio de $\overline{AB}$.	Por 1
4. G es el punto medio de $\overline{AR}$.	Por 2
5. En el ΔABR, $\overline{DG} \parallel \overline{BR}$	Teorema de los dos puntos
6. $\overline{GC} \parallel \overline{BR}$	Por 5
7. E es punto medio de $\overline{AC}$.	Hipótesis
8. En el ΔARC, $\overline{GE} \parallel \overline{RC}$	Teorema de los dos puntos
9. $\overline{BG} \parallel \overline{RC}$	Por 8
10. BGCR es paralelogramo.	Por 6, 9 y definición de paralelogramo
11. $\overline{BL} \cong \overline{LC}$	Por 10 y la propiedad de la diagonal del paralelogramo.
12. L es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AL}$ es una mediana del ΔABC.	Por 11

[A]

Los segmentos AD, CF y BE son medianas del ΔABC.
$\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto G.

En esta demostración trazamos segmentos auxiliares como estrategia para su solución.



El punto donde se intersecan las medianas de un triángulo se llama baricentro.

Unidad I • Lección 1 • Clase 9 y 10. Baricentro | 13

[A] Construir las medianas de un triángulo.

Ejemplo 1.3

(7 min)

Hacer la construcción.

Concluye: las medianas de un triángulo son los segmentos cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

M: ¿Cuántas medianas tiene un triángulo?

RP: 3

M: ¿Concurren en un punto?

RP: si

Ejemplo 1.4

(15 min)

* Hacer la demostración en forma similar a las anteriores. Puede intentar que los estudiantes den ideas de cómo podemos hacer esta demostración y luego consultar el LE.

* La estrategia de esta demostración consiste en trazar segmentos auxiliares de tal manera que formemos un paralelogramo y así poder demostrar que es punto medio de $\overline{BC}$ utilizando el criterio de que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.

Nombrar el punto donde concurren las medianas como Baricentro.

Clase 9 y 10
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Demuestran que el baricentro está situado a dos tercios de la distancia de cada vértice del lado opuesto del triángulo

Evaluación: [B] Resolver ejercicio 1.30

Ejemplo 1.5
(10 min)
*Es importante que el estudiante note que es suficiente con trazar dos medianas para encontrar el baricentro.
M: ¿Qué sucede cuando la punta del lápiz se coloca en el baricentro?
RP: El triángulo esta en equilibrio
Concluye: El baricentro es el centro de masa o de gravedad de un triángulo.

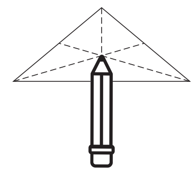
Ejercicio 1.28
(13 min). Puede asignar de tarea en el caso de que el tiempo no sea suficiente.
Solución en pág. 30.

[Hasta aquí Clase 9]

[Desde aquí Clase 10]

Ejercicio 1.29
(35 min).
* Al hacer esta construcción el estudiante podrá verificar el hecho de que la mediana se divide en tres partes exactamente iguales y a la vez debe notar que el baricentro está a dos tercios de los vértices.
M: ¿Qué sucede con las medianas del triángulo?

Ejemplo 1.5.
a) Dibuje un triángulo escaleno grande en una cartulina y recórtelo.
b) Trace dos medianas y encuentre el Baricentro.
c) Ubique la punta del lápiz en el baricentro.
d) Comente con sus compañeros que sucedió.



Note que el triángulo se equilibró.

El baricentro es el centro de masa o centro de gravedad de un triángulo.

Ejercicio 1.28.
a) Construya un triángulo escaleno, un equilátero y un isósceles y trace las medianas utilizando regla y compás.

b) Dado el ΔABC con mediana AD perpendicular al lado BC. Demuestre que:
b1. $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$
b2. ΔABC es isósceles.

c) Demuestre que la mediana correspondiente al lado no congruente de un triángulo isósceles es perpendicular al lado y biseca al ángulo opuesto a la base.

d) Demuestre que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

e) Dados dos triángulos congruentes, la mediana de uno de los triángulos es congruente con la mediana del lado correspondiente del otro.

Ejercicio 1.29.
En el ΔABC, demuestre que si $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro entonces AG : GD = 2 : 1, BG : GE = 2 : 1, CG : GF = 2 : 1.

[B]

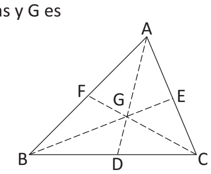
Puede utilizar como referencia la figura del Ejemplo 1.4.

En el ΔABC, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro. Se cumple que:

$AG=\frac{2}{3}$ AD ó AG = 2GD

$BG=\frac{2}{3}$ BE ó BG = 2GE

$CG=\frac{2}{3}$ CF ó CG = 2GF



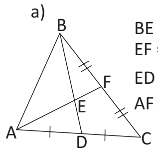
14 | Unidad I • Lección 1 • Clase 9 y 10. Baricentro

RP: Se dividen en tres partes.
M: ¿Cuánto mide cada una de las partes en que se dividió?
RP: 1/3
Solución en pág. 31.

***Concluye:** El baricentro está situado a 2/3 del vértice del lado opuesto del triángulo.

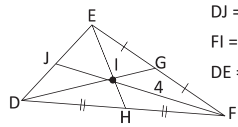
Ejercicio 1.30.
Encuentre las medidas.

a)



BE = 16
EF = 7
ED = ☐
AF = ☐

b)



DJ = 3, JE = ☐
FI = 4, IJ = ☐
DE = EH, EI = ☐

Nota: es importante que los estudiantes hagan la construcción ya que les permitirá visualizar en mejor manera el teorema y luego poder pasar a la demostración formal.

Ejercicio 1.30
(10 min) *Pedir opiniones a los estudiantes se puede demostrar este teorema.

Dar tiempo suficiente.
Pasar a la pizarra un estudiante para que proponga su solución.

Concluye: Que el baricentro está situado a razón de 2/3 de los vértices del triángulo.

Solución:
a) ED = 8,
   AF = 21
b) JE = 3
   IJ = 2
   EI = 4

Unidad I. Lección 1.
Ejercicios de la lección
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Ejercicio 1
Solución.
$x = 8$
$y = 4$

Ejercicio 2
Solución.
Véase la pág. 32.

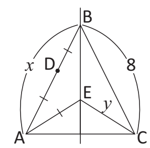
Ejercicio 3
Solución.
Véase la pág. 32.

Ejercicio 4
Solución.
Véase la pág. 33.

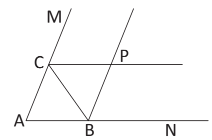
Ejercicio 5
Solución.
Véase la pág. 33.

Ejercicios de la lección

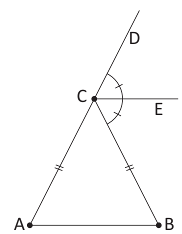
1) En la figura ΔABC es isósceles donde BA = BC, $\overline{BE}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$. Si los segmentos tienen las longitudes indicadas, halle x, y.



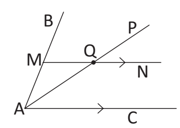
2) En el ΔABC, las bisectrices de dos ángulos externos de $\angle B$ y $\angle C$ se intersecan en P. Demuestre que la suma de la medida del ángulo BPC y la mitad de la medida del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).



3) Demuestre que en todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesta a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.

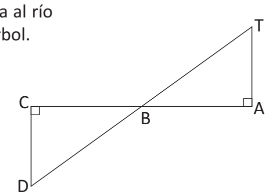


4) Demuestre que si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles. Demuestre que el triángulo MAQ es isósceles.



5) Dos exploradores Luis y María están parados a la orilla de un río en el punto A directamente enfrente de un árbol T que se encuentra al otro lado del rio. Ellos marcan cierta distancia a un punto B donde María permanece, sin embargo, Luis camina exactamente la misma distancia de A a B a un punto C, luego gira y camina en dirección opuesta al río hacia un punto D donde él puede ver a María alineada con el árbol. A, B y C son colineales.

a) Identifique la correspondencia de pares de lados y ángulos congruentes
b) Demuestre que $\Delta ABT \cong \Delta CBD$
c) ¿Cómo podrían ellos usar la información que se tiene para encontrar el ancho del río?

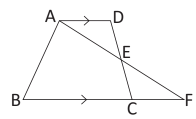


16 | Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección

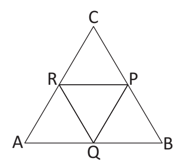
Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Ejercicios de la lección
(Continuación)

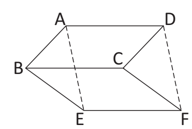
6) En la figura de la derecha $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y E es el punto medio de $\overline{CD}$. Demuestre que los triángulos ΔADE y ΔFCE son congruentes.



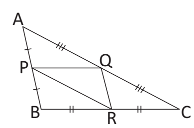
7) En la figura P, Q y R son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ΔABC. Demuestre que el triángulo ΔPQR es equilátero.



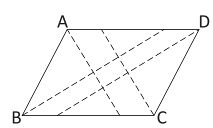
8) En la figura los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestre que el cuadrilátero AEFD también es paralelogramo.



9) Se da cualquier ΔABC y los puntos medios de los lados, P, Q y R. Demuestre que el perímetro del ΔPQR es la mitad del perímetro del ΔABC.

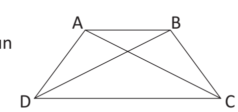


*10) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma con las bisectrices de los 4 ángulos de un paralelogramo? Demuéstrelo.



Primero demuestra que las bisectrices de ángulos opuestos del paralelogramo son paralelas entre sí.

11) Demuestre que las diagonales de un trapecio Isósceles son congruentes



Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección | 17

Ejercicio 6
Solución.
Véase la pág. 33.

Ejercicio 7
Solución.
Véase la pág. 33.

Ejercicio 8
Solución.
Véase la pág. 34.

Ejercicio 9
Solución.

Proposición	**Justificación**
1. P es punto medio de $\overline{AB}$. Q es punto medio de $\overline{AC}$. R es punto medio de $\overline{BC}$.	Hipótesis
2. $PQ = \frac{1}{2} BC$ $PR = \frac{1}{2} AC$ $QR = \frac{1}{2} AB$	Teorema de los dos puntos
3. Perimetro $\Delta ABC = AB + BC + CA$ Perimetro $\Delta RPQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$	Por 3

***Ejercicio 10**
Solución.
Véase la pág. 34.

Ejercicio 11
Solución.
Véase la pág. 35.

Ejercicios de la lección
(Continuación)

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Ejercicio 12
Solución.
Véase la pág. 36.

Ejercicio 13
Solución.

$EF = EH + HF$

$= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$

$= \frac{1}{2}(11) + \frac{1}{2}(5)$

$= \frac{16}{2}$

$= 8$

$EF = 8$

En ΔABC y ΔACD,

$GH = EF - EG - HF$

$= 8 - \frac{1}{2}(5) - \frac{1}{2}(5)$

$= 8 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}$

$= 8 - \frac{10}{2}$

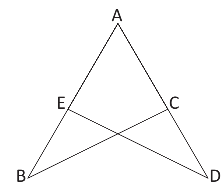
$= 8 - 5$

$= 3$

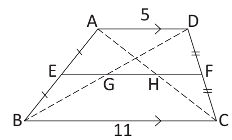
$GH = 3$

12) Para cada una de las siguientes opciones decide si la información dada es suficiente para concluir que $\Delta ABC \cong \Delta ADE$, si es así demuéstrelo.

a) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\angle B \cong \angle D$
b) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
c) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{AC}$
d) $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$



13) En la figura AD || BC, AE = EB y DF = FC. Encuentre la longitud de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.



Considere la siguiente propiedad, la mediana de un trapecio es paralela a sus bases y su longitud es igual a la mitad de la suma de ellas.

18 | Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección

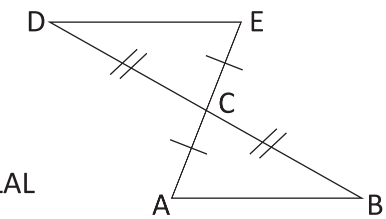
Soluciones de Ejercicios Lección1

Solución Ejercicio 1.2. Pág. 4

a1) LLL a2) ALA a3) LAL

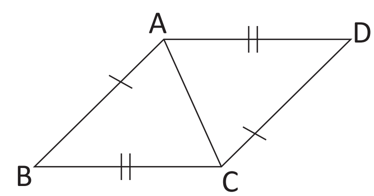
b) En la figura $\overline{AE}$ interseca a $\overline{BD}$ en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demostrar $\angle A \cong \angle E$

Proposiciones	Justificación
1. $\overline{AC} \cong \overline{EC}$	Hipótesis
2. $\overline{BC} \cong \overline{DC}$	Hipótesis
3. $\angle DCE \cong \angle BCA$	Ángulos opuestos por el vértice
4. $\Delta DCE \cong \Delta BCA$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL
5. $\angle A \cong \angle E$	Por 4 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes



c) En la figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$, Demostrar $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Proposición	Justificación
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Hipótesis
2. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
3. $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	Congruencia del mismo segmento
4. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LLL

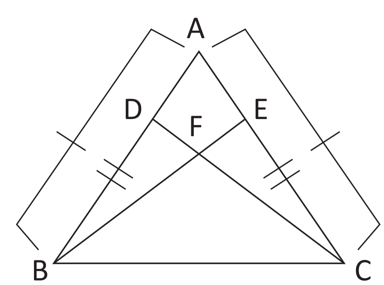


d) ΔABC isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$), D y E en los lados AB y AC respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$ demostrar:

d1) $\overline{BE} \cong \overline{CD}$

Entre ΔBEC y ΔCDB

Proposición	Justificación
1. $\overline{BD} \cong \overline{CE}$	Hipótesis
2. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Hipótesis
3. $\angle B \cong \angle C$	Por 2 (ΔABC es isósceles)
4. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	Congruencia del mismo segmento
5. $\Delta BEC \cong \Delta CDB$	Por 1, 3, 4 y criterio de congruencia LAL
6. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$	Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.



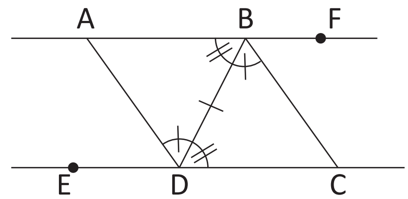
d2) F corta a $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$

Proposición	Justificación
1. $\Delta BEC \cong \Delta CDB$	Demostrado en proposición 5 d1)
2. $\angle EBC \cong \angle DCB$	Por 1 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
3. $\overline{BF} \cong \overline{CF}$	Por 2 (ΔFBC es isósceles)

(Continúa en la siguiente página)

e) En la figura las rectas AB y DC son paralelas, $\overline{DA}$ biseca el $\angle BDE$ y $\overline{BC}$ biseca el $\angle DBF$ demuestre:

e1) $\Delta DAB \cong \Delta BCD$



Proposición	Justificación
1. $\overline{DA}$ es bisectriz de $\angle BDE$	Hipótesis
2. $\overline{BC}$ es bisectriz de $\angle DBF$	Hipótesis
3. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Hipótesis
4. $\angle EDA \cong \angle ADB$	Por 1
5. $\angle DBC \cong \angle CBF$	Por 2
6. $\angle EDB \cong \angle DBF$	Por 3 (ángulos alternos internos)
7. $2m\angle ADB = 2m\angle DBC$	Por 4, 5 y 6
8. $m\angle ADB = m\angle DBC$	Dividiendo en paso 7 entre 2
9. $\angle ADB \cong \angle DBC$	Por 8
10. $\angle DBA \cong \angle CDB$	Por 3 (ángulos alternos internos)
11. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	Congruencia del mismo segmento
12. $\Delta DAB \cong \Delta BCD$	Por 9, 10, 11 y criterio de congruencia ALA

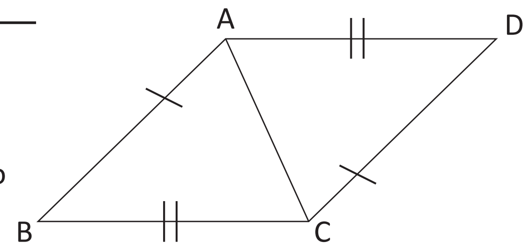
e2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Proposición	Justificación
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por paso 9 de e1) y condición de paralelismo (ángulos alternos internos)

Solución Ejercicio 1.4. Pág. 5

En el cuadrilátero ABCD, AD = BC y AB = DC , Demostrar:

a) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$



Proposición	Justificación
1. AD = BC; AB = CD	Hipótesis
2. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	Por 1
3. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Por 1
4. $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	Congruencia del mismo segmento
5. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 2, 3, 4 y criterio de congruencia LLL

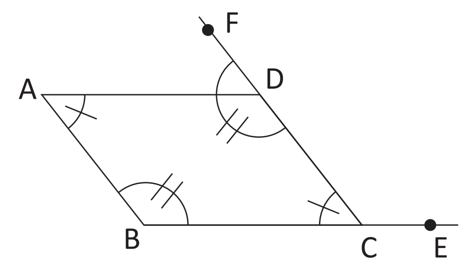
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

Proposición	Justificación
1. $\angle BAC \cong \angle DCA$	Por a) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 1 y condición de paralelismo
3. $\angle BCA \cong \angle DAC$	Por a) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
4. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por 3 y condición de paralelismo

Solución Ejercicio 1.5. Pág. 6

Demuestre las condiciones:

a1) Demostrar la condición c)



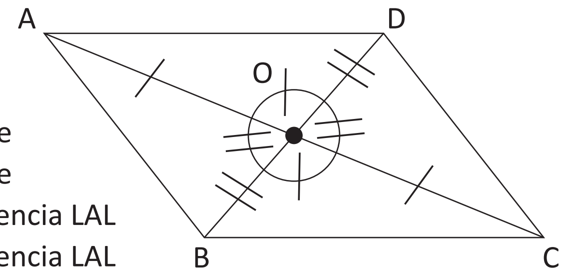
Proposiciones	Justificación
1. $m\angle A + m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDA = 360°$	Suma de los ángulos internos de un cuadrilátero
2. $m\angle A = m\angle BCD$ y $m\angle B = m\angle CDA$	Hipótesis
3. $2m\angle B + 2m\angle BCD = 360°$	Por 1 y 2
4. $m\angle B + m\angle BCD = 180°$	Dividiendo en paso 3 entre 2
5. $m\angle BCD + m\angle DCE = 180°$	Ángulos adyacentes
6. $m\angle B = m\angle DCE$	Por 4 y 5
7. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 6 y condición de paralelismo
8. $2m\angle BCD + 2m\angle CDA = 360°$	Por 1 y 2
9. $m\angle BCD + m\angle CDA = 180°$	Dividiendo en paso 8 entre 2
10. $m\angle CDA + m\angle ADF = 180°$	Ángulos adyacentes
11. $m\angle BCD = m\angle ADF$	Por 9 y 10
12. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	Por 11 y condición de paralelismo
13. ABCD es un paralelogramo	Por 7, 12 y definición de paralelogramo

(Continúa en la siguiente página)

Solución Ejercicio 1.5. (Continuación)

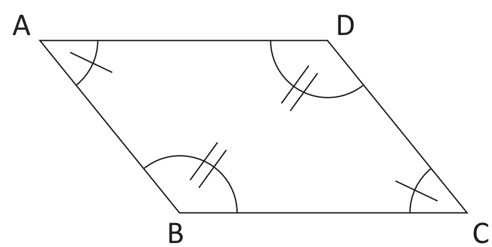
a2) Demostrar la condición d)

Sea O el punto medio de las diagonales AC y BD



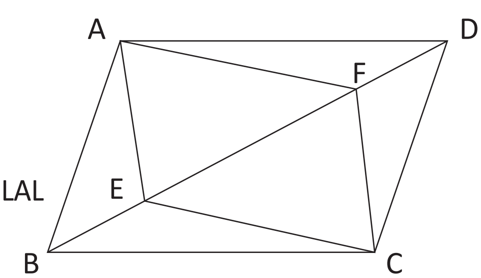
Proposiciones	Justificación
1. AO = CO	Hipótesis
2. BO = DO	Hipótesis
3. $\angle AOD \cong \angle COB$	Ángulos opuestos por el vértice
4. $\angle AOB \cong \angle COD$	Ángulos opuestos por el vértice
5. $\Delta AOD \cong \Delta COB$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL
6. $\Delta AOB \cong \Delta COD$	Por 1, 2, 4 y criterio de congruencia LAL
7. $\angle ADO \cong \angle CBO$	Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
8. $\angle ABO \cong \angle CDO$	Por 6 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
9. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Por 7 y condición de paralelismo
10. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	Por 8 y condición de paralelismo
11. ABCD es un paralelogramo	Por 9, 10 y definición de paralelogramo

a3) Demostrando la condición e)



Proposiciones	Justificación
1. $m\angle A + m\angle B = 180°$	Hipótesis
2. $m\angle B + m\angle C = 180°$	Hipótesis
3. $m\angle A = m\angle C$	Igualando 1 y 2
4. $m\angle C + m\angle D = 180°$	Hipótesis
5. $m\angle B = m\angle D$	Igualando 2 y 4
6. ABCD es un paralelogramo	Por 3, 5 y condición c)

b) E y F en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo

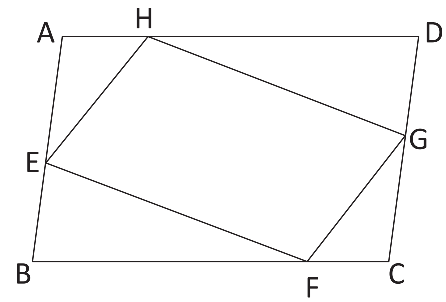


Proposiciones	Justificación
1. $\overline{EB} \cong \overline{FD}$	Hipótesis
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
En el ΔABE y ΔCDF	
3. $\angle ABE \cong \angle CDF$	Por 2 (ángulos alternos internos)
4. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Hipótesis
5. $\Delta ABE \cong \Delta CDF$	Por 1, 3, 4 y criterio de congruencia LAL
En el ΔBEC y ΔDFA	
6. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
7. $\angle EBC \cong \angle FDA$	Por 2 (ángulos alternos internos)
8. $\Delta BEC \cong \Delta DFA$	Por 1, 6, 7 y criterio de congruencia LAL
9. $\overline{AE} \cong \overline{CF}$	Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
10. $\overline{CE} \cong \overline{AF}$	Por 8 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
11. AECF es un paralelogramo	Por 9, 10 y condiciópn de paralelogramo

(Continúa en la siguiente página)

Solución Ejercicio 1.5. (Continuación)

c) Los puntos E, F, G y H son puntos de los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestre que EFGH es un paralelogramo



Proposiciones	Justificación
1. AE = CG	Hipótesis
2. BF = DH	Hipótesis
En el ΔEBF y ΔGDH	
3. $\angle$B $\cong$ $\angle$D	ABCD es un paralelogramo
4. AB = CD	ABCD es un paralelogramo
5. AB = AE + EB	Suma de longitudes
6. DC = CG + GD	Suma de longitudes
7. EB = GD	Por 1, 4, 5, 6
8. ΔEBF $\cong$ ΔGDH	Por 2, 3, 7 y criterio de congruencia LAL
9. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$	Por 8 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
En el ΔEAH y ΔGCF	
10. $\angle$A $\cong$ $\angle$C	ABCD es un paralelogramo
11. DA = BC	ABCD es un paralelogramo
12. DA = DH + HA	Suma de longitudes
13. BC = BF + FC	Suma de longitudes
14. HA = FC	Por 2, 11, 12, 13
15. ΔEAH $\cong$ ΔGCF	Por 1, 10,14 y criterio de congruencia LAL
16. $\overline{EH} \cong \overline{GF}$	Por 15 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
17. EFGH es un	Por 9, 16 y condición de paralelogramo

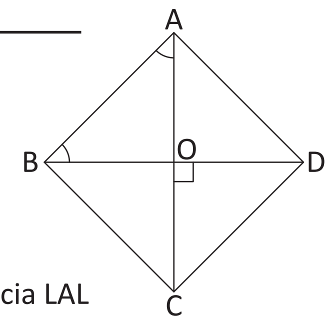
Solución Ejercicio 1.6. Pág. 7

Demuestre que un cuadrilátero cuya diagonal son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

Proposiciones	Justificación
1. PA = PB = PC = PD	Hipótesis
2. ΔPAB, ΔPBC, ΔPCD, ΔPDA son triángulos $\boxed{\text{isósceles}}$	$\boxed{\text{Por 1}}$
3. $\angle$APD $\cong$ $\angle$CPB, $\angle$APB $\cong$ $\angle$CPD	$\boxed{\text{Ángulos opuestos por el vértice}}$
4. ΔPAD $\cong$ ΔPCB, ΔPAB $\cong$ ΔPCD	$\boxed{\text{Por 1, 3 y criterio de congruencia LAL}}$
5. $m\angle$PAD = $\boxed{m\angle PDA}$ = $\boxed{m\angle PCB}$ = $\boxed{m\angle PBC}$ y $m\angle$PAB = $\boxed{m\angle PBA}$ = $\boxed{m\angle PCD}$ = $\boxed{m\angle PDC}$	$\boxed{\text{Por 2, 4}}$
6. $m\angle$DAB = $m\angle$ABC = $m\angle$BCD = $m\angle$CDA = 90°	Por 5 y (suma de los ángulos internos de cuadrilátero) ÷ 4
7. ABCD es un rectángulo	$\boxed{\text{Por 6 y definiciópn de rectángulo}}$

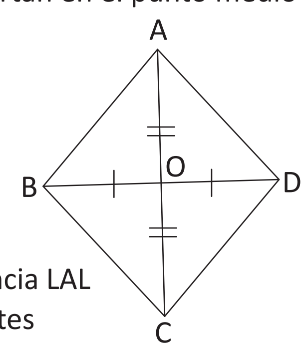
Solución Ejercicio 1.7. Pág. 7

a) Demostrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado



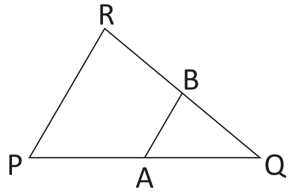
Proposiciones	Justificación
Sea O el punto medio de las diagonales AC y BD,	
1. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$	Hipótesis
2. $m\angle AOB = m\angle BOC = m\angle COD$ $= m\angle DOA = 90°$	Por 1
3. $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO} \cong \overline{DO}$	Hipótesis
4. $\Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta COD \cong \Delta DOA$	Por 2, 3 y criterio de congruencia LAL
5. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$	Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
6. $\angle ABO \cong \angle BAO$	Por 3 (ΔOAB es isósceles)
7. $m\angle ABO = m\angle BAO = 45°$	Por 2, 6
8. $m\angle ABO + m\angle OBC = 45° + 45° = 90°$	Por 4, 7
9. $m\angle ABC = m\angle ABO + m\angle OBC$	Adición de ángulos
10. $m\angle ABC = 90°$ Haciendo un análisis similar se concluye que $m\angle ABC = m\angle BCD$ $= m\angle CDA = m\angle DAB = 90°$	Por 8 y 9
11. ABCD es cuadrado	Por 5, 10 y definición de cuadrado

b) Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo (Sea O el punto medio de las diagonales AC y BD)



Proposiciones	Justificación
1. $\overline{AO} \cong \overline{CO}$	Hipótesis
2. $\overline{BO} \cong \overline{DO}$	Hipótesis
3. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$	Hipótesis
4. $\angle AOB \cong \angle AOD \cong \angle COB \cong \angle COD$	Por 3
5. $\Delta AOB \cong \Delta AOD \cong \Delta COB \cong \Delta COD$	Por 1, 2, 4 y criterio de congruencia LAL
6. $\overline{AB} \cong \overline{AD} \cong \overline{CB} \cong \overline{CD}$	Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
7. ABCD es un rombo	Por 6 y definición de rombo

Solución Ejercicio 1.9. Pág. 8



$AB = 8$, $m\angle BAQ = 58°$

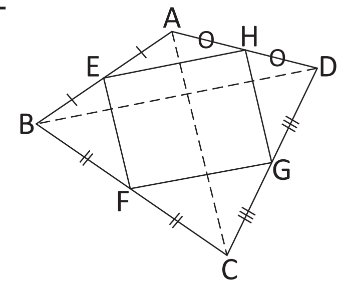
Estos resultados se obtuvieron de la siguiente manera:

$AB = \frac{1}{2}RP$ aplicando el teorema de los dos puntos.

$AB = \frac{1}{2}(16) = 8$. $\overline{PR} \parallel \overline{AB}$ por lo que $m\angle BAQ = 58°$ por ser ángulos correspondientes con $\angle P$.

Solución Ejercicio 1.10. Pág. 9

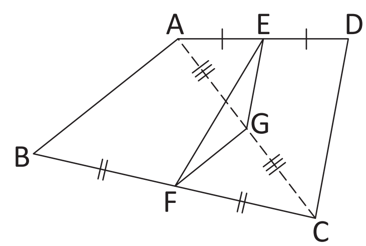
Proposición	Justificación
1. E, F, G y H son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente	Hipótesis
2. En ΔABD, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$	$\boxed{\text{Teorema de los dos puntos}}$
3. En ΔBCD, $\boxed{\overline{FG} \parallel \overline{BD}}$	Teorema de los dos puntos
4. EH ‖ FG	Igualando 2 y 3.
5. En ΔACD, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$	$\boxed{\text{Teorema de los dos puntos}}$
6. $\boxed{\text{En } \Delta ABC,\ \overline{EF} \parallel \overline{AC}}$	Teorema de los dos puntos
7. $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$	Igualando 5 y 6.
8. EFGH es un paralelogramo	$\boxed{\text{Por 4, 7 y definición de paralelogramo}}$



Solución Ejercicio 1.11. Pág. 9

(También se puede demostrar basándose en la condición de pares de lados congruentes de un paralelogramo, pero se sugiere utilizar el teorema de los dos puntos porque la demostración es más sencilla y es el teorema que se está abordando en ésta clase)

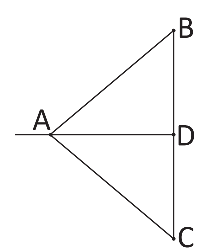
Proposición	Justificación
1. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Hipótesis
2. E, F y G son puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente	Hipótesis
3. En ΔABC, FG = $\frac{1}{2}$ AB	Teorema de los dos puntos
4. En ΔACD, EG = $\frac{1}{2}$ DC	Teorema de los dos puntos
5. FG = EG	Por 1, 3 y 4
6. ΔEFG es isósceles	Por 5



Solución Ejercicio 1.13. Pág. 10

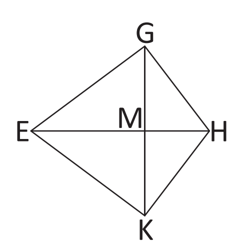
a) Si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el ΔABC es isósceles.

Proposición	Justificación
1. D es punto medio de $\overline{BC}$; $\overline{AD} \perp \overline{BC}$	Hipótesis
2. $\overline{AD}$ es la mediatriz del $\overline{BC}$	Por 1
3. AB = AC	Propiedad de la mediatriz
4. ΔABC es isósceles	Por 3



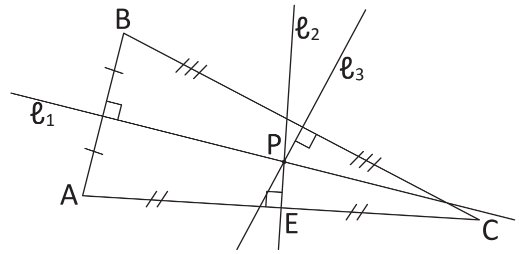
b) En la figura, M está en el $\overline{GK}$. GE = KE, GM = KM y H está en la recta EM. Demostrar que: GH = KH.

Proposición	Justificación
1. GE = KE y GM = KM	Hipótesis
2. H está en la recta EM	Hipótesis
3. $\overline{EM} \cong \overline{EM}$	Congruencia del mismo segmento
4. ΔGEM $\cong$ ΔKEM	Por 1, 3 y citerio de congruencia LLL
5. $m\angle$GME = $m\angle$KME = 90°	Por 4 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes y adyacentes
6. $\overline{MH}$ es la mediatriz de $\overline{GK}$	Por 1, 5
7. GH = HK	Propiedad de la mediatriz



Solución Ejercicio 1.15. Pág. 10

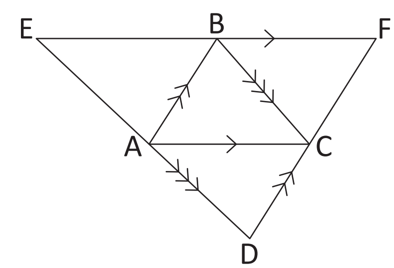
Demuestre el teorema anterior (Teorema 1.6) considerando a P como punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P está en la recta ℓ_3 y PA = PB = PC.
Sean los puntos P y E la intersección de $\overline{AB}$ y ℓ_1, $\overline{AC}$ y ℓ_2 respectivamente.



Proposición	Justificación
1. ℓ_1 es mediatriz de $\overline{AB}$ en el punto D → AD = BD y $m\angle ADP = m\angle BDP = 90°$	Hipótesis
2. ℓ_2 es mediatriz de $\overline{AC}$ en el punto E → AE = CE y $m\angle AEP = m\angle CEP = 90°$	Hipótesis
3. ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan en P	Hipótesis
4. $\overline{DP} \cong \overline{DP}$	Congruencia del mismo segmento
5. $\Delta DPA \cong \Delta DPB$	Por 1, 4 y criterio de congruencia LAL
6. PA = PB	Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
7. $\overline{PE} \cong \overline{PE}$	Congruencia del mismo segmento
8. $\Delta AEP \cong \Delta CEP$	Por 2, 7 y criterio de congruencia LAL
9. PA = PC	Por 8 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
10. PB = PC	Por 6 y 9
11. P está en la recta ℓ_3	Por 10 e hipótesis (ℓ_3 es la mediatriz del $\overline{BC}$) y propiedad de la mediatriz

Solución Ejercicio 1.19. Pág. 12

Se deja la demostración del teorema 1.7
En ΔABC, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el ΔDEF.
Demuestre que las mediatrices de los lados del ΔDEF son las tres alturas del ΔABC.
Utilice las condiciones de paralelogramo y el teorema de concurrencia de las mediatrices.



Proposición	Justificación
1. El cuadrilátero ADCB es un paralelogramo.	Por construcción
2. AD = BC	Por 1
3. El cuadrilátero EACB es un paralelogramo.	Por construcción
4. EA = BC	Por 3
5. A es el punto medio de $\overline{DE}$.	Por 2 y 4
6. B y C son los puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$ respectivamente.	Mismo que 1 a 5
7. Las perpendiculares a los $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$ son perpendiculares a las $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$ respectivamente.	$\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{FD} \parallel \overline{BA}$
8. Las mediatrices del ΔDEF contienen las alturas del ΔABC.	Por 5, 6 y 7
9. Las mediatrices del ΔDEF se intersecan en un punto.	Teorema de concurrencia de las mediatrices
10. Las tres alturas del ΔABC son concurrentes en un punto.	Por 8 y 9

Solución Ejercicio 1.21. Pág. 12

Demuestre el otro sentido del teorema: Si rayo BP es la bisectriz del ∠ABC, entonces K y L equidistan de P

Proposición	Justificación
1. Rayo BP es la bisectriz del ∠ABC	Hipótesis
2. ∠PBK ≅ ∠PBL	Paso 1
3. m∠PKB = m∠PLB = 90°	Por $\overline{PK} \perp \overline{BK}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BP}$
4. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	Congruencia del mismo segmento
5. ΔBPK ≅ ΔBPL	Por 2, 3, 4 y criterio de congruencia hipotenusa - ángulo de triángulos rectángulos
6. PK = PL	Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

Solución Ejercicio 1.23. Pág. 13

Complete la demostración del teorema de concurrencia de las bisectrices de un triángulo.

Proposición	Justificación
1. Rayo AI es la bisectriz del ∠BAC	Hipótesis
2. $\boxed{\text{Rayo CI}}$ es la bisectriz del ∠BCA	Hipótesis
3. ℓ equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$	Por 1 y propiedad de bisectriz
4. ℓ equidista de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$	Por 2 y $\boxed{\text{propiedad de la bisectriz}}$
5. ℓ equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$	Por 3, 4 y propiedad transitiva
6. $\boxed{\text{Rayo BI}}$ es la bisectriz del $\boxed{\angle ABC}$	Por 5 y propiedad de la bisectriz

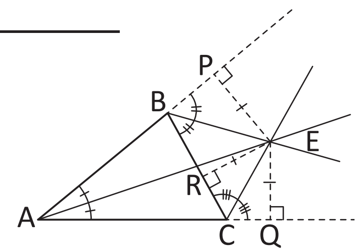
Solución Ejercicio 1.24. Pág. 13

Utilizando la construcción empleada en el ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. Los segmentos IP, IQ, IR son perpendicular a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectivamente. Además, P, Q, R están en el segmento BC, CA, AB respectivamente.

Solución Ejercicio 1.27. Pág. 14

Complete la demostración. Considere en ΔABC las bisectrices BE y CE de los ángulos exteriores $\angle PBC$ y $\angle QCB$ respectivamente y $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$. Demuestre que rayo AE es la bisectriz de $\angle BAC$.

Proposición	Justificación
1. Rayo BE es la bisectriz del $\angle PBC$	$\boxed{\text{Hipótesis}}$
2. $\boxed{\text{Rayo CE}}$ es la bisectriz del $\angle BCQ$	Hipótesis
3. $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$	$\boxed{\text{Hipótesis}}$
4. PE = RE	Por 1, 3 y propiedad de bisectriz
5. $\boxed{\text{RE = QE}}$	Por 2, 3 y propiedad de bisectriz
6. PE = QE	$\boxed{\text{Por 4, 5 y transitividad}}$
7. $\boxed{\text{Rayo AE}}$ es la bisectriz del $\boxed{\angle BAC}$	$\boxed{\text{Por 6 y propiedad de bisectriz de un ángulo}}$

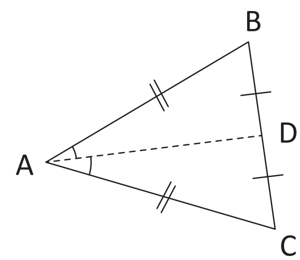


Solución Ejercicio 1.28. Pág. 16

a) se omite la solución

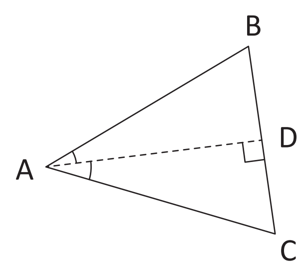
b)

Proposición	Justificación
1. $\overline{AD}$ es mediana del ΔABC	Hipótesis
2. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$	Hipótesis
3. $m\angle ADB \cong m\angle ADC = 90°$	Por 2
4. $\overline{DB} \cong \overline{DC}$	Por 1
5. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	Congruencia del mismo segmento
6. $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	Por 3, 4, 5 y criterio de congruencia LAL
7. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por 6 y ser lados y ángulos correspondientes de triángulos congruentes
8. ΔABC es isósceles, $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$	Por 7



c)

Proposición	Justificación
1. ΔABC es isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$)	Hipótesis
2. $\overline{AD}$ es mediana de ΔABC al $\overline{BC}$	Hipótesis
3. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Por 1
4. $\angle B \cong \angle C$	Por 1
5. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	Por 2
6. $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	Por 3, 4, 5 y criterio de congruencia LAL
7. $\angle BDA \cong \angle CDA$	Por 6 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
8. $m\angle BDA + m\angle CDA = 180°$	Ángulos adyacentes
9. $2m\angle BDA = 180°$ $m\angle BDA = 90°$	Por 7 y 8
10. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$	Por 9
11. $\angle BAD \cong \angle CAD$	Por 6 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
12. $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$	Por 11

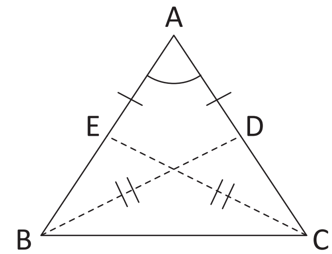


(Continúa en la siguiente página)

Solución Ejercicio 1.28. (Continuación)

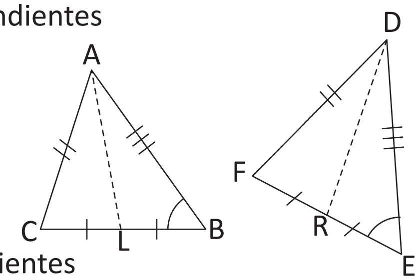
Sea ABC es isósceles (AB = AC)

d)



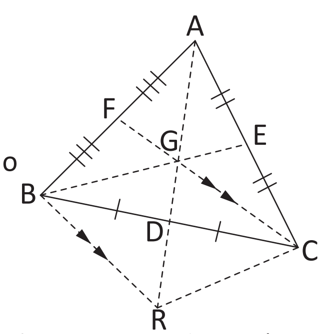
Proposición	Justificación
1. $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son medianas del ΔABC	Hipótesis
2. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Hipótesis
3. E es punto medio de $\overline{AB}$ D es punto medio de $\overline{AC}$	Por 1
4. AE = EB = AD = DC	Por 2 y 3
5. $\angle A \cong \angle A$	Congruencia del mismo ángulo
6. $\Delta ABD \cong \Delta ACE$	Por 2, 4, 5 y criterio de congruencia LAL
7. $\overline{BD} \cong \overline{CE}$	Por 6 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

e)



Proposición	Justificación
1. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	Hipótesis
2. $\overline{AL}$ es mediana de $\overline{BC}$ en ΔABC $\overline{DR}$ es mediana a $\overline{EF}$ en ΔDEF	Hipótesis
3. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	Por 1 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes
4. L es punto medio de $\overline{BC}$ R es punto medio de $\overline{FE}$	Por 2
5. BL = ER	Por 3
6. $\angle B \cong \angle E$	Por 1 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
7. $\Delta ABL \cong \Delta DER$	Por 3, 5, 6 y criterio de congruencia LAL
8. $\overline{AL} \cong \overline{ER}$	Por 7 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes

Solución Ejercicio 1.29. Pág. 16

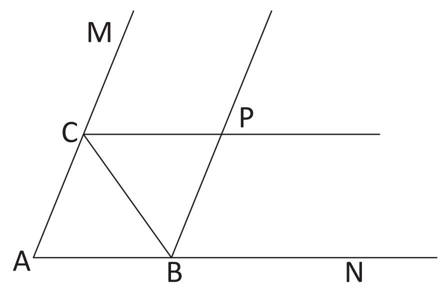


Proposición	Justificación
1. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas del ΔABC	Hipótesis
2. G es el baricentro	Hipótesis
3. Sea R un punto en el rayo AD de manera que $\overline{GD} \cong \overline{DR}$	Construcción
4. $\overline{DB} \cong \overline{DC}$	Por 1
5. BGCR es un paralelogramo	Por 3, 4 y condición de paralelogramo
6. $\overline{BR} \parallel \overline{GC}$	Por 5, definición de paralelogramo
7. $\overline{BR} \parallel \overline{FG}$	Por 6 y $\overline{FG}$ está en la recta FC
8. F es punto medio de $\overline{AB}$	Por 1
Entre ΔAFG y ΔABR	
9. $\angle AFG \cong \angle ABR$, $\angle AGF \cong \angle ARB$	Por 7 y condición de paralelismo (ángulos correspondientes)
10. $\Delta AFG \sim \Delta ABR$	Por 9
11. G es punto medio de $\overline{AR}$	Por 8, 10 y ser lados correspondientes de triángulos semejantes
12. GF = $\frac{1}{2}$ BR	Teorema de los puntos
13. GF = $\frac{1}{2}$ GC	Por 6 y 12
14. GE = $\frac{1}{2}$GB y GD = $\frac{1}{2}$ GA	Igual manera hasta 13
15. GA = 2 GD GC = 2 GF o GB = 2GE	Por 13 y 14
16. AG:GD = 2:1, BG:GF = 2:1, CG:GF = 2:1	Por 15

Solucionario Lección 1 - Ejercicios de la Lección

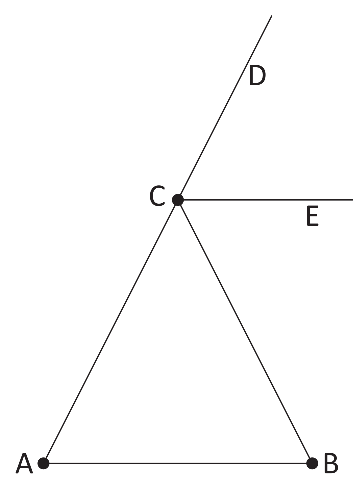
2) En el ΔABC, las bisectrices de dos ángulos externos de $\angle$B y $\angle$C se intersecan en P. Demuestre que la suma de la medida del ángulo BPC y la mitad de la medida del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).

Proposición	Justificación
1. Sea rayo CP es la bisectriz de $\angle$MCB y $\overline{BP}$ es la bisectriz de $\angle$CBN	Hipótesis
2. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	Suma de ángulos internos de un triangulo
3. $m\angle PCB = \frac{m\angle MCB}{2}$	Por 1
4. $m\angle CBP = \frac{m\angle CBN}{2}$	Por 1
5. $m\angle MCB = m\angle A + m\angle B$ $m\angle CBN = m\angle A + m\angle C$	Angulo externo
6. $\frac{m\angle MCB}{2} + \frac{m\angle CBN}{2} + m\angle BPC = 180°$	Por 3, 4 y suma de las medidas de los ángulos internos del ΔCPB
7. $\frac{m\angle A + m\angle B}{2} + \frac{m\angle A + m\angle C}{2} + m\angle BPC = 180°$	Sustituyendo 5 en 6
8. $m\angle A + m\angle B + m\angle A + m\angle C + 2m\angle BPC = 360°$	Multiplicando por 2
9. $180° + m\angle A + 2m\angle BPC = 360°$	Sustituyendo 2 en 8
10. $m\angle A + 2m\angle BPC = 180°$	Operando en 9
11. $\frac{1}{2} m\angle A + m\angle BPC = 90°$	Dividiendo entre 2



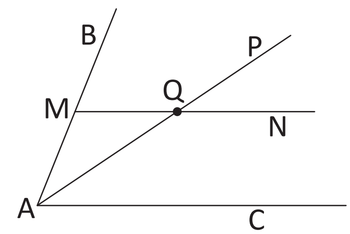
3) Demuestre que en todo triangulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesta a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.

Proposición	Justificación
1. Sea ΔABC isósceles (CA = CB)	Hipótesis
2. $\angle A \cong \angle B$	Por 1
3. $\overline{CE}$ es la bisectriz del ángulo externo $\angle$BCD	Hipótesis
4. $m\angle A = m\angle B$	Por 2
5. $m\angle DCE = m\angle ECB$	Por 3
6. $m\angle DCB = m\angle DCE + m\angle ECB = 2m\angle DCE$	Por 3, 5
7. $m\angle DCB = m\angle A + m\angle B = 2m\angle A$	Por 4 y ángulo externo de un triángulo
8. $2m\angle DCE = 2m\angle A$	Igualando 6 y 7
9. $m\angle DCE = m\angle A$	Dividiendo entre 2
10. $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$	Por 9 y condición de paralelismo (ángulos correspondientes)



4) Demostraremos primero que las bisectrices de ángulos opuestos son paralelas.

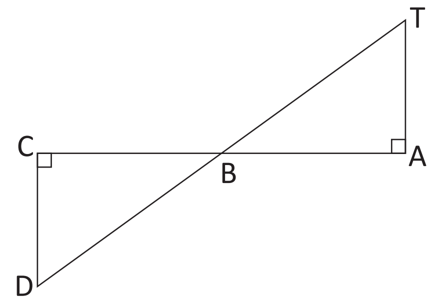
Proposición	Justificación
1. $\overline{AP}$ es la bisectriz de $\angle BAC$	Hipótesis
2. $m\angle MAQ \cong m\angle QAC$	Por 1
3. $\overline{MN}$ es paralela al lado AC	Hipótesis
4. $\angle QAC \cong \angle AQM$	Por 3 y ángulos alternos internos
5. $\angle MAQ \cong \angle AQM$	Igualando 2 y 4
6. ΔAQM es isósceles	Por 5



5) a) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ por construcción y $\angle A \cong \angle C$ ambos son rectos.

b)

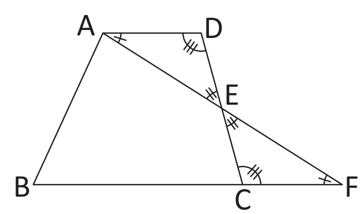
Proposición	Justificación
1. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	Construcción
2. $\angle A \cong \angle C$	Ambos son rectos (Por situación)
3. $\angle ABT \cong \angle CBD$	Ángulos opuestos por el vértice
4. $\Delta ABT \cong \Delta CBD$	Por 1, 2, 3, y criterio de congruencia ALA



c) Como los triángulos ΔABT y ΔCBD son congruentes significa que $\overline{TA} \cong \overline{DC}$ por lo tanto basta con medir la distancia DC y se conocerá el ancho del río.

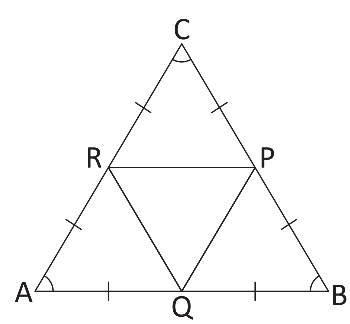
6)

Proposición	Justificación
1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	Hipótesis
2. E es el punto medio de $\overline{CD}$.	Hipótesis
3. $\overline{DE} \cong \overline{CE}$	Por 2
4. $\angle ADE \cong \angle FCE$	Por 1 y ángulos alternos internos
5. $\angle AED \cong \angle FEC$	Ángulos opuestos por el vértice
6 . $\Delta ADE \cong \Delta FCE$	Por 3, 4, 5 y criterios de congruencia ALA



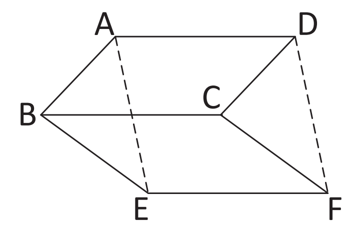
7)

Proposición	Justificación
1. ΔABC es equilátero	Hipótesis
2. $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	Por 1
3. P,Q y R son punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente	Hipótesis
4. AB = BC = CA	Por 1
5. AQ = BQ, BP = CP, CR = AR	Por 3
6. $\overline{AQ} \cong \overline{BQ} \cong \overline{BP} \cong \overline{CP} \cong \overline{CR} \cong \overline{AR}$	Por 4 y 5
7. $\Delta AQR \cong \Delta BPQ \cong \Delta CRP$	Por 2, 6 y criterio de congruencia LAL
8. $\overline{RQ} \cong \overline{QP} \cong \overline{PR}$	Por 7 y ser lados corresppondientes de triángulos congruentes
9. ΔPQR es equilátero	Por 8



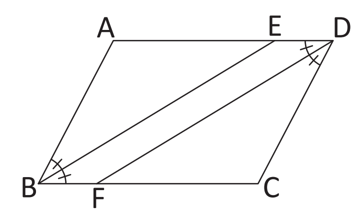
8)

Proposición	Justificación
1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$	ABCD es un paralelogramo
2. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$	BECF es un paralelogramo
3. $\overline{AD} \cong \overline{EF}$, $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$	Por 1 y 2
4. AEFD es un paralelogramo	Por 3 y condición de paralelogramo

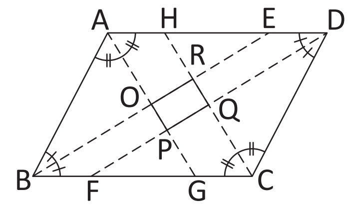


10) ***** Demostraremos primero que las bisectrices de ángulos opuestos son paralelas.

Proposición	Justificación
1. $m\angle ABC = m\angle ADC$	Propiedad de paralelogramo
2. $m\angle ABC = 2m\angle EBF$	Definición de bisectriz
3. $m\angle ADC = 2m\angle EDF$	Definición de bisectriz
4. $2m\angle EBF = 2m\angle EDF$	Por 1 y se iguala 2 y 3
5. $\angle EBF \cong \angle EDF$	Dividiendo entre 2
6. $\angle EDF \cong \angle DFC$	$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y ángulos alternos internos
7. $\angle EBF \cong \angle DFC$	Igualando 5 y 6
8. $\overline{BE} \parallel \overline{DF}$	Por 7 y condición de paralelismo



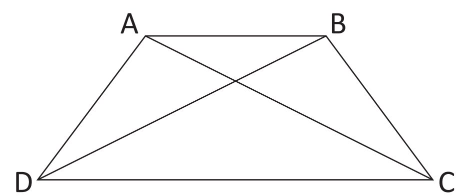
***** Luego demostrar que el cuadrilátero que se forma con las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo es un rectángulo.



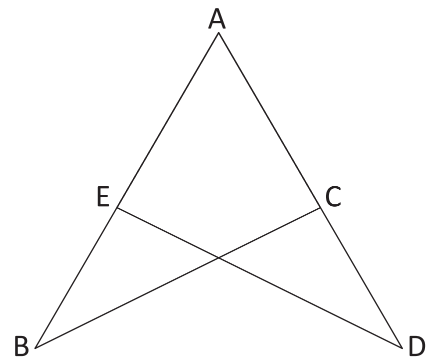
Proposición	Justificación
1. $\overline{BE} \parallel \overline{FD}$	Por lo demostrado anteriormente
2. $\overline{AG} \parallel \overline{HC}$	(De igual manera)
3. $m\angle ADC = 2m\angle CDQ$	Hipótesis (bisectriz)
4. $m\angle BCD = 2m\angle DCQ$	Hipótesis (bisectriz)
5. $m\angle ADC + m\angle BCD = 180°$	ABCD es un paralelogramo
6. $2m\angle CDQ + 2m\angle DCQ = 180°$	Sustituyendo 3 y 4 en 5
7. $m\angle CDQ + m\angle DCQ = 90°$	Dividiendo entre 2
8. $m\angle CDQ + m\angle DCQ + m\angle CQD = 180°$	Suma de los ángulos internos
9. $m\angle CQD = 90°$	Sustituyendo 7 en 8
10. $m\angle PQR = 90°$	Ángulos opuestos por el vértice
11. $\overline{OR} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{OP} \parallel \overline{RQ}$	Por 1 y 2
12. OPQR es un paralelogramo	Por 11 (definición de paralelogramo)
13. $m\angle PQR + m\angle QRO = 180°$	Por 12 (propiedad de paralelogramo)
14. $m\angle QRO = 90°$	Sustituyendo 10 en 13
15. $m\angle ROP = 90°$	Por 10 y ángulos opuestos del paralelogramo OPQR
16. $m\angle OPR = 90°$	Por 14 y ángulos opuestos del paralelogramo OPQR
17. OPQR es un rectángulo	Por 10, 14, 15 y 16

11)

Proposición	Justificación
Entre ΔADC y ΔBCD	
1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	Hipótesis (trapecio isósceles)
2. $\angle ADC \cong \angle BCD$	Por ser trapecio isósceles
3. $\overline{DC} \cong \overline{CD}$	Congruencia del mismo segmento
4. $\Delta ADC \cong \Delta BCD$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL
5. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes



12) a)



Proposición	Justificación
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	Hipótesis
2. $\angle B \cong \angle D$	Hipótesis
3. $\angle BAC \cong \angle DAE$	Congruencia del mismo ángulo
4. $\Delta ABC \cong \Delta ADE$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia ALA

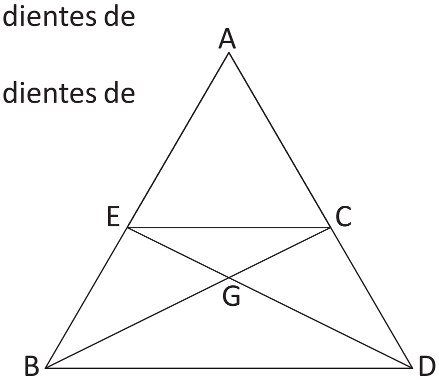
b) No hay suficiente información para determinar la congruencia de $\Delta ABC \cong \Delta ADE$.

c)

Proposición	Justificación
1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	Hipótesis
2. $\overline{AE} \cong \overline{AC}$	Hipótesis
3. $\angle BAC \cong \angle DAE$	Congruencia del mismo ángulo
4. $\Delta ABC \cong \Delta ADE$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL

d) Sea G intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$

Proposición	Justificación
1. $\overline{EB} \cong \overline{CD}$	Hipótesis
2. $\overline{BC} \cong \overline{DE}$	Hipótesis
3. Trazar el segmento EC	Por construcción
4. $\overline{EC} \cong \overline{CE}$	Congruencia del mismo segmento
5. $\Delta EBC \cong \Delta CDE$	Por 1, 2, 4 y criterio de congruencia LLL
6. $\angle ABC \cong \angle ADE$	Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
7. $\angle ECB \cong \angle CED$	Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
8. Trazar $\overline{BD}$	Por construcción
9. GC = GE	Por 7
10. BC = BG + GC, DE = DG + GE	Suma de segmentos
11. BG = DG	Por 10
12. $\angle GBD \cong \angle GDB$	Por 11 y ΔBGD isósceles
13. $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle GBD$	Suma de ángulos
14. $m\angle ADB = m\angle ADE + m\angle GDB$	Suma de ángulos
15. $m\angle ABD = m\angle ADB$	Por 6, 12, 13, 14
16. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	Por 15 y ΔABD isósceles
17. $\angle BAC \cong \angle DAE$	Congruncia del mismo ángulo
18. $\Delta ABC \cong \Delta ADE$	Por 6, 16, 17 y criterio de congruencia ALA



Objetivo: **[A]** Entender la definición y criterio de la semejanza de triángulos.
[B] Encontrar la medida del lado del triángulo usando semejanza.

Evaluación: [A] Ejercicio 2.1
[B] Ejercicio 2.2 a) y b)

Unidad I. Lección 2.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 2. Semejanza de Triángulos
Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

Definición de semejanza

Se dice que dos figuras son semejantes, cuando se pueden colocar en la posición como muestra la Fig. 2.1 donde

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

A este valor se le denomina **razón de semejanza** entre los triángulos A’B’C’ y ABC.

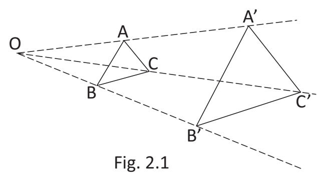


Fig. 2.1

[A]

Se puede dar la vuelta a una de estas figuras. Cada punto de las dos figuras se corresponde como los puntos A y A’, etc.

En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición de semejanza:

Los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$, $m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$, $m\angle C = m\angle C'$

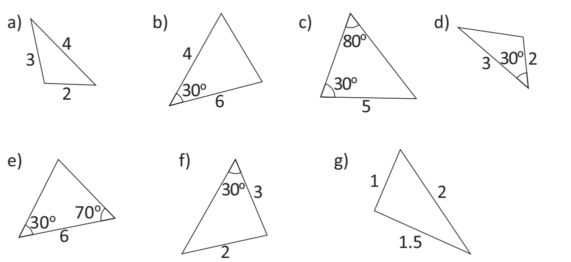
Se denota la semejanza con el signo “∼”, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

El valor de $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ coincide con la razón de semejanza entre los triángulos A’B’C’ y ABC.

Para confirmar la semejanza de triángulos, no es necesario verificar todas las condiciones

En 9no. grado se aprendió el criterio de semejanza de triángulos.

Ejemplo 2.1. Encuentre las parejas de triángulos que son semejantes y diga la condición de semejanza:



Unidad I • Lección 2 • Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos | 19

[A] (10 min)

El docente solo puede decir “Ser semejantes quiere decir tener la misma forma”, en vez de dar la definición general.
Sin embargo, hay que dar la definición exacta de la semejanza de triángulos.

Ejemplo 2.1
(8 min)
Solución:

Parejas de triángulos	Criterio de semejanza
a) y g)	LLL
b) y d)	LAL
c) y e)	AA

Clase 1
(Continuación)

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Criterio de la semejanza de triángulos
(7 min)

Ejercicio 2.1
(7 min) Solución
ΔABC ~ ΔACD, porque $\angle$BAC $\cong$ $\angle$CAD y
$m\angle$BCA = 90°
= $m\angle$CDA,
(Criterio de semejanza AA)

ΔACD ~ ΔCBD, porque $m\angle$ACD = 90° – $m\angle$DAC
= $m\angle$DBC y $m\angle$CDA
= 90° = $m\angle$BDC,
(Criterio de semejanza AA)

Ejemplo 2.2
(7 min)

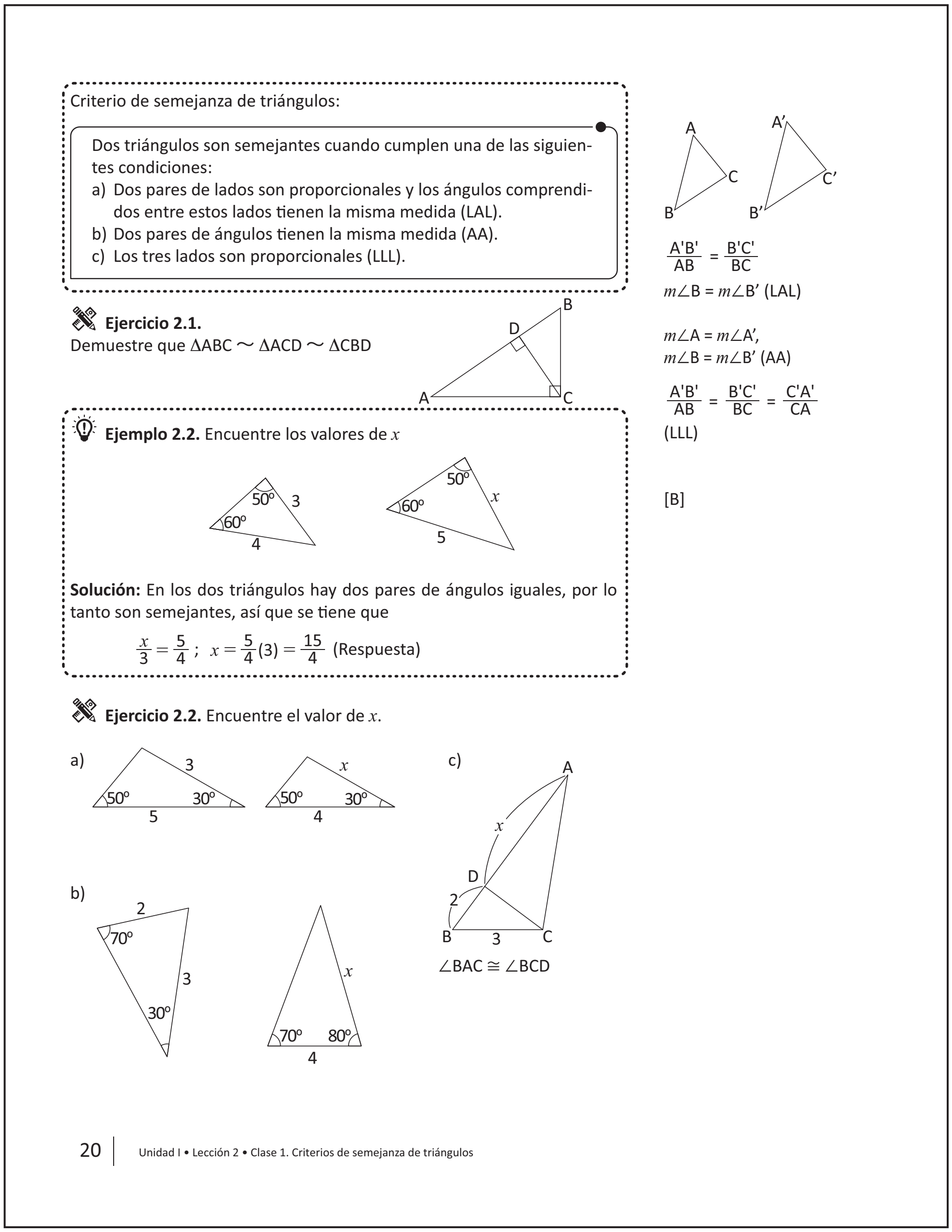
Ejercicio 2.2
(6 min) Solución

a) $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$, $x = \frac{12}{5}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$, $x = 6$

c) ΔBAC ~ ΔBCD
(Criterio de semejanza AA)
$$\frac{x+2}{3} = \frac{3}{2},\ x = \frac{5}{2}$$

Hay más ejercicios del mismo nivel en Ejercicios de la Lección.



Criterio de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes cuando cumplen una de las siguientes condiciones:
a) Dos pares de lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados tienen la misma medida (LAL).
b) Dos pares de ángulos tienen la misma medida (AA).
c) Los tres lados son proporcionales (LLL).

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$
$m\angle$B = $m\angle$B' (LAL)

$m\angle$A = $m\angle$A',
$m\angle$B = $m\angle$B' (AA)

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$
(LLL)

Ejercicio 2.1.
Demuestre que ΔABC ∼ ΔACD ∼ ΔCBD

Ejemplo 2.2. Encuentre los valores de x

Solución: En los dos triángulos hay dos pares de ángulos iguales, por lo tanto son semejantes, así que se tiene que

$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}$; $x = \frac{5}{4}(3) = \frac{15}{4}$ (Respuesta)

[B]

Ejercicio 2.2. Encuentre el valor de x.

$\angle$BAC $\cong$ $\angle$BCD

20 | Unidad I • Lección 2 • Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

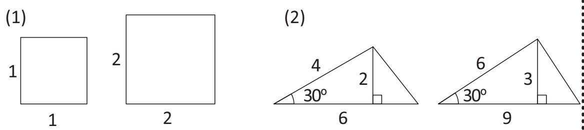
Objetivo: **[A]** Entender la relación entre la razón de semejanza y la de área.

Evaluación: Ejercicio 2.3

Unidad I. Lección 2.
Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Clase 2. Semejanza y razón de área

Ejemplo 2.3. En (1) y (2):
a) Encuentre la razón de semejanza entre la figura de la derecha y la de la izquierda.
b) Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda.
c) ¿Qué observa?



Solución: a) (1) $\frac{2}{1} = 2$ (2) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) (1) $\frac{2^2}{1^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ (2) $\frac{\frac{1}{2}(9)(3)}{\frac{1}{2}(6)(2)} = \left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

c) La razón de área = (La razón de semejanza)^2

La relación de arriba se aplica a cualquier figura.

En (2) si k es la razón de semejanza,

$k = \frac{9}{6} = \frac{6}{4}$

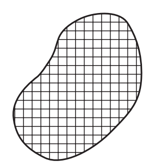
$9 = 6k$; $6 = 4k$; $3 = 2k$

El área del triángulo de derecho

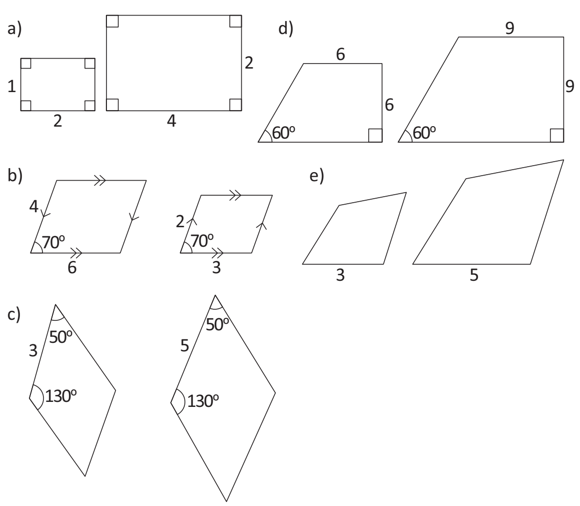
$= \frac{1}{2}(9)(3) = \frac{1}{2}(6k)(2k)$

= (El de izquierdo) x (k^2)

Es porque se puede evaluar el área por conjunto de cuadrados con cualquier exactitud.



Ejercicio 2.3. Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda. En cada caso las dos figuras son semejantes.



Unidad I • Lección 2 • Clase 2. Semejanza y razón de área | 21

Ejemplo 2.3
(30 min)
El punto es: la medida de área es el producto de dos medidas de longitud, por lo tanto, la razón de área = (la razón de longitud)^2 donde la razón de longitud es la razón de semejanza.

Ejercicio 2.3
(15 min) Solución

a) $\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$

b) $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

d) $\left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{9}{4}$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

No es necesario encontrar el área.

Unidad I. Lección 2.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la relación entre la razón de semejanza, la de volumen y la de área de superficie.

Evaluación: Ejercicio 2.4

Ejemplo 2.4
(30 min)

El punto es: la medida de volumen es el producto de tres medidas de longitud, por lo tanto, la razón de volumen = (la razón de longitud)^3 donde la razón de longitud es la razón de semejanza.

Ejercicio 2.4
(15 min) Solución

a) (1) $\left(\frac{4}{2}\right)^3 = 8$

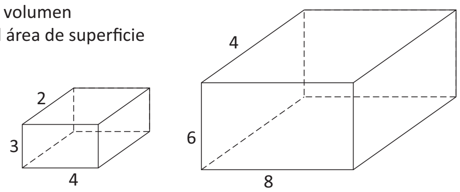
(2) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

b) (1) $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

(2) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Clase 3. Semejanza y razón de volumen y área de superficie

Ejemplo 2.4.
Encuentre las siguientes razones entre el paralelepípedo rectangular de la derecha y el de la izquierda,
a) De semejanza
b) De volumen
c) Del área de superficie



El volumen del paralelepípedo rectangular es (largo) x (ancho) x (altura)

Solución: a) $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{8(4)(6)}{4(2)(3)} = \frac{8}{4}\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right) = 2^3 = 8$

c) La razón de área de cada cara = (La razón de semejanza)^2 = 2^2 = 4
Por lo tanto, la razón de área de superficie es 4

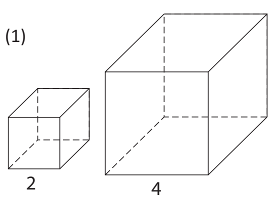
La razón de arriba se aplica a todos los sólidos

La razón de volumen = (la razón de semejanza)^3
La razón de área de superficie = (La razón de semejanza)^2

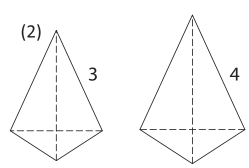
Ejercicio 2.4.
a) Encuentre la razón de volumen entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.
b) Encuentre la razón del área de superficie entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.

En cada caso los sólidos son semejantes

(1)



(2)



22 | Unidad I • Lección 2 • Clase 3. Semejanza y razón de volumen y área de superficie

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

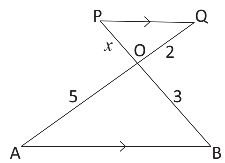
Unidad I. Lección 2.
Ejercicios de la lección

Ejercicios de la lección

1) En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$.

Clase 1

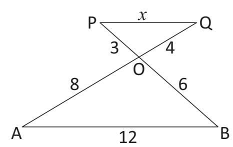
a) Demuestre que $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.
b) Encuentre el valor de x.



2) En la figura

Clase 1

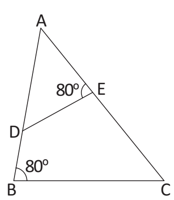
a) Demuestre que $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.
b) Encuentre el valor de x.



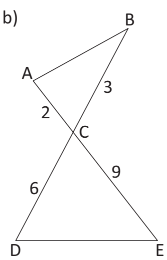
3) En cada uno de los dibujos, indique los triángulos semejantes y el criterio de semejanza utilizado.

Clase 1

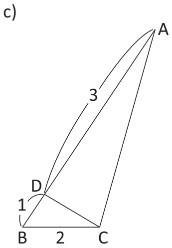
a)



b)



c)



Unidad I • Lección 2 • Ejercicios de la lección | 23

Solución

1)

a) $\angle OAB \cong \angle OQP$ y $\angle OBA \cong \angle OPQ$, porque AB || PQ.

Como dos ángulos correspondientes son congruentes, $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.

b) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{5}$, $x = \dfrac{6}{5}$

2)

a) $\dfrac{OQ}{OA} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{OP}{OB}$

$\angle AOB \cong \angle QOP$, porque son ángulos opuestos por el vértice.

Como las razones de dos pares de lados son iguales y los ángulos comprendidos son congruentes, $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.

b) $\dfrac{x}{12} = \dfrac{4}{8}$, $x = 6$

3)

a) $\Delta ABC \sim \Delta AED$
Criterio de semejanza AA

b) $\Delta CDE \sim \Delta CAB$
Criterio de semejanza LAL

c) $\Delta ABC \sim \Delta CBD$
Criterio de semejanza LAL

Matemáticas III
Unidad II

Geometría analítica

1. Competencias de la Unidad

1. Identificar las propiedades de la parábola para encontrar su ecuación.
2. Identificar las características de la elipse para encontrar su ecuación.
3. Identificar las características de la hipérbola para encontrar su ecuación
4. Identificar las características de la circunferencia para encontrar su ecuación.

2. Relación y Desarrollo

Matemáticas 8º

Sistema de ecuaciones de primer grado en dos variables

Funciones de primer grado

Matemáticas I

Unidad I: Fundamentos de aritmética y álgebra

Unidad IV: Fundamentos de álgebra

Matemáticas II

Unidad I: Funciones Algebraicas

- Lección 6: Gráfica de funciones polinomiales

Matemáticas III

Unidad II

- Lección 1: Parábola
- Lección 2: Circunferencia
- Lección 3: Elipse
- Lección 4: Hipérbola

3. **Plan de Estudio de la Unidad** (22 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1.Parábola	1	Ecuación de la parábola	parábola, foco, directriz
	2	Desplazamiento paralelo	desplazamiento paralelo
	3	Completación de cuadrados	
	4	Encontrar desplazamiento	
	5	Encontrar componentes de parábola	
	6	Puntos comunes entre una parábola y una recta	
		Ejercicios de la lección	
2.Circunferencias	1	Ecuación de circunferencia, encontrar el centro y el radio	
	2	Tangente a la circunferencia	
	3	Puntos comunes entre una circunferencia y una recta	
		Ejercicios de la lección	
3.Elipse	1 y 2	Ecuación de la elipse	Focos, vértice, centro, eje menor eje mayor
	3	Ecuación de la elipse Graficar elipses	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	4 y 5	Desplazamiento paralelo de la elipse	$\frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$
	6	Encontrar el desplazamiento	
		Ejercicios de la lección	
4.Hipérbola	1	Ecuación de la hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	2	Asíntotas de la hipérbola	Asíntota
	3	Expresiones que son ecuaciones de la hipérbola	
	4 y 5	Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
	6 y 7	Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Puntos de lección

Lección 1: Parábola

En esta unidad se tratan curvas llamadas “secciones cónicas” y se define como las curvas que aparecen cuando se corta dos conos por un plano, de lo que viene la relación entre las distancias desde los focos o desde la directriz. El libro omite la explicación de esta definición y utiliza la relación entre las distancias como definición.

Como en el currículo no hay unidad de función de segundo grado, esta es la única oportunidad de enseñar la parábola. Si los estudiantes pueden hacer la gráfica, no tendrán mucha dificultad en aplicarla al resolver problemas de encontrar el mínimo o el máximo.

En algunos ejercicios es necesario aplicar la completación de cuadrados ya que es una técnica muy importante cuando se tratan polinomios de segundo grado. Hay dos maneras:

Ejemplo 1: $x^2 + 6x = (x + 3)^2 – 3^2$
$= (x + 3)^2 – 9$

Ejemplo 2: $x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 – 3^2$
$= (x + 3)^2 – 9$

La teoría general del desplazamiento paralelo se aplica a todas las curvas.

Lección 2: Circunferencia

Del hecho de que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia, se puede deducir la fórmula de la tangente. Esta no tiene la forma $y = ax + b$, por lo tanto los estudiantes tienen dificultad en manejarla. Esta fórmula tiene la ventaja de representar las tangentes perpendiculares al eje x en la misma forma.

De la definición de la sección cónica, se puede deducir la característica de la parábola, pero en el libro se utiliza ésta como definición. Se aplica la misma situación con otras curvas.

Lección 3: Elipse

En esta lección se pretende conceptualizar la sección cónica de la elipse, en el libro se propone que los estudiantes hagan una construcción de la elipse utilizando hilo (Clase 1) esto con el objeto de que verifiquen que al tener dos puntos fijos llamados focos con unas distancia (d1 y d2) a un punto P, al hacer el trazo con el hilo tensado la distancia de los focos hacia cualquier punto de la elipse será constante. Se pueden aprovechar estas ideas para definir los elementos de la elipse (centro, focos, vértices, eje mayor, eje menor) de igual manera se pretende demostrar la ecuación de la elipse ya que es importante que el estudiante conozca de donde surge para luego puedan aprender a graficarla.

Se presentan ejemplos y ejercicios que van mostrando deferentes formas de estudiar la elipse; inicialmente se proporcionan algunos elementos para que se grafique y se encuentre la ecuación, luego se hace viceversa, se propone la ecuación y se pide encontrar sus elementos y la gráfica, hasta lograr su generalización considerando cuando el centro es en el origen y cuando no.

El docente debe estar atento al desempeño de los estudiantes, ya que pueden surgir algunas dificultades cuando están encontrando los elementos de una elipse ya que deben tener en cuenta cual es el eje de la elipse, de ello dependerá la forma de la ecuación y su gráfica.

Lección 4: Hipérbola

Se enfoca el desarrollo de la lección de la hipérbola partiendo de su definición que hace referencia a que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante relacionándola con la definición de la elipse que hace referencia a que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante. Se grafica una hipérbola en forma general para identificar los puntos importantes de la definición al igual que sus partes: ramas, focos, vértices y ejes. Se deduce su fórmula utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos. Se estudian las asíntotas de la hipérbola utilizando un rectángulo auxiliar que sirve de referencia para trazarlas auxiliándose de los extremos de los ejes conjugado y transverso.

Las hipérbolas con centro (h, k) y con focos en el eje horizontal o vertical se estudian a partir de las hipérbolas con centro en el origen y realizando desplazamientos horizontales y verticales. Se presentan los casos donde hay ecuaciones que no tienen la forma estándar de una hipérbola por lo que hay que utilizar la completación al cuadrado para obtenerla.

Unidad II. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la definición de la parábola y deducir su ecuación.

Evaluación: Ejercicio 1.1, 1.3

Definición de parábola
(5 min) Hay que explicar la definición de la distancia entre un punto y una recta.

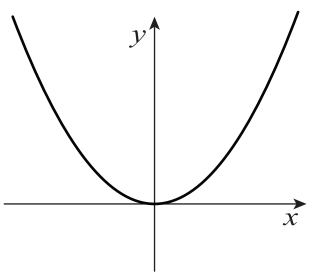
Ecuación de Parábola
Presentación de la ecuación.
(5 min)

Demostración. (8 min)

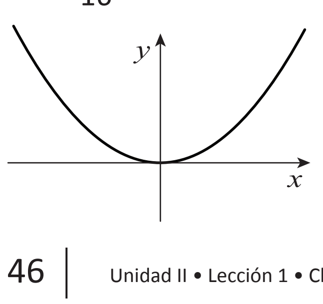
Ejemplo 1.1
(5 min) En IV, IV se aprenderá que se dice que la gráfica es convexo hacia abajo.

Ejercicio 1.1
(10 min) Solución:

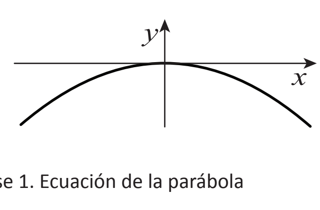
a) $y = \frac{1}{4}x^2$



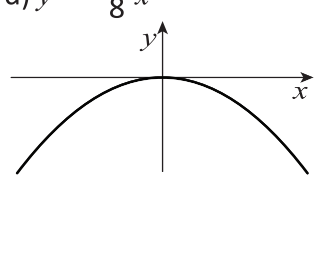
b) $y = \frac{1}{16}x^2$



c) $y = -\frac{1}{12}x^2$



d) $y = -\frac{1}{8}x^2$



* Parábolas cuyo eje es paralelo al eje x.

Solo intercambiar x y y.

Lección 1. Parábola

Clase 1. Ecuación de la parábola

Definición de parábola
Una parábola es el conjunto de puntos P en el plano que distan lo mismo de un punto fijo F y una recta fija l.

Al punto F se le denomina **foco** y a la recta ***l*** **directriz**.

Ecuación de parábola
La ecuación de la parábola con el foco F(0, p) y la directriz $l : y = -p$ es:

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Como las distancias son iguales se tiene:

$$d(\text{P, F}) = d(\text{P, D})$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$$

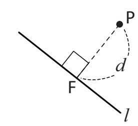
$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 - 4yp = 0$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

La Figura 1.1 muestra una parábola. Al eje y se le denomina eje de simetría y al punto (0, 0) se le denomina vértice.

Distancia d entre P y l



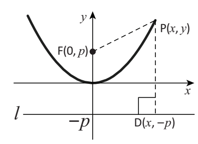


Fig. 1.1

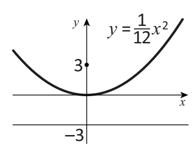
Si A ≥ 0 y B ≥ 0, entonces A = B ⇔ $A^2 = B^2$

Otra demostración:
El punto P(x, y) está en la parábola
⇔ $|y-(-p)|$
$= \sqrt{x^2+(y-p)^2}$
⇔ $|y+p|^2 = x^2 + (y-p)^2$
⇔ $y^2 + 2py + p^2$
$= x^2 + y^2 - 2py + p^2$
⇔ $4py = x^2$
⇔ $y = \frac{1}{4p}x^2$

Ejemplo 1.1. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es (0, 3) y cuya directriz es $y = -3$. Dibuje la gráfica.

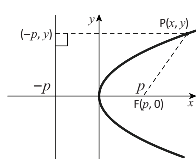
Solución: En la fórmula o ecuación se sustituye $p = 3$ y se obtiene:

$$y = \frac{1}{12}x^2$$



Ejercicio 1.1. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es F y cuya directriz es l. Dibuje la gráfica.

a) F(0, 1), $l : y = -1$
b) F(0, 4), $l : y = -4$
c) F(0, −3), $l : y = 3$
d) F(0, −2), $l : y = 2$

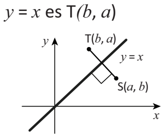


* Tomando la simetría de la Fig. 1.1, con respecto a la recta $y = x$ se obtiene otra parábola con:

foco (p, 0), directriz $x = -p$

vértice (0, 0), eje $y = 0$ cuya ecuación es: $x = \frac{1}{4p}y^2$

El punto T que es simétrico al punto S(a, b) con respecto a la recta $y = x$ es T(b, a)



26 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1. Ecuación de la parábola

Objetivo: Entender la relación de las ecuaciones de la figura original y la desplazada.

Evaluación: Ejercicio 1.4

Unidad II. Lección 1.

Clase 1

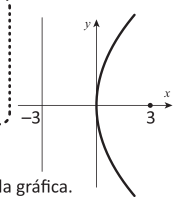
(Continuación)

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

*** Ejemplo 1.2.** Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es (3, 0) y cuya directriz es $x = -3$. Dibuje la gráfica.

Solución: $x = \frac{1}{12}y^2$



*** Ejercicio 1.2.** Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es F y cuyo vértice es l. Dibuje la gráfica.

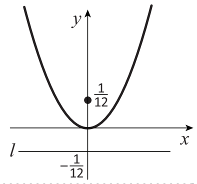
a) F(1, 0), $l: x = -1$ b) F($-\frac{1}{2}$, 0), $l: x = \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.3. Encuentre el foco F, la directriz l, el vértice V y el eje de la parábola $y = 3x^2$. Dibuje gráfica.

Solución: Comparando $y = 3x^2$ con $y = \frac{1}{4p}x^2$,

se tiene que: $3 = \frac{1}{4p}$, luego $p = \frac{1}{12}$

F = $(0, \frac{1}{12})$, $l: y = -\frac{1}{12}$, V(0, 0), eje $x = 0$



Generalmente, comparando $y = ax^2$ y $y = \frac{1}{4p}x^2$, se tiene que

$\boxed{a = \frac{1}{4p}}$

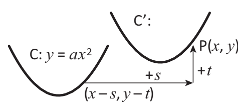
Luego $p = \frac{1}{4a}$.

Ejercicio 1.3. Encuentre el foco F, la directriz l, vértice V y el eje. Dibuje gráfica.

a) $y = \frac{1}{12}x^2$ b) $y = -3x^2$ *c) $x = \frac{1}{8}y^2$ *d) $x = -y^2$

Clase 2. Desplazamiento paralelo

Se desplaza paralelamente la parábola C: $y = ax^2$, s hacia el eje x y t hacia el eje y y se obtiene la parábola C'.



P$(x, y) \in$ C' $\Leftrightarrow (x - s, y - t) \in$ C

$\Leftrightarrow y - t = a(x - s)^2$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

Desplazamiento paralelo

C: $y = ax^2 \longrightarrow \dfrac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y} \longrightarrow$ C': $y - t = a(x - s)^2$

Ejemplo 1.4. Encuentre la ecuación de la parábola obtenida después de desplazar la parábola $y = 2x^2$, 3 hacia el eje x y -1 hacia el eje y.

Solución: $y - (-1) = 2(x - 3)^2$, $y = 2(x - 3)^2 - 1$

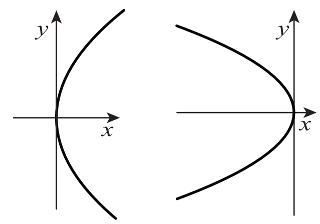
Se puede desarrollar: $y = 2x^2 - 12x + 17$.

*** Ejemplo 1.2**

*** Ejercicio 1.2**

Solución:

a) $x = \frac{1}{4}y^2$ b) $x = -\frac{1}{2}y^2$



Ejemplo 1.3

(6 min)

El punto es la comparación de las dos formas

$y = ax^2$ y $y = \frac{1}{4p}x^2$

$a = \frac{1}{4p}$

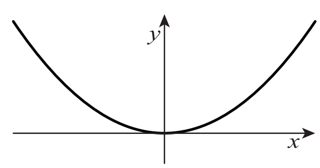
Ejercicio 1.3

(6 min) Solución

a) $\frac{1}{12} = \frac{1}{4p}$ $p = \frac{12}{4} = 3$

F(0,3) ; l:$y = -3$;

V(0,0); eje: $x = 0$.



Incisos b, c y d solución en pág. 53.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Ecuación de la figura desplazada. (15 min)

Hay que saber que el punto (a, b) que está en la figura $y = f(x)$ equivale a $b = f(a)$.

Ejemplo 1.4. (5 min)

Unidad II. Lección 1.

Clase 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Conocer la manera de completar cuadrados.

Evaluación: Ejercicio 1.6, 1.7

Ejercicio 1.4
(15 min) Solución:

a) $y - 1 = (x - 2)^2$,
$y = (x - 2)^2 + 1$

b) $y - (-2) = 3\{x - (-4)\}^2$,
$y = 3(x + 4)^2 - 2$

c) $y - 2 = -3(x - 3)^2$,
$y = -3(x - 3)^2 + 2$

d) $y - 3 = -\{x - (-1)\}^2$,
$y = -(x + 1)^2 + 3$

Forma general de desplazamiento
(10 min)

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Fórmula de completación de cuadrado
(6 min)

Ejemplo 1.5
(4 min) Calcular 3^2 y 4^2.

Ejercicio 1.5
(9 min) Solución

a) $(x + 4)^2 - 16$
b) $(x + 2)^2 - 4$
c) $(x - 3)^2 - 9$
d) $(x - 1)^2 - 1$

Ejemplo 1.6.
(4 min)

Ejercicio 1.4. Encuentre la ecuación de la parábola obtenida después del desplazamiento indicado:

a) $y = x^2$; 2 hacia el eje x, 1 hacia el eje y
b) $y = 3x^2$; −4 hacia el eje x, −2 hacia el eje y
c) $y = -3x^2$; 3 hacia el eje x, 2 hacia el eje y
d) $y = -x^2$; −1 hacia el eje x, 3 hacia el eje y

Generalmente, si se representa la ecuación de la figura C en la forma $F(x, y) = 0$, la fórmula anterior tiene la siguiente forma:

Desplazamiento paralelo (forma general)

$$C: F(x, y) = 0 \xrightarrow[t \text{ hacia el eje } y]{s \text{ hacia el eje } x} C': F(x - s, y - t) = 0$$

En el caso de la parábola $y = ax^2$, puede ser $F(x, y) = ax^2 - y$.
La demostración anterior se aplica a este caso general.

Clase 3. Completación de cuadrados

De la fórmula de factorización: $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$, se obtiene la siguiente fórmula de completación de cuadrados.

Completación de cuadrados

$$x^2 + ax = x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

Ya se aplicó esta técnica en la deducción de la fórmula cuadrática. (Matemática I)

Ejemplo 1.5. Complete cuadrados. a) $x^2 + 6x$ b) $x^2 - 8x$
Solución: a) $x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9$
b) $x^2 - 8x = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2 = (x - 4)^2 - 16$

Ejercicio 1.5. Complete cuadrados.
a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 + 4x$ c) $x^2 - 6x$ d) $x^2 - 2x$

Ejemplo 1.6. Complete cuadrados: $x^2 + 6x + 1$
Solución: $\underline{x^2 + 6x} + 1 = \underline{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^3 - 3^3} + 1$
$= (x + 3)^2 - 9 + 1$
$= (x + 3)^2 - 8$

Primero transforme los términos que contienen x.

Ejercicio 1.6. Complete cuadrados.
a) $x^2 + 8x + 2$ b) $x^2 + 4x - 5$ c) $x^2 - 6x + 1$ d) $x^2 - 2x - 7$

Ejemplo 1.7. Complete cuadrados: $3x^2 + 12x + 5$
Solución: $3x^2 + 12x + 5 = 3(x^2 + 4x) + 5 = 3\{x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2\} + 5$
$= 3\{(x + 2)^2 - 4\} + 5$
$= 3(x + 2)^2 - 12 + 5$
$= 3(x + 2)^2 - 7$

Se recomienda que no se abrevie el proceso para evitar errores, sobre todo cuando el coeficiente de x^2 es negativo.

Ejercicio 1.6. (6 min) Solución

a) $(x + 4)^2 - 14$ b) $(x + 2)^2 - 9$
c) $(x - 3)^2 - 8$ d) $(x - 1)^2 - 8$

Ejemplo 1.7. (5 min)
Escriba todo el proceso.

Objetivo: Encontrar el desplazamiento aplicando completación de cuadrados.

Evaluación: Ejercicio 1.9

Unidad II. Lección 1.
Clase 3
(Continuación)

Clase 4

Ejercicio 1.7. Complete cuadrados.

a) $3x^2 + 6x + 4$ b) $2x^2 - 8x + 1$ c) $5x^2 - 20x + 4$ d) $-3x^2 + 12x - 1$

e) $-2x^2 + 4x - 3$ f) $-5x^2 - 10x + 3$ g) $-x^2 - 4x + 3$ h) $-x^2 + 6x + 1$

*** Ejemplo 1.8.** Complete cuadrados: a) $x^2 + 3x + 1$ b) $3x^2 - 4x + 1$

Solución:

a) $x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1$

$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1$

$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

b) $3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 1$

$= 3\left\{x^2 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} + 1$

$= 3\left\{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right\} + 1$

$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 1$

$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

*** Ejercicio 1.8.** Complete cuadrados.

a) $x^2 + 5x - 2$ b) $-x^2 + x + 1$ c) $5x^2 - 2x + 1$

d) $-3x^2 + 8x + 1$ e) $3x^2 + 5x - 4$ f) $-2x^2 + 3x + 7$

Clase 4. Encontrar desplazamiento

Ejemplo 1.9. Encuentre el desplazamiento que traslada

C: $y = x^2$ a C': $y = x^2 - 6x + 10$.

Solución: Completando cuadrados

$y = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2 - 3^2 + 10 = (x-3)^2 + 1$, $y - 1 = (x-3)^2$

Por lo tanto, se obtiene C' al desplazar C

3 hacia el eje x y 1 hacia el eje y.

Compare con la fórmula de la Clase 2.

Ejercicio 1.9. Encuentre el desplazamiento que traslada C a C'

a) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 - 4x + 5$ b) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 + 4x + 10$

c) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 + 6x + 1$ d) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 - 8x + 2$

e) C: $y = -x^2$, C': $y = -x^2 - 4x + 3$ f) C: $y = -x^2$, C': $y = -x^2 + 6x - 10$

g) C: $y = -3x^2$, C': $y = -3x^2 - 6x + 4$ h) C: $y = -5x^2$, C': $y = -5x^2 - 20x + 3$

De esos cálculos se ve lo siguiente:

Se puede poner la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sobre la parábola $y = a'x^2 + b'x + c'$ por un desplazamiento paralelo $\Leftrightarrow a = a'$.

Demostración: La primera se obtiene desplazamiento

$y = ax^2$ y la segunda $y = a'x^2$

Unidad II • Lección 1 • Clase 4. Encontrar desplazamiento | 29

Ejercicio 1.7
(11 min) Solución:

a) $3(x+1)^2 + 1$

b) $2(x-2)^2 - 7$

c) $5(x-2)^2 - 16$

d) $-3(x-2)^2 + 11$

e) $-2(x-1)^2 - 1$

f) $-5(x+1)^2 + 8$

g) $-(x+2)^2 + 7$

h) $-(x-3)^2 + 10$

* Ejemplo 1.8
Esencialmente no hay nada de nuevo. Solo aparecen fracciones.

*Ejercicio 1.8
Solución:

a) $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$

b) $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

c) $5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$

d) $-3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}$

e) $3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{73}{12}$

f) $-2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{65}{8}$

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

Ejemplo 1.9
(10 min)

Ejercicio 1.9
(25 min)

Solución en pág. 53

Condición de la superposición de las parábolas por desplazamiento.
(10 min)

Unidad II. Lección 1.
Clase 5

Objetivo: Encontrar las componentes de la parábola completando cuadrados.

Evaluación: Ejercicio 1.11

Ejemplo 1.10
(10 min)
Como la parábola $y = x^2 - 4x + 9$ se obtiene desplazando $y = x^2$, primero se calcula el foco y luego los demás componentes.

Clase 5. Componentes de parábolas

Ejemplo 1.10. Encuentre el vértice, el eje, el foco y la directriz de la parábola

$$y = x^2 - 4x + 9.$$

Solución: Se obtiene la parábola $y = x^2 - 4x + 9$ desplazando $y = x^2$.

Comparado $y = x^2$ con $y = \frac{1}{4p}x^2$, se tiene que $1 = \frac{1}{4p}$,

luego $p = \frac{1}{4}$.

Por otra parte,
$y = x^2 - 4x + 9 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 9 = (x-2)^2 - 4 + 9 = (x-2)^2 + 5$

Desplazar 2 hacia el eje x y 5 hacia el eje y.

	$y = x^2$	$y = (x-2)^2 + 5$
Vértice	(0, 0)	(2, 5)
Eje	$x = 0$	$x = 2$
Foco	$(0, \frac{1}{4})$	$(2, \frac{21}{4})$
Directriz	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{19}{4}$

Ejercicio 1.10. Encuentre vértice (V), el eje E, el foco (F) y la directriz (D).

a) $y = x^2 + 6x + 12$
b) $y = x^2 + 4x + 1$
c) $y = x^2 - 6x + 1$
d) $y = 2x^2 + 4x - 3$
e) $y = 3x^2 - 12x + 4$
f) $y = -x^2 + 6x + 3$
g) $y = -2x^2 - 8x + 3$
h) $y = -3x^2 + 6x$
*i) $y = x^2 - 3x + 1$

Si el foco y la directriz de la parábola C: $y = ax^2$ son $(0, p)$ y $y = -p$ respectivamente, entonces la ecuación de C tiene la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$. Por lo tanto, se tiene que $a = \frac{1}{4p}$, luego $p = \frac{1}{4a}$.

Trasladando C, s hacia el eje x, t hacia el eje y, se tiene lo siguiente:

	C: $y = ax^2$	C′: $y = a(x-s)^2 + t$
Vértice	(0, 0)	(s, t)
Eje	$x = 0$	$x = s$
Foco	$(0, \frac{1}{4a})$	$(s, \frac{1}{4a} + t)$
Directriz	$y = -\frac{1}{4a}$	$y = -\frac{1}{4a} + t$

30 | Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Componentes de parábolas

Ejercicio 1.10
(25 min) Solución:
a) $y = \{x - (-3)\}^2 + 3$
b) $y = \{x - (-2)\}^2 - 3$
c) $y = (x-3)^2 - 8$
d) $y = 2\{x - (-1)\}^2 - 5$
e) $y = 3(x-2)^2 - 8$
f) $y = -(x-3)^2 + 12$
g) $y = -2\{x - (-2)\}^2 + 11$
h) $y = -3(x-1)^2 + 3$
*i) $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

V	E	F	D
a) (−3, 3)	$x = -3$	$(-3, \frac{13}{4})$	$y = \frac{11}{4}$
b) (−2, −3)	$x = -2$	$(-2, -\frac{11}{4})$	$y = -\frac{13}{4}$
c) (3, −8)	$x = 3$	$(3, -\frac{31}{4})$	$y = -\frac{33}{4}$
d) (−1, −5)	$x = -1$	$(-1, -\frac{39}{8})$	$y = -\frac{41}{8}$
e) (2, −8)	$x = 2$	$(2, -\frac{95}{12})$	$y = -\frac{97}{12}$
f) (3, 12)	$x = 3$	$(3, \frac{47}{4})$	$y = \frac{49}{4}$
g) (−2,11)	$x = -2$	$(-2, \frac{87}{8})$	$y = \frac{89}{8}$
h) (1,3)	$x = 1$	$(1, \frac{35}{12})$	$y = \frac{37}{12}$
*i) $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$	$x = \frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, -1)$	$y = -\frac{3}{2}$

Componentes de la parábola.
(forma general) (10 min)

No es recomendable enseñar esta parte primero para aplicarla al ejercicio 1.11

Objetivo: Encontrar el desplazamiento aplicando la completación de cuadrados.

Unidad II. Lección 1.
Clase 6

Evaluación: Ejercicio 1.9

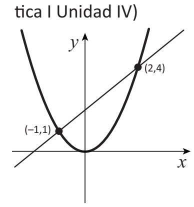
Clase 6. Parábola y recta

Ejemplo 1.11. Encuentre los puntos comunes de $y = x^2$ y $y = x + 2$.
Solución:

$$\begin{cases} y = x^2 & \ldots(1) \\ y = x + 2 & \ldots.(2) \end{cases} \quad \text{De (1) y (2) se obtiene:}$$

$x^2 = x + 2$, $\quad x^2 - x - 2 = 0$, $\quad (x-2)(x+1) = 0$
$x = 2$, $x = -1$. Sustituyendo el valor de x en (2),
cuando $x = 2$, $\quad y = 2 + 2 = 4 \quad$ y
cuando $x = -1 \quad y = -1 + 2 = 1 \quad$ Respuesta: (2, 4) y (–1, 1)

Las coordenadas del punto común es la solución del sistema de ecuaciones. (Matemática I Unidad IV)



Ejercicio 1.11. Encuentre puntos comunes si existen.

a) $y = x^2$, $\; y = -x + 2$ b) $y = x^2 - x$, $\; y = 3x - 3$
c) $y = -x^2 + 1$, $\; y = x - 5$ d) $y = -2x^2 + 3$, $\; y = -x$
e) $y = x^2 - x$, $\; y = 3x - 4$ f) $y = x^2$, $\; y = x - 1$

*** Ejemplo 1.12.** Determine el valor de b de modo que $y = x^2$ y $y = 2x + b$ tengan un solo punto común.
Solución:

$$\begin{cases} y = x^2 & \ldots(1) \\ y = 2x + b & \ldots.(2) \end{cases} \quad \text{De (1) y (2) se obtiene:}$$

$x^2 = 2x + b$, $\quad x^2 - 2x - b = 0 \quad \ldots (3)$
La condición equivale a que (3) tiene una única solución real, lo que significa que el discriminante D de (3) es 0.

$$D = (-2)^2 - 4\,(1)(-b) = 4 + 4b = 4(1 + b)$$

Como $D = 0$, entonce $b = -1$.

Cuando una recta no paralela al eje de la parábola tiene un único punto común con la parábola, se dice que la recta es tangente a la parábola.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ tiene una única solución $\Leftrightarrow$ el discriminante $b^2 - 4ac = 0$.

*** Ejercicio 1.12.** Determine el valor de b de modo que la parábola y la recta tengan solo un punto común.

a) $y = x^2$, $\quad y = -2x + b$
b) $y = x^2 - x$, $\quad y = 3x + b$
c) $y = -x^2$, $\quad y = 6x + b$
d) $y = -4x^2 - 3x$, $\quad y = x + b$

Unidad II • Lección 1 • Clase 6. Parábola y recta | 31

Ejemplo 1.11
(10 min)

Ejercicio 1.11
(35 min) Solución

a) $x^2 = -x + 2$,
$(x + 2)(x - 1) = 0$
(–2, 4), (1, 1)

b) $x^2 - x = 3x - 3$,
$(x - 3)(x - 1) = 0$
(3, 6), (1, 0)

c) $-x^2 + 1 = x - 5$,
$(x + 3)(x - 2) = 0$
(–3, –8), (2, –3)

d) $-2x^2 + 3 = -x$,
$(2x - 3)(x + 1) = 0$
$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, (–1,1)

e) $x^2 - x = 3x - 4$
$(x - 2)^2 = 0$
(2, 2)

f) $x^2 = x - 1$, $x^2 - x + 1 = 0$
No tiene soluciones reales. Luego no existe punto común.

*** Ejercicio 1.12**
Solución en pág. 54

*** Ejemplo 1.12**

Unidad II. Lección 1.
Ejercicios de la lección

1. a) $y = \frac{1}{2}x^2$, b) $y = -\frac{1}{12}x^2$

2. Sean $(0, p)$ el foco y $y = -p$ la directriz.

a) $2 = \frac{1}{4p}$, $p = \frac{1}{8}$, $(0, \frac{1}{8})$, $y = -\frac{1}{8}$

b) $5 = \frac{1}{4p}$, $p = \frac{1}{20}$, $(0, \frac{1}{20})$, $y = -\frac{1}{20}$

c) $-1 = \frac{1}{4p}$, $p = -\frac{1}{4}$,

$(0, -\frac{1}{4})$, $y = \frac{1}{4}$

d) $-\frac{3}{5} = \frac{1}{4p}$, $p = -\frac{5}{12}$,

$(0, -\frac{5}{12})$, $y = \frac{5}{12}$

3.

a) $y - (-1) = \frac{1}{2}(x-1)^2$

$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$

b) $y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}\{x - (-\frac{1}{2})\}^2$

$y = -\frac{3}{2}(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}$

4. a) $-\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$

b) $-3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{2}{3}$

5. a) C: $y = (x-2)^2 - 1$

C': $y = (x+1)^2 + 2$;

-3 hacia el eje x

3 hacia el eje y

b) C: $y = -(x+3)^2 + 10$

C': $y = -(x-2)^2 + 1$;

5 hacia el eje x

-9 hacia el eje y

c) C: $y = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{5}{2}$

C': $y = -2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8}$;

$-\frac{5}{4}$ hacia el eje x

$-\frac{19}{8}$ hacia el eje y

6. a) $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 3$,

$-\frac{1}{3} = \frac{1}{4p}$ $p = -\frac{3}{4}$

V $(3, 3)$, E: $x = 3$,

F: $(3, \frac{9}{4})$, D: $y = \frac{15}{4}$

b) $y = 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{9}{8}$,

$2 = \frac{1}{4p}$ $p = \frac{1}{8}$

V $(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$, E: $x = -\frac{1}{4}$,

F: $(-\frac{1}{4}, -1)$, D: $y = -\frac{5}{4}$

7. a) $2x^2 + 3x = 2x + 1$,

$(2x-1)(x+1) = 0$,

$(\frac{1}{2}, 2)$, $(-1, -1)$

b) $-6x^2 - 3x + 2 = 4x - 1$,

$(3x-1)(2x+3) = 0$

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(-\frac{3}{2}, -7)$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene el foco F y la directriz l siguientes: Clase 1
   a) F$(0, \frac{1}{2})$, $l: y = -\frac{1}{2}$
   b) F$(0, -3)$, $l: y = 3$
2. Encuentre el foco y la directriz. Clase 1
   a) $y = 2x^2$ b) $y = 5x^2$
   c) $y = -x^2$ d) $y = -\frac{3}{5}x^2$
3. Encuentre la ecuación de la parábola obtenida después del desplazamiento indicado. Clase 2
   a) $y = \frac{1}{2}x^2$; 1 hacia el eje x, -1 hacia el eje y
   b) $y = -\frac{3}{2}x^2$; $-\frac{1}{2}$ hacia el eje x, $\frac{1}{3}$ hacia el eje y
4. Complete cuadrados. Clase 3
   a) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1$
   b) $-3x^2 + 2x - 1$
5. Encuentre el desplazamiento que traslada C a C'. Clase 4
   a) C: $y = x^2 - 4x + 3$, C': $y = x^2 + 2x + 3$
   b) C: $y = -x^2 - 6x + 1$, C': $y = -x^2 + 4x - 3$
   c) C: $y = -2x^2 + 6x - 2$, C': $y = -2x^2 + x$
6. Encuentre el vértice (V), el eje (E), el foco (F) y la directriz (D). Clase 5
   a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$
   b) $y = 2x^2 + x - 1$
7. Encuentre los puntos comunes. Clase 6
   a) $y = 2x^2 + 3x$, $y = 2x + 1$
   b) $y = -6x^2 - 3x + 2$, $y = 4x - 1$

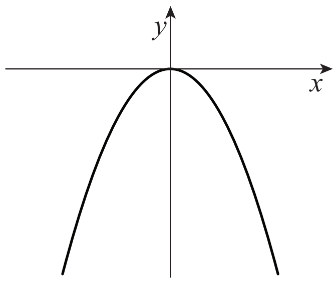
32 | Unidad II • Lección 1 • Ejercicios de la lección

Solución Ejercicio 1.3. Pág. 47. Incisos b), c) y d) Solución

b) $-3 = \frac{1}{4p}$; $p = -\frac{1}{12}$

F$(0, -\frac{1}{12})$; l: $y = \frac{1}{12}$

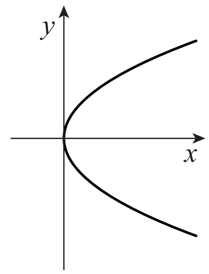
V(0, 0); eje: $x = 0$



*c) $\frac{1}{8} = \frac{1}{4p}$; $p = 2$

F(2,0); l: $x = -2$

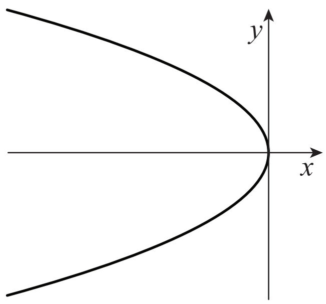
V(0, 0); eje: $y = 0$



*d) $-1 = \frac{1}{4p}$; p $= -\frac{1}{4}$

F$(-\frac{1}{4}, 0)$; l: $x = \frac{1}{4}$

V(0, 0); eje: $y = 0$



Solución Ejercicio 1.9. Pág. 49.

C’	Hacia el eje x	Hacia el eje y
a) $y = (x-2)^2 + 1$	2	1
b) $y = \{x-(-2)\}^2 + 6$	−2	6
c) $y = \{x-(-3)\}^2 - 8$	−3	−8
d) $y = (x-4)^2 - 14$	4	−14
e) $y = -\{x-(-2)\}^2 + 7$	−2	7
f) $y = -(x-3)^2 - 1$	3	−1
g) $y = -3\{x-(-1)\}^2 + 7$	−1	7
h) $y = -5\{x-(-2)\}^2 + 23$	−2	23

Solución Ejercicio 1.13. Pág. 51.

Sea D el discriminante.

a) $x^2 = -2x + b$,

$x^2 + 2x - b = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b)$

$= 4 + 4b = 0$

$b = -1$ Respuesta.

b) $x^2 - x = 3x + b$,

$x^2 - 4x - b = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) = 16 + 4b = 0$

$b = -4$ Respuesta.

c) $-x^2 = 6x + b$,

$x^2 + 6x + b = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = 36 - 4b = 0$

$b = 9$ Respuesta.

d) $-4x^2 - 3x = x + b$,

$4x^2 + 4x + b = 0$

$D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot b = 16 - 16b = 0$

$b = 1$ Respuesta.

Objetivo: Entender la ecuación de la circunferencia.

Evaluación: Ejercicio 2.1, 2.2 y 2.3

Unidad II. Lección 2.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Lección 2. Cincunferencias

Clase 1. Ecuación de circunferencia

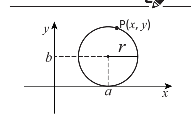
Definición Circunferencia
La circunferencia con el centro C y el radio r es el conjunto de puntos en el mismo plano que C, que distan r del punto C.

Ecuación de Circunferencia
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ centro: C(a, b), radio: r

Demostración: P(x, y) está en la circunferencia $\Leftrightarrow$ PC = r

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



La distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Si $A \geq 0$ y $B \geq 0$, entonces $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

Ejemplo 2.1. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (2, 3) y el radio 4.

Solución: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ (Respuesta)

Ejercicio 2.1. Encuentre la ecuación de la circunferencia con el centro C y el radio r.
a) C(4, 1), $r = 2$ b) C(–5, 2), $r = 1$ c) C(–2, –1), $r = 2$ d) C(0, 0), $r = 4$

Ejemplo 2.2. Encuentre el centro y el radio de $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.
Solución: Expresando la ecuación en forma de $(x-3)^2 + \{y-(-4)\}^2 = 5^2$
el centro: (3, – 4), el radio: 5.

Ejercicio 2.2. Encuentre el centro (C) y el radio (r).
a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$
c) $(x+4)^2 + y^2 = 1$ d) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 5$

Ejemplo 2.3. Encuentre la figura representada por la ecuación:
$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$.

Complete cuadrados.

Solución:
$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$
$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) + 6 = 0$$
$$(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2) + (y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1^2 - 1^2) + 6 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 6 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$
Respuesta: La figura es una circunferencia con centro (3, 1) y radio 2.

Ejercicio 2.3. Encuentre la figura representada por cada ecuación.
a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 30 = 0$
*e) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$ *f) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 21 = 0$

Unidad II • Lección 2 • Clase 1. Ecuación de circunferencia | 33

Definición de la Circunferencia. (3 min)

Ecuación de la Circunferencia. (8 min)

Ejemplo 2.1
(4 min)

Ejercicio 2.1
(4 min) Solución:
a) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$
b) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 1$
c) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$
d) $x^2 + y^2 = 16$

Ejemplo 2.2
(5 min)

Ejercicio 2.2
(4 min) Solución:
a) C(2, 1), $r = 3$
b) C(3, –2), $r = 4$
c) C(–4, 0), $r = 1$
d) C(–2, –3), $r = \sqrt{5}$

Ejemplo 2.3
(6 min)

Ejercicio 2.3
(11 min)
a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$
Circunferencia C(1, 2), $r = 3$

b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$
Circunferencia C(–2, 3), $r = 2$
c) $x^2 + (y+2)^2 = 1^2$
Circunferencia C(0, –2), $r = 1$
d) $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 2^2$
Circunferencia C(–5, –3), $r = 2$
*e) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 0$
Punto (3, –1),
*f) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = -1$
Ninguna figura

Unidad II. Lección 2.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender cómo encontrar la ecuación de la tangente a una circunferencia.

Evaluación: Ejercicio 2.5

*Ejercicio 2.4
Solución:

a) $(x-3)^2+(y+1)^2$ $= 10-k$, $10-k=4^2$, $k=-6$ (Respuesta)

b) La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$, $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Igualando los coeficientes, se tiene que $s=-4$, $t=2$, $k=-4$ (Respuesta)

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Característica de la tangente a una circunferencia. (3 min)

Fórmula de la tangente (23 min)
Como se trata de la pendiente, hay que excluir los cuatro puntos; (1, 0), (0, 1), (–1,0) y (0, –1).

Ejemplo 2.4
(4 min)

Ejercicio 2.5
(15 min) Solución:

a) $3x+2y=13$

b) $-x+3y=10$

c) $2x-4y=20$, $x-2y=10$

d) $-x+y=2$

e) $-2x=4$, $x=-2$

f) $-3y=9$, $y=-3$

*** Ejercicio 2.4.**

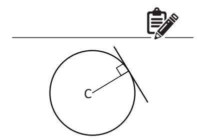
a) Determine el valor k de modo que $x^2+y^2-6x+2y+k=0$ represente una circunferencia con el radio 4.

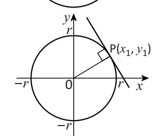
b) Determine el valor de s, t y k de modo que $x^2+y^2+sx+ty+k=0$ represente la circunferencia con el centro (2, –1) y el radio 3.

Clase 2. Tangente a la circunferencia

La tangente a una circunferencia
Es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

La tangente a la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ con el punto de tangencia P(x_1, y_1) es $x_1x+y_1y=r^2$



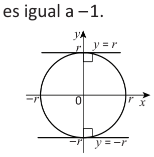


Demostración:

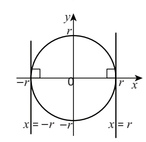
Caso 1. Cuando $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$. La pendiente de la recta OP es $\frac{y_1}{x_1}$.
Sea a la pendiente de la tangente.
Como la tangente es perpendicular a la recta OP, se tiene que:
$a\frac{y_1}{x_1}=-1$, $a=-\frac{x_1}{y_1}$.
Por otra parte, la tangente pasa por el punto P(x_1, y_1).
Por lo tanto, se tiene que: $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$.
Multiplicando por y_1; queda: $x_1x+y_1y=r^2$.

Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de las pendientes es igual a –1.

Caso 2. Cuando $x_1=0$ se tiene que $y_1=r$ o $-r$ y P es A$(0, r)$ o B$(0, -r)$, luego la tangente es $y=r$ o $y=-r$.
Multiplicando y_1, se tiene que $y_1y=r^2$
Como $x_1=0$, se tiene que $x_1x+y_1y=r^2$



Caso 3. Cuando $y_1=0$.
Se puede tratar de manera similar al Caso 2.



Ejemplo 2.4. Encuentre la tangente a la circunferencia $x^2+y^2=5$ en el punto (2, 1).

Solución: $2x+1y=5$, $2x+y=5$

Ejercicio 2.5. Encuentre la tangente en el punto indicado.

a) $x^2+y^2=13$, (3, 2)
b) $x^2+y^2=10$, (–1, 3)
c) $x^2+y^2=20$, (2, –4)
d) $x^2+y^2=2$, (–1, 1)
e) $x^2+y^2=4$, (–2, 0)
f) $x^2+y^2=9$, (0, –3)

Objetivo: Entender la manera de calcular las coordenadas de los puntos comunes de la circunferencia y la recta.

Evaluación: Ejercicio 2.7

Unidad II. Lección 2.

Clase 2

(Continuación)

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

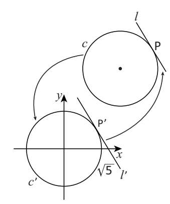
*** Ejemplo 2.5.** Encuentre la tangente en el punto P(4, 6) a la circunferencia $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Solución:

Paso 1: Se traslada la circunferencia –3 hacia el eje x y –4 hacia el eje y.
Se obtiene la circunferencia C': $x^2 + y^2 = 5$
y el punto P se traslada al punto P'(1, 2)... (4 –3, 6 –4).

Paso 2. La tangente l' en P' a C' es
$1x + 2y = 5$, $x + 2y = 5$.

Paso 3. Se traslada l' 3 hacia el eje x y 4 hacia el eje y.
Se obtiene
$(x-3) + 2(y-4) = 5$, $x + 2y - 16 = 0$ (Respuesta)



*** Ejercicio 2.6.** Encuentre la tangente en el punto P.

a) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 13$, P(–5, 4)

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$, P(5, –2)

Clase 3. Circunferencia y recta

Véase Ejemplo 1.12

Ejemplo 2.6. Encuentre los puntos comunes de
$x^2 + y^2 = 5$ y $3x + y - 5 = 0$

Solución: Las coordenadas de los puntos comunes son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{...(1)} \\ 3x + y - 5 = 0 & \text{...(2)} \end{cases}$$

De (2) se tiene que $y = -3x + 5$ ... (3)

Sustituyendo (3) en (1)

$x^2 + (-3x + 5)^2 = 5$, $10x^2 - 30x + 20 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$, $x = 1, x = 2$

Sustituyendo los valores de x en (3),

Cuando $x = 1$, $y = 2$

Cuando $x = 2$, $y = -1$

Respuesta (1, 2) y (2, –1)

Ejercicio 2.7. Encuentre los puntos comunes.

a) $x^2 + y^2 = 10$, $2x - y - 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 = 5$, $x + 3y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 = 13$, $5x - y - 13 = 0$

d) $x^2 + y^2 = 25$, $4x - 3y + 25 = 0$

Unidad II • Lección 2 • Clase 7. Circunferencia y recta | 35

***Ejemplo 2.5**

***Ejercicio 2.6**

Solución:

a) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 13$
$\rightarrow x^2 + y^2 = 13$
$p(-5, 4) \rightarrow p'(-2, 3)$
$-2(x+3) + 3(y-1)$
$= 13 \leftarrow -2x + 3y = 13$
$-2x + 3y = 22$ Respuesta.

b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$
$\rightarrow x^2 + y^2 = 10$
$p(5, -2) \rightarrow p'(3, 1)$
$3(x-2) + (y+3) = 10$
$\leftarrow 3x + y = 10$
$3x + y = 13$ Respuesta.

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 2.6

(10 min)

Ejercicio 2.7

(35 min) Solución:

a) Sustituyendo
$y = 2x - 5$,
$x^2 + (2x-5)^2 = 10$
$5x^2 - 20x + 15 = 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$(x-1)(x-3) = 0, x = 1, 3$
(1, –3), (3, 1) Respuesta.

b) Sustituyendo
$x = -3y - 5$,
$(-3y-5)^2 + y^2 = 5$
$10y^2 + 30y + 20 = 0$
$y^2 + 3y + 2 = 0$
$(y+1)(y+2) = 0, y = -1, -2$
(–2, –1), (1, –2)
Respuesta.

c) Sustituyendo $y = 5x - 13$,
$x^2 + (5x-13)^2 = 13$
$26x^2 - 130x + 156 = 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$, $x = 2, 3$
(2, –3), (3, 2) Respuesta.

d) Sustituyendo $y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$,
$x^2 + (\frac{4}{3}x + \frac{25}{3})^2 = 25$
$\frac{25}{9}x^2 + \frac{200}{9}x + \frac{400}{9} = 0$
$x^2 + 8x + 16 = 0$
$(x+4)^2 = 0$, $x = -4$ (–4, 3) Respuesta.

Unidad II. Lección 2.
Ejercicios de la lección

Problemas de la unidad

1.

a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.
Circunferencia centro $(1, -2)$, radio $\sqrt{5}$.

b) $(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.
Circunferencia centro $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $(x+\frac{5}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}$.
Circunferencia centro $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, radio $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. a) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 1$,
$3x - 4y = 5$
b) $-\sqrt{3}\,x + y = 4$
c) $2x - \sqrt{5}\,y = 9$

3.

a) Sustituyendo
$y = -\frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$,
$x^2 + (-\frac{5}{3}x + \frac{17}{3})^2 = 17$
$\frac{34}{9}x^2 - \frac{170}{9}x + \frac{136}{9} = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x-1)(x-4) = 0$, $x = 1, 4$
$(1,4)$, $(4, -1)$ Respuesta

b) Sustituyendo
$x = -\frac{3}{2}y + \frac{13}{2}$
$(-\frac{3}{2}y + \frac{13}{2})^2 + y^2 = 26$
$\frac{13}{4}y^2 - \frac{39}{2}y + \frac{65}{4} = 0$
$y^2 - 6y + 5 = 0$
$(y-1)(y-5) = 0$
$(5, 1)$, $(-1, 5)$ Respuesta

[Hasta aquí Ejercicios de la lección]

[Desde aquí Problemas de la Lección 1]

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la figura de cada ecuación. Clase 1
   a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 5x - 3y + 6 = 0$
2. Encuentre la tangente en el punto P. Clase 2
   a) $x^2 + y^2 = 1$, $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ b) $x^2 + y^2 = 4$, $P(-\sqrt{3}, 1)$
   c) $x^2 + y^2 = 9$, $P(2, -\sqrt{5})$
3. Encuentre los puntos comunes. Clase 3
   a) $x^2 + y^2 = 17$, $5x + 3y - 17 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 26$, $2x + 3y - 13 = 0$

Problemas de la Lección 1

1. Encuentre el desplazamiento paralelo que traslada C a C′. Clase 1.4
   a) C: $y = x^2 - x + 1$, C′: $y = x^2 + 3x + 5$
   b) C: $y = -2x^2 + 2x - 1$, C′: $y = -2x^2 - 3x$
2. Encuentre los puntos comunes. Clase 1.6
   a) $y = 2x^2 + x - 3$, $y = -x^2 + 6x - 1$ b) $y = 3x^2 - 2x + 1$, $y = x^2 - 3x + 4$
3. Encuentre la parábola obtenida desplazando C y cuyo vértice es V. Clase 1.5
   a) C: $y = x^2$, V: $(3, 2)$ b) C: $y = -2x^2$, V: $(-3, -4)$
4. Encuentre la parábola obtenida después del desplazamiento indicado de la parábola C. Clase 1.2
   a) C: $y = 2(x-1)^2 - 4$; 3 hacia el eje x, -2 hacia el eje y
   b) C: $y = -x^2 + 3x + 1$; -2 hacia el eje x, 1 hacia el eje y
5. Encuentre los puntos comunes. Clase 2.3
   a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$, $2x - y + 2 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$, $x + 5y - 10 = 0$
6. Determine el valor de k de modo que el eje x esté tangente a $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ Clase 2.1

Problemas de la Lección 2

1. Determine el valor de a de modo que la recta $y = ax - 9$ esté tangente a la parábola $y = x^2$. Clase 1.6
2. Encuentre las tangentes de $x^2 + y^2 = 5$ cuya pendiente es 2. Clase 2.2
3. Demuestre que la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ de la circunferencia C: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ es $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ Clase 2.2
4. Encuentre la(s) tangente(s) de $x^2 + y^2 = 5$ que pasan por el punto $(3, 4)$ considerando lo siguiente: Clase 2.2
   a) Sea $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia. Exprese la tangente con x_1 y y_1.
   b) Utilice el hecho de que el punto P está en la tangente en a) y obtenga una ecuación de x_1 y y_1.
   c) Utilice el hecho de que el punto (x_1, y_1) está en la circunferencia y obtenga una ecuación de x_1 y y_1.
   d) Resuelva el sistema de ecuaciones en x_1 y y_1.
   e) Exprese la(s) tangente(s).

36 | Unidad II • Lección 2 • Ejercicios de la lección | Problemas de la Lección 1 y 2

Problemas de la Lección 1
Solución en pág. 59

Problemas de la Lección 2
Solución en pág. 60

Unidad II. Problemas de la Lección 1. Soluciones

1. a) C: $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

   C’: $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$ vértice $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$

   –2 hacia el eje x y 2 hacia el eje y

   b) C: $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ vértice $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

   C’: $y = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$ vértice $\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$

   $-\frac{5}{4}$ hacia el eje x y $\frac{13}{8}$ hacia el eje y

2. a) $2x^2 + x - 3 = -x^2 + 6x - 1$

   $3x^2 - 5x - 2 = 0$, $(3x + 1)(x - 2) = 0$

   $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{28}{9}\right)$, $(2, 7)$

   b) $3x^2 - 2x + 1 = x^2 - 3x + 4$

   $2x^2 + x - 3 = 0$, $(2x + 3)(x - 1) = 0$

   $\left(-\frac{3}{2}, \frac{43}{4}\right)$, $(1, 2)$

3. a) $y = (x - 3)^2 + 2$

   b) $y = -2(x + 3)^2 - 4$

4. a) $y = 2(x - 4)^2 - 6$

   b) $y = -(x + 2)^2 + 3(x + 2) + 1 + 1$

   $y = -x^2 - x + 4$

5. a) Sustituyendo $y = 2x + 2$,

   $x^2 + (2x + 2)^2 - 4x - 2(2x + 2) - 5 = 0$

   $5x^2 - 5 = 0$, $x = \pm 1$

   (1, 4), (–1, 0). Respuesta

   b) Sustituyendo $x = -5y + 10$,

   $(-5y + 10)^2 + y^2 - 4(-5y + 10) + 2y - 8 = 0$

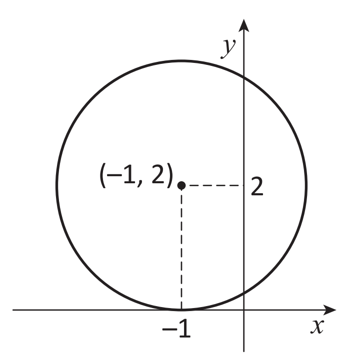
   $26y^2 - 78y + 52 = 0$, $y^2 - 3y + 2 = 0$

   $y = 1, 2$ (5, 1),(0, 2) Respuesta.

6. La ecuación dada equivale a $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 - k$

   La condición de la tangencia equivale a que el radio es igual a 2.

   Por lo tanto $5 - k = 2^2$. $k = 1$ (Respuesta)



Unidad II. Problemas de la Lección 2. Soluciones

1. Sustituyendo $y = ax - 9$, $ax - 9 = x^2$
   $x^2 - ax + 9 = 0$. El discriminante
   $D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = a^2 - 36$. La condición de la tangencia es $D = 0$. Luego $a = \pm 6$ (Respuesta).

2. Sea $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia. Como la pendiente de la tangente es 2, la de $\overline{OP}$ es $-\frac{1}{2}$.
   Por lo tanto $\frac{y_1}{x_1} = -\frac{1}{2}$
   $x_1 = -2y_1$ ……(1)
   Sustituyendo (1) en $x_1^2 + y_1^2 = 5$, se tiene que $5y_1^2 = 5$, $y_1 = \pm 1$
   Luego $(x_1, y_1) = (-2, 1), (2, -1)$ Entonces las tangentes son $-2x + y = 5$, $2x - y = 5$

3. Desplazando C a C’ de modo que el centro quede en el origen, la ecuación de C’ es $x^2 + y^2 = r^2$ y P se traslada a $P'(x_1 - a, y_1 - b)$. La tangente a C’ en P’ es $(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = r^2$.
   Desplazando estas figuras de modo que C’ se traslade a C, esta tangente se traslada a:
   $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

4. a) $x_1 x + y_1 y = 5$

   b) Sustituyendo $(x, y) = (3, 4)$.
   $3x_1 + 4y_1 = 5$

   c) $x_1^2 + y_1^2 = 5$.

   d) Sustituyendo $y_1 = -\frac{3}{4} x_1 + \frac{5}{4}$,
   $x_1^2 + (-\frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4})^2 = 5$, $\frac{25}{16}x_1^2 - \frac{15}{8}x_1 - \frac{55}{16} = 0$
   $5x_1^2 - 6x_1 - 11 = 0$. $(5x_1 - 11)(x_1 + 1) = 0$
   $(x_1, y_1) = (\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}), (-1, 2)$

   e) $11x - 2y = 25$, $-x + 2y = 5$.

Objetivo: **[A]** Definir una elipse y determinar su ecuación.

Unidad II. Lección 3.

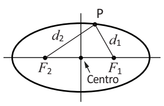
Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Lección 3. Elipse

Clase 1 y 2. Ecuación de la elipse

Definición 3.1
Una elipse es el conjunto de puntos P(x, y) en un plano, tales que la suma de las distancias de P, a dos puntos fijos (F_1 y F_2) es constante.



A los puntos fijos F_1 y F_2 se les llama focos.
El punto medio del segmento que une F_1 y F_2 se le denomina centro de la elipse.

Ecuación de la elipse
La ecuación de una elipse con centro en el origen (0, 0) es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{donde } a > b > 0.$$

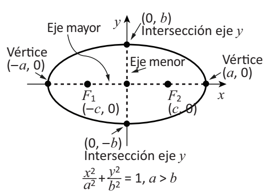


Fig. 1

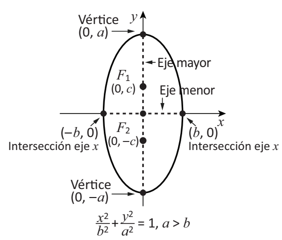


Fig. 2

En una elipse con centro en el origen, la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una misma distancia c del origen donde se define que $c^2 = a^2 - b^2$

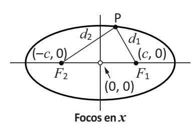
Demostración de la ecuación.
Para demostrar la ecuación de la elipse, se tomará el eje x como eje mayor.
Sea $m = 2a$ y los focos en x con coordenadas F_1 ($-c$, 0), F_2 (c, 0).
d_1 y d_2 son las distancias de F_1 a P y F_2 a P respectivamente.
P es un punto en la elipse, por definición: $d_1 + d_2 = m$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \text{Elevando ambas al cuadrado}$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$4cx = 4\left(a^2 - a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

[A]

P es un punto de la elipse.
d_1 y d_2 son las distancias de P a F_1 y F_2 respectivamente.

Eje mayor: Es el segmento cuyos extremos son los vértices de la elipse, pasa por el centro y continen los focos.
Eje menor: Es el segmento que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor.



La distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Unidad II • Lección 3 • Clase 1 y 2. Elipse | 37

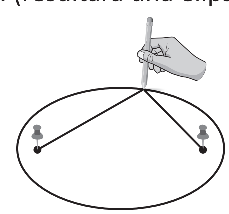
Presentar la figura 1 y 2 en la pizarra e identificar y definir los elementos de la elipse.

Demostración de la ecuación
(15 min)
*Analizar la demostración de la fórmula de la elipse en LE.
El docente puede intentar que los estudiantes demuestren la otra fórmula cuando el eje mayor está en y siguiendo los mismos procedimientos.

[Hasta aquí Clase 1]

[A]
Ecuación de la elipse

Definición 3.1. (20 min)
*Se puede intentar hacer una elipse utilizando una hoja de papel un cordón de hilo y dos tachuelas de papel de la siguiente manera: Colocar las dos tachuelas en el papel a una distancia arbitraria, luego fijar cada extremo del hilo en las dos tachuelas, el hilo debe tener una longitud mayor que la distancia entre las tachuelas luego con un lápiz tensar el hilo y dibujar el trazo de tal manera que el hilo permanezca tensado. (resultará una elipse).



*Hacer que los estudiantes noten que la distancia de los focos a cualquier punto de la elipse será constante.
Concluir en la definición 3.1.
*Explicar que la elipse tiene centro y este se obtiene sacando el punto medio del segmento formado por los focos.

Elementos de la elipse.
(10 min)
*Concluye en la ecuación de la elipse

Clase 1 y 2
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Encuentrar la ecuación de una elipse dados ciertos elementos.
[C] Determinar la ecuación de una elipse cuando el eje mayor es en y.

Evaluación: Ejercicio 3.1 y 3.2

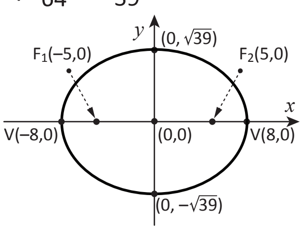
[Desde aquí Clase 2]

[B]

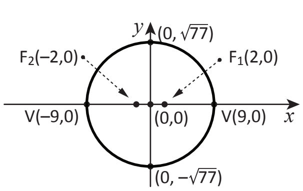
Ejemplo 3.1
(7 min)
M: ¿Qué datos se dan en el problema?
RP: Los focos y los vértices
M: De acuerdo a los datos dados ¿cuál es el eje mayor de la elipse?
RP: eje x
M: Si el vértice es (5, 0) y (−5, 0) cuánto vale a^2
RP: 25
M: ¿Cuánto vale c^2?
RP: 9
M: ¿Cómo encontramos b^2?
RP: Restando $a^2 - c^2$
M: ¿Cuánto vale b^2?
RP: 16
Concluye en la ecuación de la elipse.

Ejercicio 3.1
(15 min) Solución:

a) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$



b) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{77} = 1$



$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$(cx - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \qquad \text{Elevando al cuadrado}$$
$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$
$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$
$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$
$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Se define que $c^2 = a^2 - b^2$, es decir $b^2 = a^2 - c^2$. Por lo tanto,

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$$
$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \qquad \text{Ambos lados divididos entre } a^2b^2$$
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

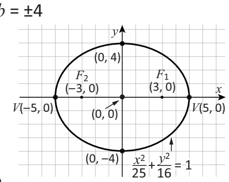
Se sustituye $b^2 = a^2 - c^2$ para obtener
$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$

Ejemplo 3.1. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son (3, 0) y (– 3, 0) y con vértices en (– 5, 0) y (5, 0). Dibuje la elipse.

Solución: Como los focos y los vértices están dados en el eje x, entonces el eje mayor está en x.
Los focos F_1 (c, 0), F_2 ($-c$, 0) entonces como $c > 0$, $c = 3 \to c^2 = 9$
Los vértices V(a, 0), V($-a$, 0) entonces como $a > 0$, $a = 5 \to a^2 = 25$
Por (1), $c^2 = a^2 - b^2 \to b^2 = a^2 - c^2$
$b^2 = 25 - 9 = 16$; $\to b = \pm 4$

La ecuación con la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

quedaría: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, su gráfica es:



[B]

Si el eje mayor está en x los focos están dados por (c, 0) y ($-c$, 0) y los vértices por (a, 0) y ($-a$, 0). Los extremos del eje menor son (0, b) y (0, $-b$).

Vértice: Son los extremos del eje mayor (Fig. 1).

Ejercicio 3.1. Encuentre la ecuación de la elipse y grafíquela si:
a) Vértice: V(±8, 0); Focos: F(±5, 0)
b) Vértice: V(±9, 0); Focos: F(±2, 0)
c) Vértice: V(±4, 0); Focos: F(±2$\sqrt{3}$, 0)
d) Vértice: V(±3, 0); Focos: F(±1, 0)
e) Vértice: V(±$\sqrt{15}$, 0); Focos: F(±$\sqrt{2}$, 0)

V(±8, 0) debe entenderse como: V(−8, 0) y V(8, 0).

Una elipse puede tener su eje mayor en el eje y por lo tanto la forma de la ecuación es:

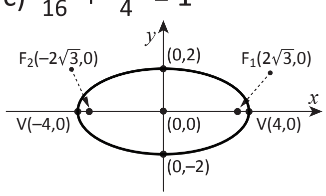
$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$ donde $a > b > 0$ y $c^2 = a^2 - b^2$

Los focos están definidos por F_1 (0, $-c$); F_2 (0, c)
sus vértices están dados por (0, a) y (0, $-a$)
y los extremos del eje menor son: (b, 0) y ($-b$, 0).

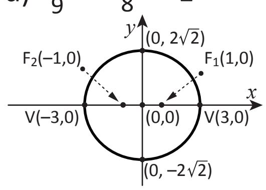
[C]

Se puede hacer un razonamiento similar a la demostración anterior para demostrar la ecuación
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

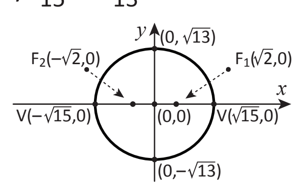
c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$



d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$



e) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{13} = 1$



Objetivo: **[A]** Graficar elipses.

Evaluación: Ejercicio 3.3 y 3.4

Unidad II. Lección 3.

Clase 1 y 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

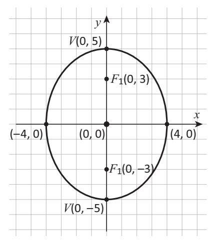
Ejemplo 3.2. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son F_1 (0, 3) F_2 (0, –3) y vértices son (0, –5) y (0, 5). Grafique la elipse.

Solución: Los focos y vértices están en el eje y, el eje mayor está en y. La forma de la ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Los focos están dados por:
$F(0, \pm c) = (0, \pm 3) \rightarrow$ como $c > 0$, $c = 3$
entonces $c^2 = 9$
Los vértices están dados por:
$V(0, \pm a) = (0, \pm 5) \rightarrow$ como $a > 0$, $a = 5$
entonces $a^2 = 25$
como $c^2 = a^2 - b^2$ entonces
$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

La ecuación es: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$;



En el Ejemplo 3.1 los valores a y b son los mismos que en el Ejemplo 3.2; pero la ecuación es distinta, porque en este caso su eje mayor está en y.

Ejercicio 3.2. Encuentre la ecuación de la elipse y grafique si:
a) Vértices: $V(0, \pm 7)$ y focos: $F(0, \pm 3)$
b) Vértices: $V(0, \pm 3)$ y focos: $F(0, \pm 1)$
c) Vértices: $V(0, \pm 12)$ y focos: $F(0, \pm 5)$
d) Vértices: $V(0, \pm 5)$ y focos: $F(0, \pm \sqrt{5})$
e) Vértices: $V(0, \pm 7)$ y focos: $F(0, \pm 2)$

Clase 3. Ecuación de la elipse

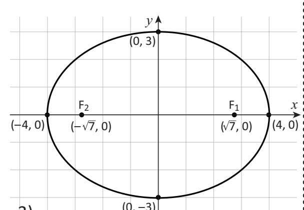
Ejemplo 3.3. Determine los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 = 144$. Grafique la elipse.

[A]

Solución: La ecuación de una elipse puede tener una de las siguientes formas:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ o $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a > b > 0$; por lo que la ecuación dada debe escribirse como una de ellas:

$$\frac{9x^2+16y^2}{144}=\frac{144}{144}$$ lo que resulta al simplificar: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$

La ecuación resultante determina el eje mayor en x; por lo que:
$a^2 = 16 \rightarrow$ como $a > 0$, $a = 4$
$b^2 = 9 \rightarrow$ como $b > 0$, $b = 3$
$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$
como $c > 0$, $c = \sqrt{7}$
Focos: $F_1(\sqrt{7}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{7}, 0)$
Vértices: $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$
Extremos del eje menor: (0, 3) y (0, –3).



$a > b$
$16 > 9$

Unidad II • Lección 3 • Clase 3. Ecuación de la elipse | 39

*Hacer que el estudiante se dé cuenta que para que la ecuación sea de una elipse debe escribirse en su forma estándar.
*Pedir a los estudiantes que hagan las operaciones necesarias para escribir la forma estándar de la ecuación.
M:Calcular a, b y c
¿Cuáles son los vértices, los focos y los extremos del eje menor?
RP: vértices (±4,0), focos $(\pm\sqrt{7}, 0)$ y extremos del eje menor (0, ±3).

Ejemplo 3.2
(8 min)
M: ¿Qué datos se dan en el problema?
RP: Los focos y los vértices
M: De acuerdo a los datos dados ¿cuál es el eje mayor de la elipse?
RP: Eje y
M: Si el vértice es (0, 5) y (0, –5) cuánto vale a^2
RP: 25
M: ¿Cuánto vale c^2?
RP: 9
R: ¿Cómo encontramos b^2?
RP: Restando $a^2 - c^2$
M: ¿Cuánto vale b^2?
RP: 16
M: ¿Cuál es la diferencia de este ejemplo con el anterior?
RP: La ecuación porque el eje mayor, es y
M: ¿Cuál es la ecuación?
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$
Concluye en la ecuación de la elipse.

Ejercicio 3.2
(15 min)
Solución en pág. 69

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

[A]

Ejemplo 3.3
(10 min)
M: ¿La ecuación dada corresponde a una elipse?
RP: No

Unidad II. Lección 3.

Clase 3

(Continuación)

Clase 4 y 5

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Determinan la ecuación de una elipse cuando hay deslazamiento paralelo de la misma.

Evaluación: Ejercicio 3.5

Ejemplo 3.4
(10 min)

Ejercicio 3.3
(10 min)
Solución en la pág. 69

[B]

Ejemplo 3.5
(10 min)
*Hacer un proceso de inducción similar que en [A]

Ejercicio 3.4
(5 min)
Solución en la pág. 70

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

[A]
*Determinar la ecuación de la elipse cuando hay desplazamiento paralelo.
(15 min)

Ejemplo 3.4. Encuentre los focos y los vértices de la elipse y trace su gráfica.

$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$

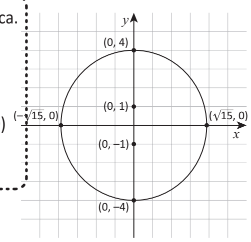
Solución: La ecuación dada muestra que el eje mayor es en "y"

$a^2 = 16$, como $a > 0$, $a = 4$, vértices (0, 4) y (0, –4)

$b^2 = 15$, como $b > 0$, $b = \sqrt{15}$ extremos del eje menor $(\sqrt{15}, 0)$ y $(-\sqrt{15}, 0)$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 15 = 1$

como $c > 0$, $c = 1$, foco (0, 1) y (0, –1)



Ejercicio 3.3. Determine los focos, vértices y extremos del eje menor y grafique la elipse:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ b) $x^2 + 4y^2 = 16$ c) $3x^2 + 2y^2 = 6$

d) $6x^2 + y^2 = 18$ e) $25x^2 + 9y^2 = 225$

Ejemplo 3.5. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene vértices: V(0, ±6) y que pasa por (3, 2). **[B]**

Solución: Los vértices dados tienen la forma $(0, \pm a)$, $a = 6 \rightarrow a^2 = 36$;

entonces el eje mayor está en y:

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, parcialmente es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{36} = 1$ la cual pasa por (3, 2).

Sustituyendo: $\frac{3^2}{b^2} + \frac{2^2}{36} = 1 \rightarrow \frac{9}{b^2} + \frac{4}{36} = 1$ despejando

$\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{4}{36} \Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow 9\left(\frac{9}{8}\right) = b^2 \qquad 9\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{8} = b^2$

Por lo tanto, la ecuación es: $\frac{x^2}{\frac{81}{8}} + \frac{y^2}{36} = 1$ ó $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

Ejercicio 3.4. Encuentre la ecuación de la elipse y haga su gráfica.

a) Vértice en $(0, \pm\sqrt{5})$ y pasa por $(-1, \sqrt{2})$. b) Vértice en (±5, 0) y pasa por $(\sqrt{5}, 4)$.

c) Vértices: V(±4, 0). Longitud del eje menor es 4. d) Focos: $F(\pm 1, 0)$ y $a = 3$.

e) Vértices: (0, ±3) y $b = 1$.

Clase 4 y 5. Desplazamiento paralelo de la elipse

Si se desplaza paralelamente la elipse, **[A]**

C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, s hacia el eje x y t hacia el eje y, se obtiene la elipse: C'.

$$P(x, y) \in C' \Leftrightarrow (x - s, y - t) \in C$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$$

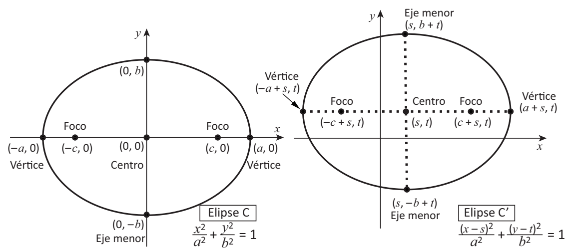
Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

Desplazamiento cuando el eje mayor está en x

C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y} \rightarrow$ C': $\frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$

40 | Unidad II • Lección 3 • Clase 4 y 5. Desplazamiento paralelo de la elipse

Mostrar la gráfica de la ecuación estándar de la elipse y hacer en la pizarra el desplazamiento para obtener la ecuación de la elipse desplazada s hacia el eje x y t hacia el eje y.



El desplazamiento se puede dar independientemente si el eje mayor es en x o en y.

Desplazamiento cuando el eje mayor está en y

C: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $\frac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y}$ $\rightarrow$ C’: $\frac{(x-s)^2}{b^2}+\frac{(y-t)^2}{a^2}=1$

Ejemplo 3.6. Encuentre la ecuación de la elipse obtenida después de desplazar la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, 3 hacia el eje x y -2 hacia el eje y.

Solución: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-(-2))^2}{16}=1$

$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

Al desarrollar la ecuación se obtiene: $16x^2+25y^2-96x+100y-156=0$.

Ejercicio 3.5. Encuentre la ecuación de la elipse obtenida después del desplazamiento indicado.

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; 2 hacia el eje x, 1 hacia el eje y.
b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; -3 hacia el eje x, -2 hacia el eje y.
c) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$; 4 hacia el eje x, 5 hacia el eje y.
d) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$; 1 hacia el eje x, 3 hacia el eje y.
e) $x^2+\frac{y^2}{16}=1$; -1 hacia el eje x, 2 hacia el eje y.

Ejemplo 3.7. Grafique la elipse del Ejemplo 3.6.
Solución: La elipse está definida por la ecuación:

$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ por lo que se sabe que el centro es (3, –2).

Su gráfica resulta de trasladar paralelamente $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3 unidades hacia la derecha, luego 2 unidades hacia abajo.
Vértices: como $a^2=25 \rightarrow$ como $a>0$, $a=5$ significa 5 unidades del centro a los vértices.

[B]

Traslado a la derecha es paralelo al eje y y hacia abajo es paralelo al eje x.

Unidad II • Lección 3 • Clase 3. Desplazamiento paralelo de la elipse | 41

LE para hacer comparaciones.
*Pedirles que encuentren los focos, vértices y extremos del eje menor.

M: ¿Cómo se pueden obtener los focos, los vértices y los extremos del eje menor de la elipse con centro en (3, –2)?

Ejemplo 3.6
(15 min)
M: ¿Cuánto se desplaza horizontalmente la elipse?
RP: 3 hacia la derecha.
M: ¿Cuánto se desplaza verticalmente?
RP: 2 hacia abajo.
*Escriben la ecuación partiendo de la estándar considerando el desplazamiento.

Ejercicio 3.5
(15 min) Solución

a) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

b) $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

c) $\frac{(x-4)^2}{15}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$

d) $\frac{(x-1)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

e) $(x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

Ejemplo 3.7
(20 min)
*Pedir a los estudiantes que grafiquen partiendo de la gráfica estándar y luego consultar el

Unidad II. Lección 3.
Clase 4 y 5
(Continuación)
Clase 6
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Determinar la ecuación de una elipse cuando hay deslazamiento paralelo.

Evaluación: Ejercicio 3.7 y 3.8

RP: Haciendo el corrimiento de cada uno de los focos, los vértices y los extremos del eje menor 3 unidades hacia la derecha en x y 2 unidades hacia abajo en y.

*Aclarar a los estudiantes que no es necesario memorizar estas fórmulas para encontrar los focos, los vértices y los extremos del eje menor de una elipse ya que el proceso es similar que cuando la elipse tiene centro en el origen, por lo que es importante tener claro los significados de a, b y c.

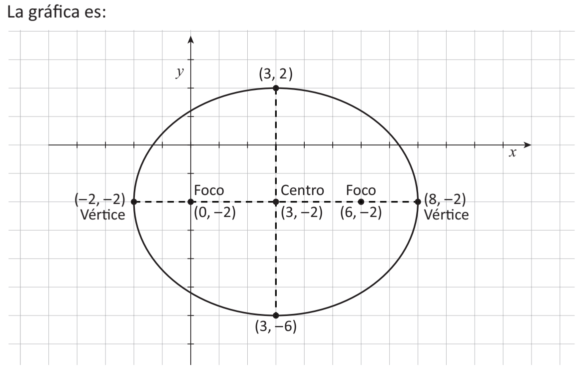
Por lo que, V(5 + 3, 0 – 2) → V(8, –2)
V(–5 + 3, 0 – 2) → V(–2, –2).

Extremos del eje menor: Como $b^2 = 16$ → como $b > 0$, $b = 4$, significa 4 unidades del centro al eje menor.

Por lo que, (0 + 3, 4 – 2) → (3, 2) Los extremos del eje menor están en y.
(0 + 3, –4 – 2) → (3, –6)

Focos: como $c^2 = a^2 - b^2$ → $c^2 = 25 - 16 = 9$ → como $c > 0$, $c = 3$, significa 3 unidades del centro a los focos.
(3 + 3, 0 – 2) → F(6, –2)
(–3 + 3, 0 – 2) → F(0, –2)

La gráfica es:



No es necesario memorizar las fórmulas para obtener los vértices, focos y extremos del eje menor, basta con tener en cuenta el significado de a, b y c y el eje mayor de la elipse.

En la elipse original el centro era (0, 0) se movió 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo.
Los focos eran (3, 0) y (–3, 0) y se corren 3 unidades a la derecha y dos unidades hacia abajo. De igual manera se corren los vértices y los extremos del eje menor.

Ejercicio 3.6. Hacer las gráficas de las ecuaciones resultantes de las elipses después del desplazamiento indicado en el Ejercicio 3.5.

Clase 6. Encontrar el desplazamiento

Ejemplo 3.8. Ubicar los vértices, los focos y los extremos del eje menor de la elipse $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$.

Solución: $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$ para encontrar la forma estándar, se debe completar los cuadrados en x y y.

Agrupando términos en x y y de $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$ resulta:

$9(x^2 + 2x) + 5(y^2 - 2y) = 31$ → Por factor común (9 en las x y 5 en las y)

$9(x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 2y + 1) = 31 + 9 + 5$ ... Completación al cuadrado

$9(x + 1)^2 + 5(y - 1)^2 = 45$ ... Factorización.

$$\frac{9(x+1)^2}{45} + \frac{5(y-1)^2}{45} = \frac{45}{45}$$ ... Dividir ambos miembros por 45

$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$ ... Forma estándar.

Clase 3 Lección 1.
Forma estándar de la elipse:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

El segundo miembro de la igualdad debe ser 1.

42 | Unidad II • Lección 3 • Clase 6. Encontrar el desplazamiento

Ejercicio 3.6
(25 min)
Solución en pág. 70

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

[A]

Ejemplo 3.8
(15 min)

*Presentar la ecuación en la pizarra y pedir a los estudiantes que traten de escribirla en la forma estándar de la ecuación de una elipse para ello deben completar al cuadrado en x y en y.

M: después de encontrar la ecuación de la elipse ¿Cuál es el centro?

RP: (–1, 1)

R: ¿Cuánto vale a, b y c?

RP: 3, $\sqrt{5}$, 2 respectivamente.

*Pedir a los estudiantes que calculen los vértices, focos y extremos del eje menor.

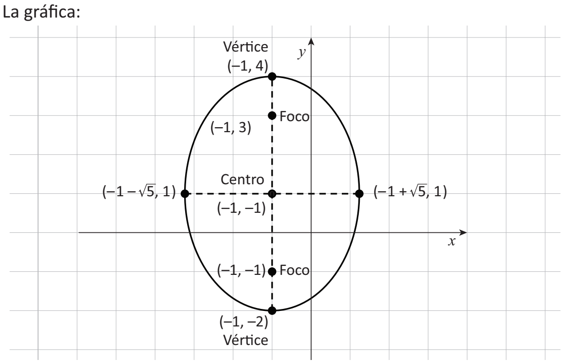
M: ¿Cuál es el eje menor de la elipse?

RP: El eje y.

Clase 6
(Continuación)

Centro: $(-1, 1)$
Vértices: $a^2 = 9 \rightarrow$ como $a > 0$, $a = 3$; V:$(-1, 1 \pm 3) \rightarrow$ V $(-1, -2)$ y V $(-1, 4)$
Extremos del eje menor: $b^2 = 5 \rightarrow$ como $b > 0$, $b = \sqrt{5}$. V $(-1 \pm \sqrt{5}, 1)$
$\rightarrow (-1 + \sqrt{5}, 1), (-1 - \sqrt{5}, 1)$
Focos: $c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow$ como $c > 0$, $c = 2 \rightarrow$ F$(-1, 1 + 2) \rightarrow$ F$(-1, 3)$
F$(-1, 1 - 2) \rightarrow$ F$(-1, -1)$

La gráfica:



La ecuación general de una elipse $Ax^2 + By^2 + C = 0$, luego cuando hay desplazamiento la ecuación es
$$Ax^2 + Dx + By^2 + Ey + C' = 0$$

Para encontrar el desplazamiento se aplica completación al cuadrado en x y en y.

Ejercicio 3.7. Encuentre los vértices, focos, centro, extremos del eje menor y la gráfica de los siguientes elipses:
a) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$
b) $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$
c) $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$
d) $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$
e) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

Ejercicio 3.8. Escriba la ecuación de la elipse utilizando la información dada.
a) El centro de la elipse está en $(-3, 5)$ y los ejes tienen longitudes 1 y 6, el eje mayor es vertical.
b) Vértices de la elipse: $(3 + 2\sqrt{3}, -1)$ y $(3 - 2\sqrt{3}, -1)$
Focos: $(3 + 2\sqrt{2}, -1)$ y $(3 - 2\sqrt{2}, -1)$
c) Centro: $(4, 0)$, vértices $(4, 3)$ y $(4, -3)$ y focos $(4, -1)$ y $(4, 1)$

Unidad II • Lección 3 • Clase 6. Encontrar el desplazamiento | 43

Concluir la forma general de una elipse con centro en el origen es $Ax^2 + By^2 + C = 0$ y al haber corrimiento paralelo esta es $Ax^2 + Dx + By^2 + Ey + C' = 0$

Ejercicio 3.7
(15 min)
Solución en pág. 71

Ejercicio 3.8
(15 min) Solución:
a) $4(x + 3)^2 + \dfrac{(y-5)^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{(x-3)^2}{12} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

c) $\dfrac{(x-4)^2}{8} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Unidad II. Lección 3.
Ejercicios de la lección
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Aplican los conocimientos aprendidos sobre elipse para resolver ejercicios.

Evaluación: Ejercicios de la lección

1. a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

   b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

   c) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$

   d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

Incisos 2 solución en pág. 71

3. a) $\frac{3x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

   b) $\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1$

   c) $\frac{3x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Inciso 4 y 5 solución en pág. 72.

6. a) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

   b) $\frac{(x-1)^2}{21} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

   c) $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la ecuación de la elipse conociendo: — Clase 1
   a) C (0, 0), Focos: $F(\pm 2, 0)$, Vértices: $V(\pm 3, 0)$
   b) C (0, 0), Focos: $F(0, \pm 4)$, Vértices: $V(0, \pm 5)$
   c) C (0, 0), Focos: $F(\pm\sqrt{3}, 0)$, Vértices: $V(\pm\sqrt{5}, 0)$
   d) C (0, 0), Focos: $F(0, \pm 2\sqrt{3})$, Vértices: $V(0, \pm 4)$

2. Encuentre los focos y vértices de una elipse dada su ecuación y haga su gráfica. — Clase 2
   a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1$ b) $9x^2 + 4y^2 = 36$
   c) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ d) $4x^2 + y^2 = 16$

3. Encuentre la ecuación de la elipse y haga su gráfica. — Clase 3
   a) Pasa por el punto (2, 1), la longitud de su eje menor es 4 y centro es (0, 0).
   b) Tiene vértices (±2, 0) y pasa por los puntos (–1, 1).
   c) La longitud de su eje menor es 4 y pasa por el punto (–2, 1) y centro es (0, 0).

4. Encuentre la ecuación de la elipse después del desplazamiento y haga la gráfica. — Clase 4 y 5
   a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$; 1 hacia el eje x y –2 hacia el eje y.
   b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; –2 hacia el eje x y 3 hacia el eje y.
   c) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{7} = 1$; 0 hacia el eje x y 2 hacia el eje y.
   d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; –2 hacia el eje x y –3 hacia el eje y.

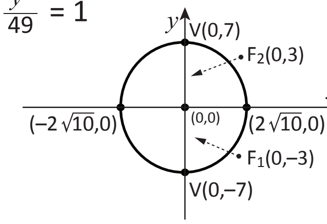
5. Encontrar los vértices, los focos y los extremos del eje menor de: — Clase 6
   a) $9x^2 + 2y^2 + 36x + 4y + 20 = 0$
   b) $6x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 22 = 0$
   c) $x^2 + 2y^2 - 16y - 12x + 52 = 0$
   d) $8x^2 + 12y^2 + 32x + 72y + 92 = 0$
   e) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$

6. Escriba la ecuación de la elipse utilizando la información dada. — Clase 3
   a) Tiene vértices (3, 1) y (3, 9) y la longitud del eje menor es 6.
   b) Centro en (1, –1), un foco en (1, 1) y $a = 5$.
   c) Centro en (1, 3), un foco en (1, 0) y un vértice en (1, –1).

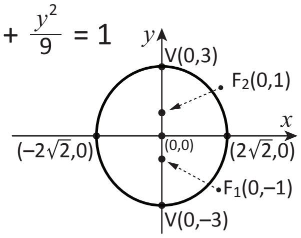
44 | Unidad II • Lección 3 • Ejercicios de la lección

Solución Ejercicio 3.2. Pág. 63.

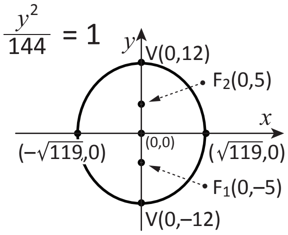
a) $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{49} = 1$



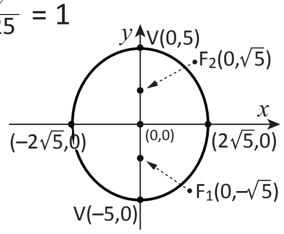
b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$



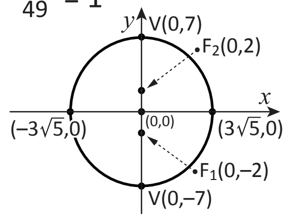
c) $\frac{x^2}{119} + \frac{y^2}{144} = 1$



d) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{25} = 1$

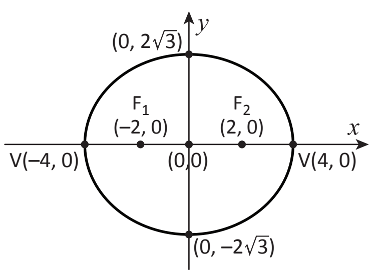


e) $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{49} = 1$

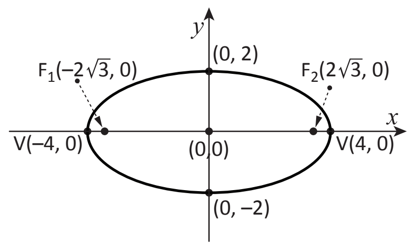


Solución Ejercicio 3.3. Pág. 64.

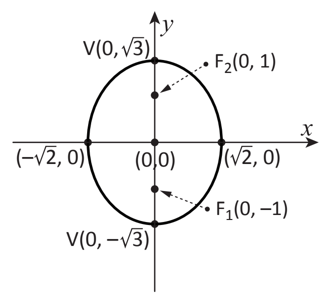
a) Focos: $(-2, 0)$, $(2, 0)$
Vértices: $(-4, 0)$, $(4, 0)$
Extremos del eje menor:
$(0, -2\sqrt{3})$, $(0, 2\sqrt{3})$



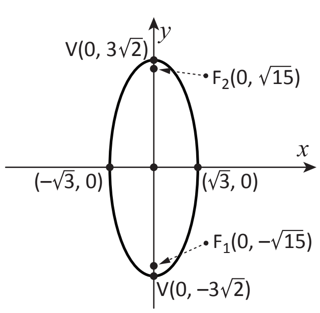
b) Focos: $(-2\sqrt{3}, 0)$, $(2\sqrt{3}, 0)$
Vértices: $(-4, 0)$, $(4, 0)$
Extremos del eje menor:
$(0, -2)$, $(0, 2)$



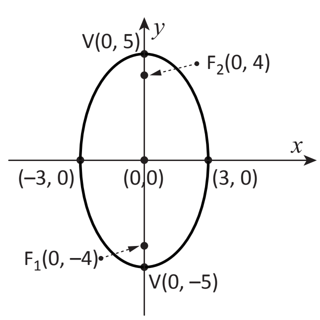
c) Focos: $(0, -1)$, $(0, 1)$
Vértices: $(0, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$
Extremos del eje menor:
$(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$



d) Focos: $(0, -\sqrt{15})$, $(0, \sqrt{15})$
Vértices: $(0, -3\sqrt{2})$, $(0, 3\sqrt{2})$
Extremos del eje menor:
$(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$

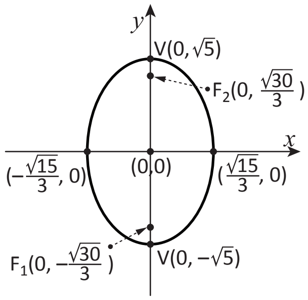


e) Focos: $(0, -4)$, $(0, 4)$
Vértices: $(0, -5)$, $(0, 5)$
Extremos del eje menor:
$(-3, 0)$, $(3, 0)$

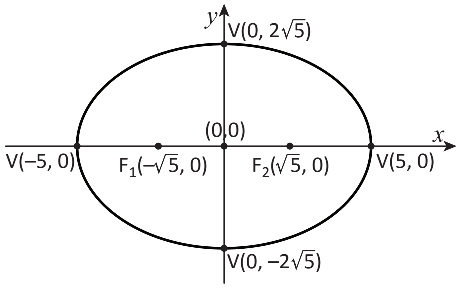


Solución Ejercicio 3.4. Pág. 64.

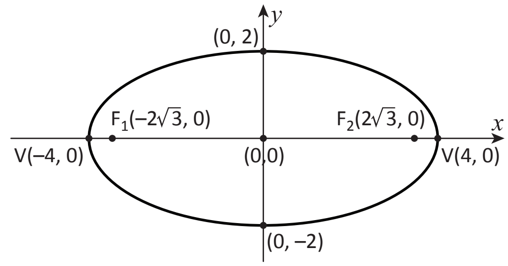
a) $\dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{y^2}{5} = 1$



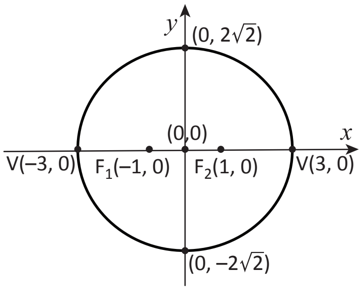
b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{20} = 1$



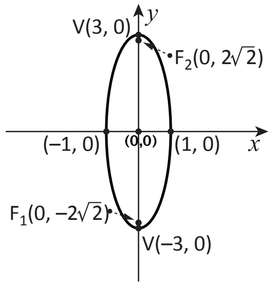
c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



d) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

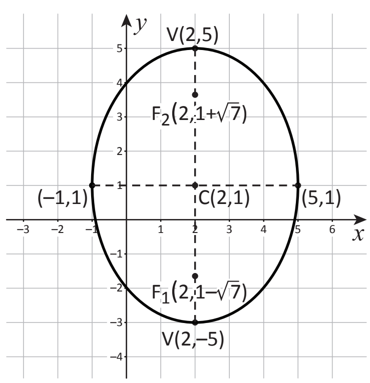


e) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

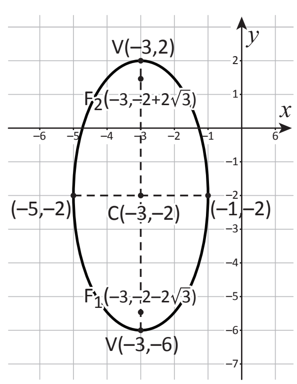


Solución Ejercicio 3.6. Pág. 66.

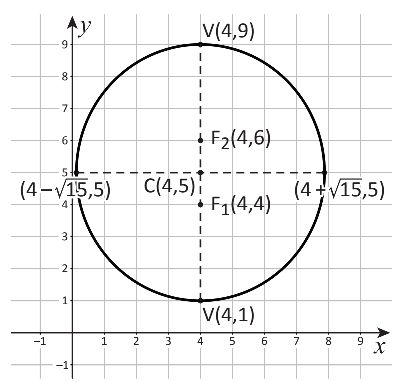
a)



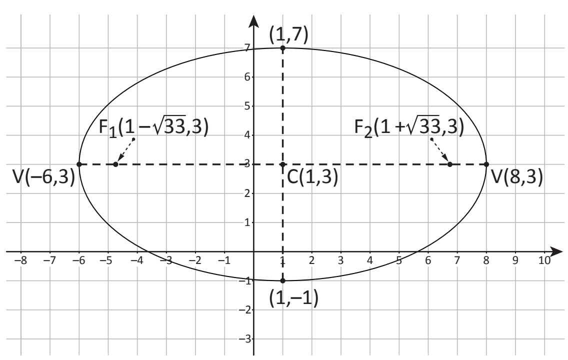
b)



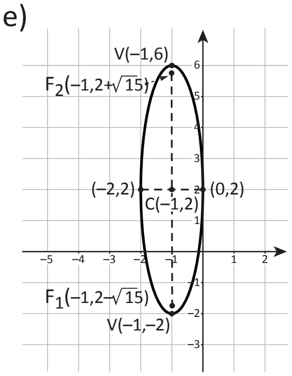
c)



d)



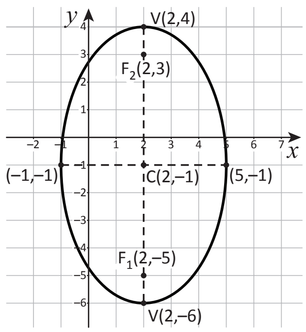
e)



Solución Ejercicio 3.7. Pág. 67.

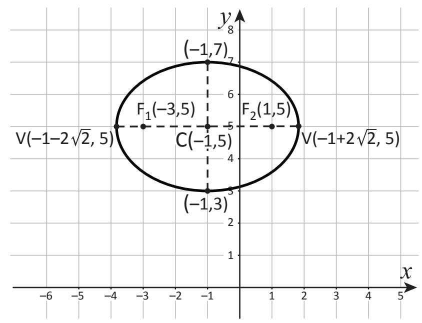
a) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{25}=1$

V: (2, –6) y (2, 4)
F:(2, 3) y (2, –5) C:(2, –1)
Extremos del eje menor:
(–1, –1) y (5, –1)



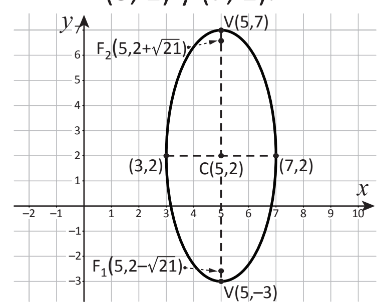
b) $\dfrac{(x+1)^2}{8}+\dfrac{(y-5)^2}{4}=1$

V: $(-1-2\sqrt{2}, 5)$ y $(-1+2\sqrt{2}, 5)$
F: (–3, 5) y (1, 5) C:(–1, 5),
Extremos del eje menor:
(–1, 3) y (–1, 7)



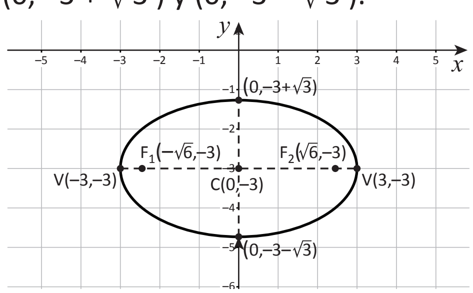
c) $\dfrac{(x-5)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$

V: (5, –3) y (5, 7)
F:$(5, 2-\sqrt{21})$ y $(5, 2+\sqrt{21})$,
C: (5, 2),
Extremos del eje menor:
(3, 2) y (7, 2).



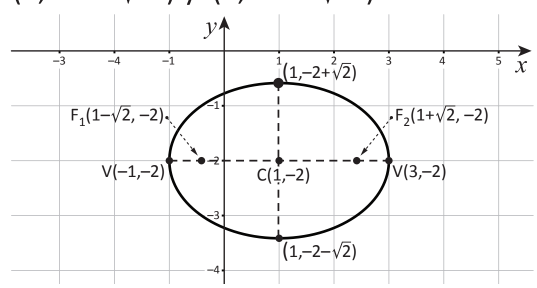
d) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{3}=1$

V: (–3, –3) y (3, –3)
F: $(-\sqrt{6}, -3)$ y $(\sqrt{6}, -3)$ C: (0, –3)
Extremos del eje menor:
$(0, -3+\sqrt{3})$ y $(0, -3-\sqrt{3})$.



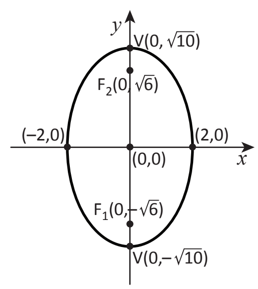
e) $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{2}=1$

V: (3, –2) y (–1, –2)
F: $(1-\sqrt{2}, -2)$ y $(1+\sqrt{2}, -2)$ C:(1, –2),
Extremos del eje menor:
$(1, -2-\sqrt{2})$ y $(1, -2+\sqrt{2})$.

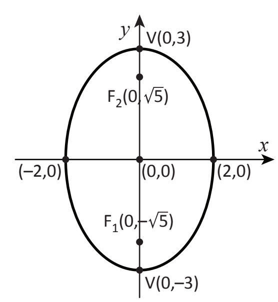


Solución Ejercicios de la lección. Inciso 2. Pág. 68.

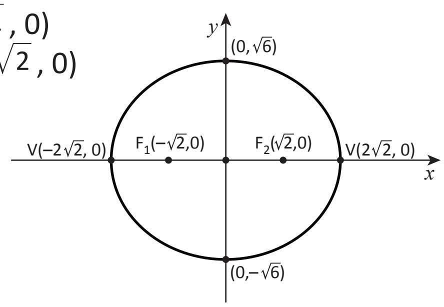
a) F:$(0,-\sqrt{6})$, $(0,\sqrt{6})$
V:$(0,-\sqrt{10})$,$(0,\sqrt{10})$



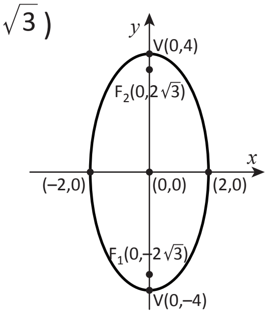
b) F: $(0,-\sqrt{5})$,$(0,\sqrt{5})$
V:(0,–3),(0,3)



c) F:$(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$
V:$(-2\sqrt{2}, 0)$,$(2\sqrt{2}, 0)$

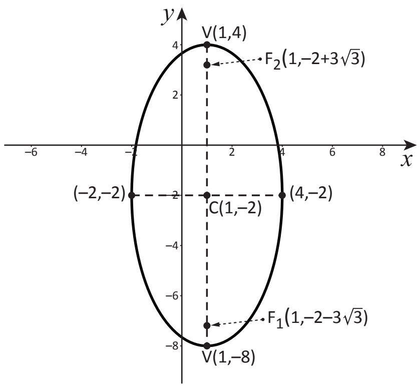


d) F: $(0,-2\sqrt{3})$,$(0, 2\sqrt{3})$
V: (0, –4),(0, 4)

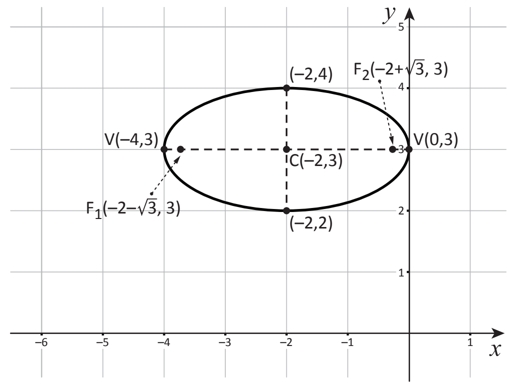


Solución Ejercicios de la lección. Pág. 68.

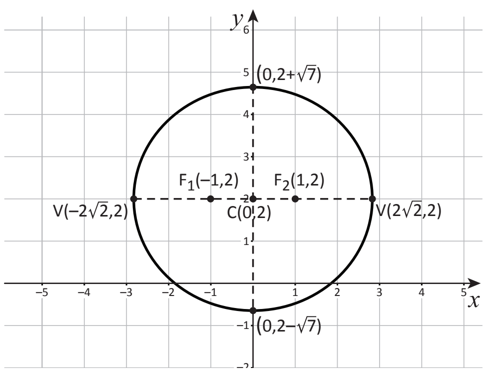
4. a) $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{36} = 1$



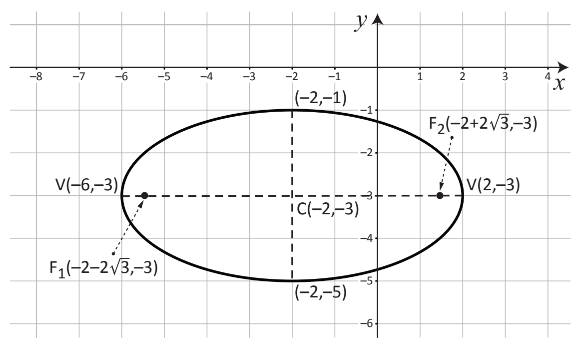
b) $\dfrac{(x+2)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$



c) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{(y-2)^2}{7} = 1$



d) $\dfrac{(x+2)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$



5. a) $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

V: (–2, –4), (–2, 2)
F: $(-2, -1-\sqrt{7})$, $(-2, -1+\sqrt{7})$
Extremos de eje menor:
$(-2-\sqrt{2}, -1)$, $(-2+\sqrt{2}, -1)$

b) $\dfrac{(x-3)^2}{8} + \dfrac{(y+2)^2}{12} = 1$

V: $(3, -2-2\sqrt{3})$, $(3, -2+2\sqrt{3})$
F: (3, –4), (3, 0)
Extremos de eje menor:
$(3-2\sqrt{2}, -2)$, $(3+2\sqrt{2}, -2)$

c) $\dfrac{(x-6)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{8} = 1$

V: (2, 4), (10, 4)
F: $(6-2\sqrt{2}, 4)$, $(6+2\sqrt{2}, 4)$
Extremos de eje menor:
$(6, 4-2\sqrt{2})$, $(6, 4+2\sqrt{2})$

d) $\dfrac{(x+2)^2}{6} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

V: $(-2-\sqrt{6}, -3)$, $(-2+\sqrt{6}, -3)$
F: $(-2-\sqrt{2}, -3)$, $(-2+\sqrt{2}, -3)$
Extremos de eje menor:
(–2, –5), (–2, –1)

e) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

V: (1, –6), (1, 2)
F: $(1, -2-2\sqrt{3})$,$(1, -2+2\sqrt{3})$
Extremos de eje menor: (–1, –2), (3, –2)

Objetivo: Definir la hipérbola.
Deducir la fórmula de la ecuación de una hipérbola.

Unidad II. Lección 4.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 4. La hipérbola
Clase 1. Ecuación de la hipérbola

Se define la hipérbola de manera similar a como se definió la elipse.

> **Definición 4.1**
> Una hipérbola, es el conjunto de puntos P(x, y) en un plano, tales que la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos (F_1 y F_2) es constante. Los dos puntos fijos son llamados focos de la hipérbola.

En la elipse se suman las distancias y en la hipérbola se restan las distancias.

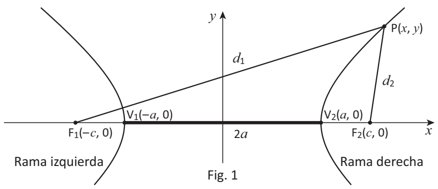


Fig. 1

En la Figura 1, se muestra la gráfica de la hipérbola con focos F_1 ($-c$, 0) y F_2(c, 0) en el eje x, con centro en el origen (0, 0) y con vértices V_1 ($-a$, 0) y V_2(a, 0). La gráfica tiene dos partes distintas llamadas ramas.

La distancia entre los vértices es $2a$.

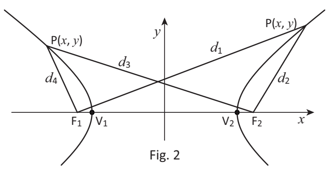


Fig. 2

Por definición de hipérbola, el punto P(x, y) puede estar en la rama izquierda o en la rama derecha, y la diferencia de las distancias de cualquier punto P a los focos es constante, es decir,

$$d_1 - d_2 = d_3 - d_4 = 2a,$$

tal como se muestra en la Figura 2.

La definición de hipérbola dice que es el conjunto de puntos en el plano tales que la diferencia de las distancias a los focos es constante. En la Figura 1, el punto P (x, y), está en la rama derecha, entonces:

$$d(\mathrm{P}, F_1) > d(\mathrm{P}, F_2) \text{ por lo que } d(\mathrm{P}, F_1) - d(\mathrm{P}, F_2) > 0.$$

d(P, F_1) significa la distancia del punto P al Foco F_1.

Como esta diferencia es constante, se confirma que:

$$d(\mathrm{P}, F_1) - d(\mathrm{P}, F_2) = 2a$$

Se deduce la ecuación de la hipérbola de la siguiente manera:

$$d(\mathrm{P}, F_1) - d(\mathrm{P}, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a \quad \text{... por fórmula de la distancia}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{... aislando un radical}$$

Unidad II • Lección 4 • Clase 1. Ecuación de la hipérbola | 45

Definición 4.1
(5 min)
* Relacionar la definición de elipse con la definición de hipérbola.
*Concluir que en la elipse se considera que la suma de las distancias a dos puntos fijos es constante, mientras que en la hipérbola es la diferencia de la distancia a dos puntos fijos la que es constante.
*Concluir que los puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.

• Ubicar gráficamente los elementos importantes de una hipérbola.
(10 min)
*Concluir que el centro de la hipérbola es el origen (0, 0), que los focos y los vértices están en el eje x y que las ramas abren hacia la derecha y hacia la izquierda.

*Concluir que la diferencia de las distancias de cualquier punto P(x, y) a los focos es constante y es igual a $2a$.

*Relacionar la constante $2a$ de la hipérbola con la constante $2a$ de la elipse.
*Concluir que el punto P(x, y) puede estar en cualquiera de las ramas de la hipérbola.

*** Deducir la fórmula de la ecuación de la hipérbola.** (25 min)
*Considerar el caso en que el punto P(x, y) está en la rama derecha de la hipérbola, por lo que la distancia d(P, F_1) > d(P, F_2), de esto se deduce que d(P, F_1) – d(P, F_2) > 0.
*Como la diferencia de estas distancias es mayor que cero concluir que d(P, F_1) – d(P, F_2) = $2a$.

Unidad II. Lección 4.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Graficar hipérbolas con centro en el origen y focos en el eje x dada la ecuación estándar.

Evaluación: Ejercicio 4.1

*Usando la fórmula de la distancia y el conocimiento sobre los radicales deducir la fórmula $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ que corresponde a la hipérbola.

Ecuación de la Hipérbola
(5 min)
* Conocer la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y focos en el eje x.
*Concluir que $c > a > 0$ y que $c^2 = a^2 + b^2$.

*Concluir que a $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se le llama forma estándar de la ecuación de la hipérbola.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

[A]

Ejemplo 4.1
(13 min)
* Graficar la hipérbola con centro en el origen y focos en el eje x.
*Escribir la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en la forma estándar $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ para determinar los valores de a, b y c.
*Con los valores $a = 4$, $b = 3$ y $c = 5$ determinar los focos y los vértices.
*Hacer $x = 0$ para obtener los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$.

*Con los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$, y los vértices formar el rectángulo.

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$ ... elevando al cuadrado

$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - 4a^2 - \cancel{x^2} + 2cx - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ... dividiendo entre 4 $\qquad \frac{4cx - 4a^2}{4} = cx - a^2$

$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$ ... elevando al cuadrado

$c^2 x^2 - 2ca^2 x + a^4 = a^2 [(x^2 - 2cx + c^2) + y^2]$

$c^2 x^2 - \cancel{2ca^2 x} - a^2 x^2 + \cancel{2ca^2 x} - a^2 y^2 = a^2 c^2 - a^4$

$x^2 (c^2 - a^2) - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)$

$x^2 b^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ ... $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... dividiendo entre $a^2 b^2$

A $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se le llama forma estándar de la ecuación de la hipérbola.

De igual manera llega misma fórmula para el punto P está en la rama izquierda.

Ecuación de la hipérbola
La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0), Focos ($\pm c$, 0) en el eje x y vértices ($\pm a$, 0) es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ donde } c > a > 0;\ c^2 = a^2 + b^2$$

Clase 2. Asíntotas de la hipérbola

Ejemplo 4.1. En la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, encontrar los focos y los vértices de la hipérbola. Haga la gráfica.

Solución:
La ecuación tiene la forma estándar de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con centro en el origen y los focos en el eje x.

La ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ se puede escribir de la forma: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, por consiguiente:

$$a = 4,\ b = 3 \text{ y } c = 5 \text{ ya que } a^2 + b^2 = c^2.$$

Los vértices de la hipérbola son $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$.

Los focos de la hipérbola son $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$.

Haciendo $x = 0$ en la ecuación, obtenemos los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$.

Con los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ en el eje y y los vértices $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ se forma **un rectángulo**, como se muestra en la Figura 3.

46 | Unidad II • Lección 4 • Clase 2. Asíntotas de la hipérbola

Clase 2
(Continuación)

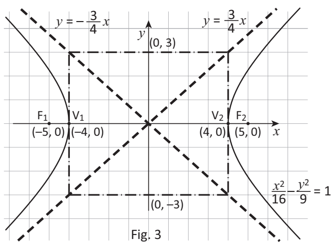


Fig. 3

Luego se trazan las rectas $y = \frac{3}{4}x$; $y = -\frac{3}{4}x$ que pasan por el origen y por los vértices del rectángulo formado y se convierten en **las asíntotas** de la hipérbola. Se trazan las dos ramas de la hipérbola pasando por los vértices y aproximándose a las asíntotas, pero sin tocarlas.

Las asíntotas no son parte de la gráfica de la hipérbola, sólo sirven de referencia para trazar la gráfica.

El segmento de recta con extremos en los vértices de la hipérbola se llama **eje transverso**. El segmento con extremos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se llama **eje conjugado**.

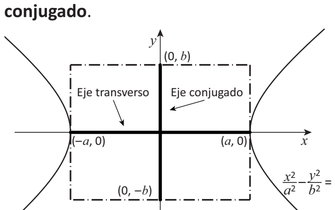


Fig. 4

Los extremos de los ejes transverso y conjugado, sirven de referencia para trazar el rectángulo auxiliar y luego las asíntotas de la hipérbola, como en la Figura 4.

Al rectángulo formado se le llama rectángulo auxiliar y sirve de referencia para trazar las asíntotas de la hipérbola.

Ejemplo 4.2. Trace la gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. Identifique sus focos, vértices, extremos del eje conjugado y las asíntotas.

Solución: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ se puede escribir como $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$; por lo que:

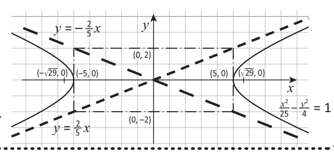
$a = 5$, $b = 2$ y $c = \sqrt{29}$, ya que $c^2 = a^2 + b^2$.

Los vértices son V_1 (5, 0) y V_2 (–5, 0).

Los focos son F_1 ($\sqrt{29}$, 0) y F_2 (– $\sqrt{29}$, 0).

Las asíntotas son $y = \frac{2}{5}x$ y $y = -\frac{2}{5}$x.

Los extremos del eje conjugado son: (0, 2) y (0, – 2).



Ejercicio 4.1. Trace la gráfica de las siguientes hipérbolas. Identifique los vértices, los focos, los extremos del eje conjugado y las asíntotas.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ d) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

*Trazar las rectas $y = \pm\frac{3}{4}x$ y definir las asíntotas.

*Trazar las ramas de la hipérbola tomando como referencia los vértices y las asíntotas.

En forma general, ubicar gráficamente los **elementos de una hipérbola.**
(7 min)

*Definir el eje transverso y el eje conjugado.

*Destacar la importancia del trazo del rectángulo auxiliar para graficar las asíntotas y la hipérbola.

[B]

Ejemplo 4.2
(10 min)
*Escribir la ecuación dada en la forma estándar de la hipérbola para identificar los valores de a, b y c.

*Con los valores de a, b y c graficar los vértices y los focos, y dibujar el rectángulo auxiliar, las asíntotas y la hipérbola.

Ejercicio 4.1. (10 min)
Solución en pág. 83

Unidad II. Lección 4.

Clase 2
(Continuación)

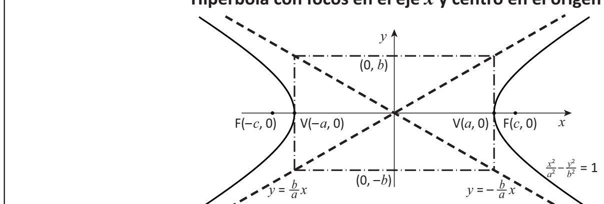
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Graficar hipérbolas con centro en el origen y focos en el eje x dada la ecuación que no está escrita en la forma estándar.

Evaluación: Ejercicio 4.2 y 4.3

Hipérbola con focos en el eje x y centro en el origen.

Hipérbola con focos en el eje x y centro en el origen



La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (0, 0), vértices $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$; focos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. La longitud del eje transversal es $2a$ y sus extremos son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$; la longitud del eje conjugado es $2b$ y sus extremos son $(0, b)$ y $(0, -b)$. Sus asíntotas están definidas por las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$.

Clase 3. Expresiones que son ecuaciones de la hipérbola

Ejemplo 4.3. La ecuación $25x^2 - 4y^2 = 100$ ¿corresponde a una hipérbola?

Solución: A simple vista la ecuación no tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pero si se divide entre 100 cada término se obtiene:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$$

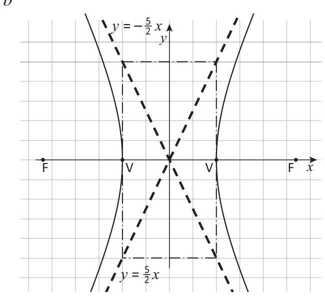
y ésta sí corresponde a la ecuación de una hipérbola con focos en el eje x.

Los vértices son (2, 0) y (–2, 0);

los focos son $(\sqrt{29}, 0)$ y $(-\sqrt{29}, 0)$;

las asíntotas son: $y = \pm\frac{5}{2}x$;

y los extremos del eje conjugado son: (0, 5) y (0, –5).



Ejercicio 4.2. Determine si las siguientes ecuaciones corresponden a hipérbolas. Si lo son, grafique e identifique los elementos importantes.

a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $x^2 - 4y^2 = 100$ c) $36x^2 - 4y^2 = 144$

Ejemplo 4.4. ¿La ecuación $-4x^2 + 9y^2 = 36$, corresponde a una hipérbola?

Solución: Al dividir todos los términos por 36, queda la ecuación: $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

¿Corresponde esta ecuación a una hipérbola?
¿En qué se diferencia de las ecuaciones de las hipérbolas planteadas anteriormente?
¿Qué sucederá con la gráfica de esta ecuación en relación con las trazadas anteriormente?
¿Qué pasará con los focos?

48 | Unidad II • Lección 4 • Clase 3. Expresiones que son ecuaciones de la hipérbola

(5 min)
* Concluir en forma general con los aspectos importantes de una hipérbola con centro en el origen y focos en el eje x.

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 4.3
(10 min)
* Determinar si la ecuación $25x^2 - 4y^2 = 100$ corresponde a una hipérbola.
*La ecuación $25x^2 - 4y^2 = 100$ ¿tienen la forma estándar de una hipérbola?
*¿Qué podemos hacer para que tenga la forma estándar?

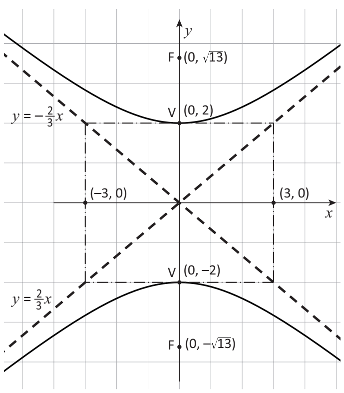
*Sugerir que puede dividirse todos los términos entre 100.

*Convertir la ecuación dada a la forma $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$ y encontrar los valores para a, b y c. Determinar los vértices, focos, los extremos del eje conjugado, las asíntotas y graficar.

Ejercicio 4.2
(10 min) Solución en pág. 83

Ejemplo 4.4. (10 min)
*Dividir entre 36 para convertir la ecuación $-4x^2 + 9y^2 = 36$ en la forma estándar de una hipérbola.

La ecuación $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, se puede escribir como $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ y corresponde a una hipérbola con focos en el eje y.

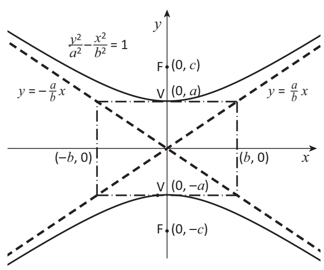


Se deduce que $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$ ya que $a^2 + b^2 = c^2$.
Los vértices son: (0, 2) y (0, –2);
Los focos son $(0, \sqrt{13})$ y $(0, -\sqrt{13})$.
El eje conjugado está en el eje x y sus extremos son (3, 0) y (– 3, 0).
Las asíntotas son $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$.

De forma análoga a las anteriores se dibuja el rectángulo auxiliar y las asíntotas y luego se traza la gráfica de la hipérbola.

En la ecuación de una hipérbola, si y es negativa entonces los focos están en el eje x; y si la x es negativa, entonces los focos están en el eje y.

Hipérbola con focos en el eje y y centro en el origen



La ecuación $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, corresponde a la hipérbola con centro (0, 0), vértices $V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$; focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.
La longitud del eje transversal es $2a$ y sus extremos son: $(0, a)$ y $(0, -a)$, la longitud del eje conjugado es $2b$ y sus extremos son: $(b, 0)$ y $(-b, 0)$.

La ecuación de las asíntotas es: $y = \pm\frac{a}{b}x$.

Ejercicio 4.3. Grafique las siguientes hipérbolas con focos en el eje y.

a) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$

b) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

c) $4y^2 - 16x^2 = 64$

d) $25y^2 - 4x^2 = 100$

*¿Corresponde esta ecuación a la de una hipérbola? ¿En qué se diferencia de las otras ecuaciones vistas anteriormente?

*Concluir que la ecuación $-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2^2}=1$ corresponde a una hipérbola pero que sus focos están en el eje y, igual que sus vértices.
*Con los valores $a = 3$ y $b = 2$, calcular c. Determinar los vértices, focos, los extremos del eje conjugado, las asíntotas y graficar.

Hipérbola con focos en el eje y y centro en el origen
(5 min)
* En forma general, ubicar gráficamente los elementos de una hipérbola con centro en el origen y focos en el eje y.
*Definir el eje transverso y el eje conjugado.
*Destacar la importancia del trazo del rectángulo auxiliar para graficar las asíntotas y la hipérbola.

Ejercicio 4.3
(10 min) Solución en pág. 84

Unidad II. Lección 4.

Clase 4 y 5

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Graficar hipérbolas con centro distinto del origen y focos en un eje horizontal.

Evaluación: Ejercicio 4.4 y 4.5

[A]

Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal.
(15 min)

*En forma general determinar los puntos importantes de una hipérbola con centro distinto del origen. [A]

*Imaginar una hipérbola con centro en el origen y focos en el eje x y trasladarla h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

*Concluir que la hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal tiene la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Clase 4 y 5. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal

Imaginemos que la hipérbola con centro en el origen y con focos en el eje x, se desplaza h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente. En la Figura 5 se ilustra esta situación. **[A]**

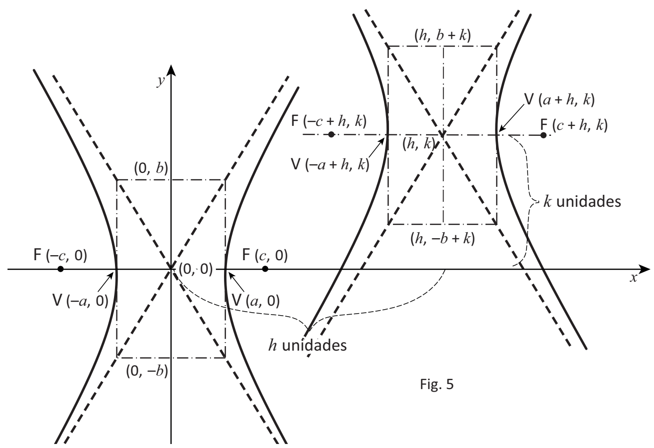


Fig. 5

Si la hipérbola con centro en el origen y focos en el eje x, se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, sus nuevos vértices son: $V_1(a + h, k)$, $V_2(-a + h, k)$; sus nuevos focos son: $F_1(c + h, k)$, $F_2(-c + h, k)$ y los extremos del eje conjugado son: (h, $b + k$), (h, $-b + k$).

Hipérbola con centro (h, k) y focos en el eje horizontal

La ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (h, k).

Los focos $F_1(c + h, k)$ y $F_2(-c + h, k)$ están en un eje horizontal a c unidades a la derecha y a la izquierda del centro (h, k) y los vértices: $V_1(a + h, k)$ y $V_2(-a + h, k)$ están situados en el mismo eje horizontal a a unidades a la derecha y a la izquierda del centro (h, k).

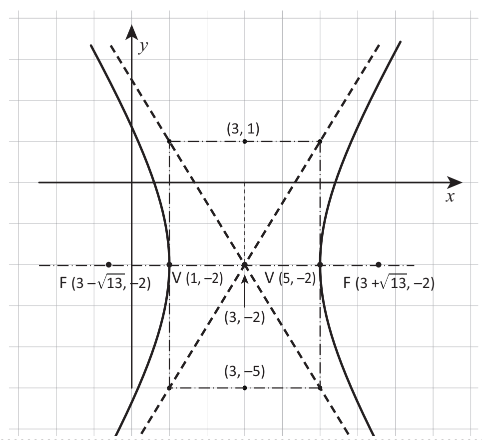
50 | Unidad II • Lección 4 • Clase 4 y 5. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal

Clase 4 y 5
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Ejemplo 4.5. Grafique la hipérbola $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Solución: De forma similar como se graficó la elipse con centros distinto al origen, así se grafica la hipérbola con centro (h, k).



Según la ecuación, la hipérbola tiene centro $(h, k) = (3, -2)$, con los valores $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$ ya que $c^2 = a^2 + b^2$. Con estos valores se grafica la hipérbola tomando como referencia el centro (3, −2). Como $a = 2$ desplazamos 2 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia la derecha y se obtienen los vértices: $V_1(3 + 2, -2) = (5, -2)$ y $V_2(3 - 2, -2) = (1, -2)$.

Como $c = \sqrt{13}$ desplazamos $\sqrt{13}$ unidades hacia la izquierda y $\sqrt{13}$ unidades hacia la derecha y se obtienen los focos: $F_1(3 + \sqrt{13}, -2)$ y $F_2(3 - \sqrt{13}, -2)$. Como $b = 3$ nos desplazamos 3 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia abajo y se obtienen los extremos del eje conjugado: $(3, -2 + 3) = (3, 1)$ y $(3, -2 - 3) = (3, -5)$.

Con estos valores se traza el rectángulo auxiliar, las asíntotas y se dibuja la gráfica.

En conclusión: para graficar una hipérbola con centro distinto del origen, se grafica el centro (h, k) y luego, con los valores a y b, se dibuja el rectángulo auxiliar partiendo del centro (h, k), se trazan las asíntotas, se ubican los focos y se esboza la gráfica.

En la ecuación, en la parte del numerador, se tomó el opuesto de −3 y el opuesto de +2 por eso el centro es (3, −2).

Para trazar las asíntotas, basta tener el rectángulo auxiliar y con una regla trazamos una línea que pase por los vértices y el centro.

Unidad II • Lección 4 • Clase 4 y 5. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal | 51

Ejemplo 4.5
(15 min)

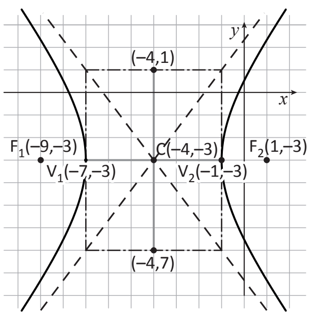
*Determinar en la ecuación dada, el centro (3, −2) y los valores $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$. Con estos valores trazar la gráfica.

*Hacer que los estudiantes se den cuenta que con el centro ubicado en el plano, se deben utilizar los valores de a, b y c para desplazar los elementos importantes de la hipérbola (focos, vértices, ejes transverso y conjugado) tomando el centro como punto de referencia.

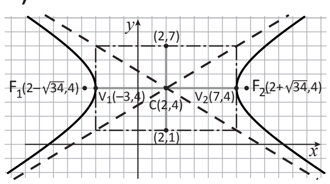
Clase 4 y 5
(Continuación)

Ejercicio 4.4
(15 min)

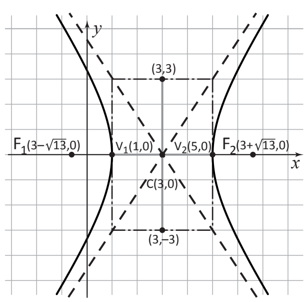
a)



b)



c)



Ejercicio 4.4. Grafique las siguientes hipérbolas.

a) $\dfrac{(x+4)^2}{9} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$ b) $\dfrac{(x-2)^2}{25} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Ejemplo 4.6. Grafique la hipérbola cuya ecuación es

$$x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 11.$$

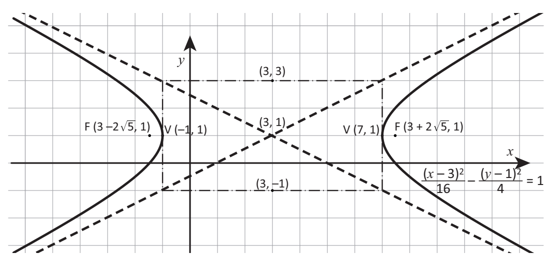
Solución: Como la ecuación no tiene la forma estándar de la hipérbola, aplicamos la completación al cuadrado para obtenerla.

$$x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 11$$
$$(x^2 - 6x) + (-4y^2 + 8y) = 11$$
$$(x^2 - 6x + k_1) - 4(y^2 - 2y + k_2) = 11 + k_1 - 4k_2$$
$$(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = 11 + 9 - 4(1)$$
$$(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = 16$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \text{… dividiendo por 16.}$$

Se tiene la hipérbola con centro (3, 1), los valores:

$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ya que $c^2 = a^2 + b^2$

Con estos datos se grafica la hipérbola.



[B]

Observe (−4) es factor común.

$k_1 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$

$k_2 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

Ejercicio 4.5. Grafique las siguientes hipérbolas, encuentre sus focos, vértices, asíntotas, extremos del eje conjugado.

a) $x^2 - 2y^2 - 2x - 12y = 35$

b) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y = 4$

c) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y = 49$

52 | Unidad II • Lección 4 • Clase 4 y 5. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal

Ejemplo 4.6.
(20 min)

*Como la ecuación dada no tiene la forma estándar, concluir que se debe aplicar la completación al cuadrado tanto para la variable x como para la y.

Ejercicio 4.5. (25 min)
Solución en pág. 84

Objetivo: Graficar hipérbolas con centro distinto del origen y focos en un eje vertical.

Evaluación: Ejercicio 4.6

Unidad II. Lección 4.
Clase 6 y 7
(Continúa en la siguiente página)

Clase 6 y 7. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical

Igual que en la clase anterior, imaginemos que la hipérbola con centro en el origen y con focos en el eje y, se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente. En la Figura 6 se ilustra esta situación.

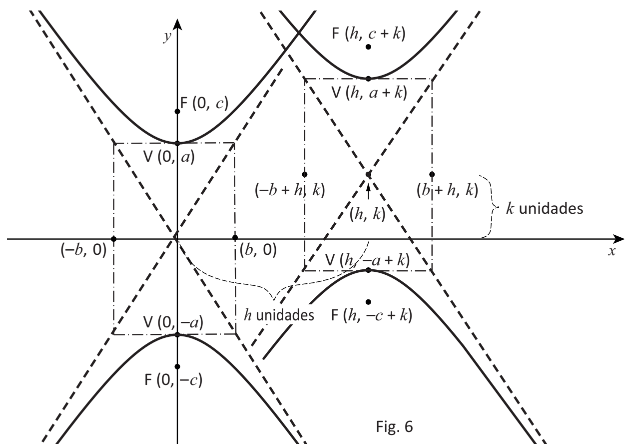


Fig. 6

Si la hipérbola con focos en el eje y y con centro en el origen, se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente; su nuevo centro es (h, k), los nuevos focos son: F(h, $c + k$) y F(h, $-c + k$); los nuevos vértices son: V(h, $a + k$) y V(h, $-a + k$); y los extremos del eje conjugado son: ($b + h$, k) y ($-b + h$, k).

Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical

La ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (h, k).
Los focos $F_1(h, c + k)$ y $F_2(h, -c + k)$ están en un eje vertical a c unidades hacia arriba y hacia abajo del centro (h, k) y los vértices V_1 (h, $a + k$) y V_2 (h, $-a + k$) están situados en el mismo eje vertical a a unidades hacia arriba y hacia abajo del centro (h, k).

Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical
(25 min)

*En forma general determinar los puntos importantes de una hipérbola con centro distinto del origen y focos en un eje vertical.

*Imaginar una hipérbola con centro en el origen y focos en el eje y y trasladarla h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

*Concluir que la hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical tiene la forma
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Clase 6 y 7
(Continuación)

Ejemplo 4.7
(20 min)

*Aplicar la completación al cuadrado para escribir la ecuación en la forma estándar.

*Determinar en la ecuación dada, el centro (2, –1) y los valores $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$. Con estos valores trazar la gráfica.

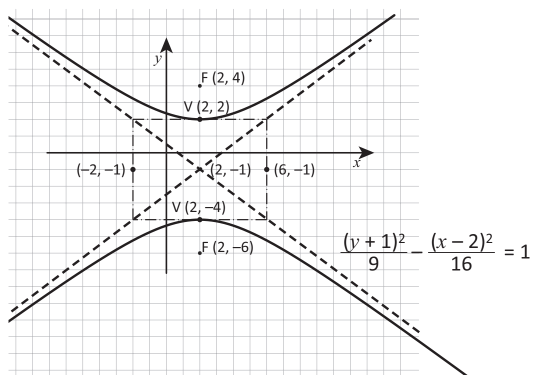
*Hacer que los estudiantes se den cuenta que con el centro ubicado en el plano, se deben utilizar los valores de a, b y c para desplazar los elementos importantes de la hipérbola (focos, vértices, ejes transverso y conjugado) tomando el centro como punto de referencia.

Ejercicio 4.6
(45 min)
Solución en pág. 85

Ejemplo 4.7. Grafique la hipérbola cuya ecuación es $16y^2 + 32y - 9x^2 + 36x = 164$.
Solución: Como la ecuación no tiene la forma estándar, se aplica la completación al cuadrado:

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 36x = 164$$
$$16(y^2 + 2y) - 9(x^2 - 4x) = 164$$
$$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 - 4x + 4) = 164 + 16(1) - 9(4)$$
$$16(y + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = 144$$
$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1 \quad \text{... dividiendo entre 144}$$

De esta última ecuación, se tiene la hipérbola con centro (2, –1), con $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$ ya que $c^2 = a^2 + b^2$. Las ramas de la hipérbola abren hacia abajo y hacia arriba.



Ejercicios 4.6. Grafique las siguientes hipérbolas, encuentre sus focos, vértices, asíntotas, extremos del eje y conjugado.

a) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

c) $(y-5)^2 - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

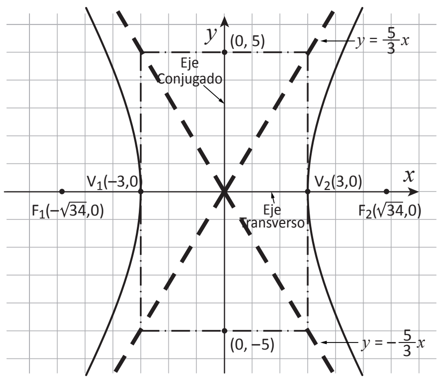
d) $25y^2 - 4x^2 - 250y + 24x = -489$

e) $25y^2 - 9x^2 + 100y - 54x - 206 = 0$

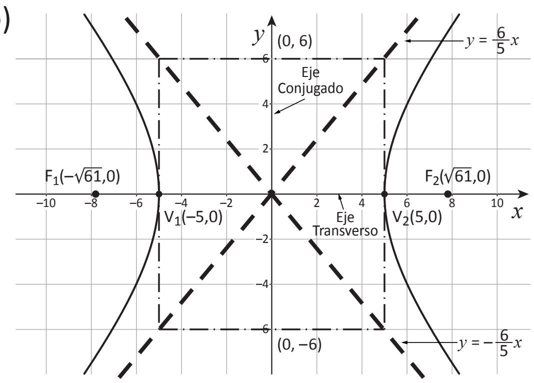
f) $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x = 113$

Solución Ejercicio 4.1. Pág. 75.

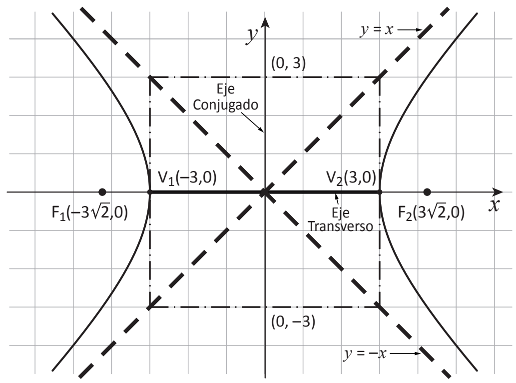
a)



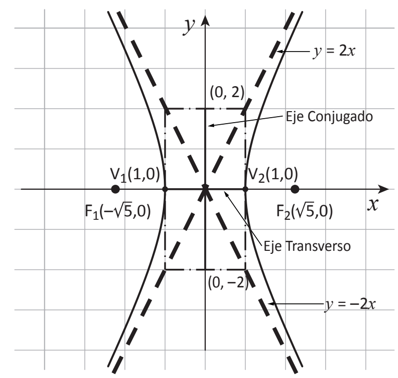
b)



c)

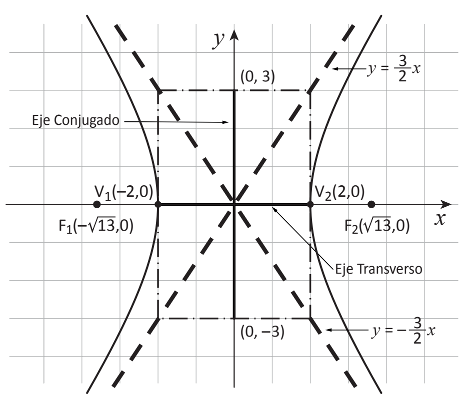


d)

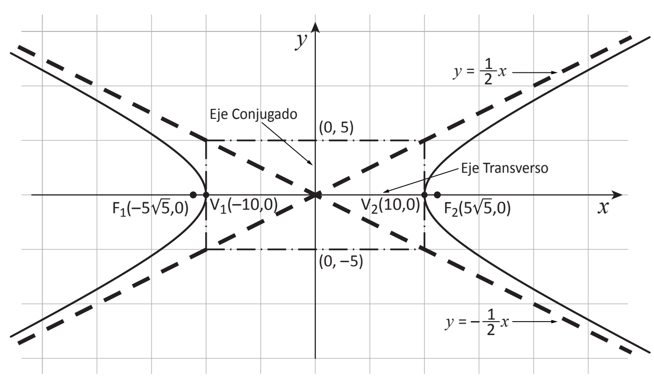


Solución Ejercicio 4.2. Pág. 76.

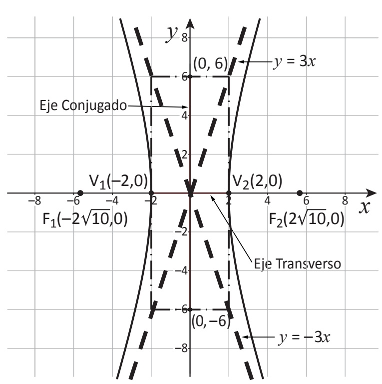
a)



b)

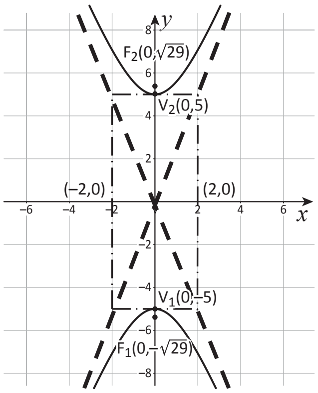


c)

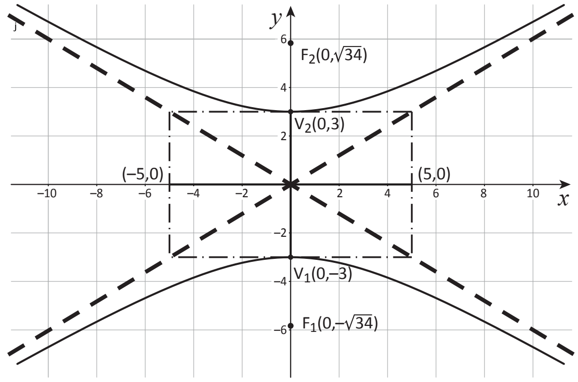


Solución Ejercicio 4.3. Pág. 77.

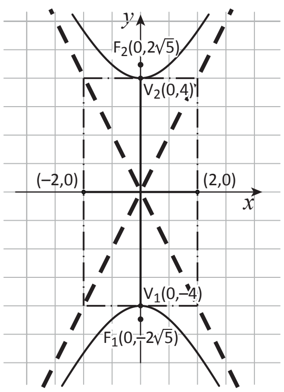
a)



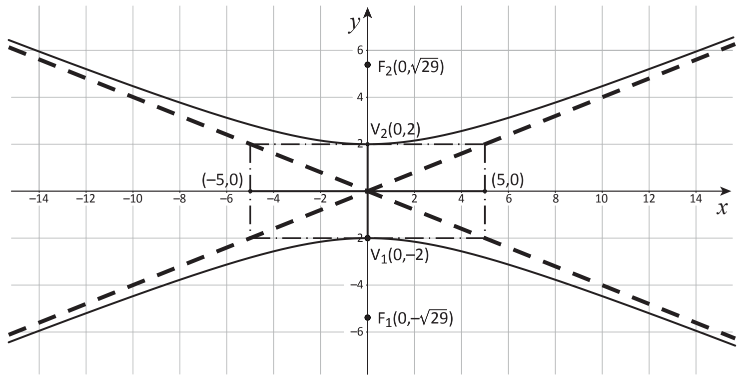
b)



c)

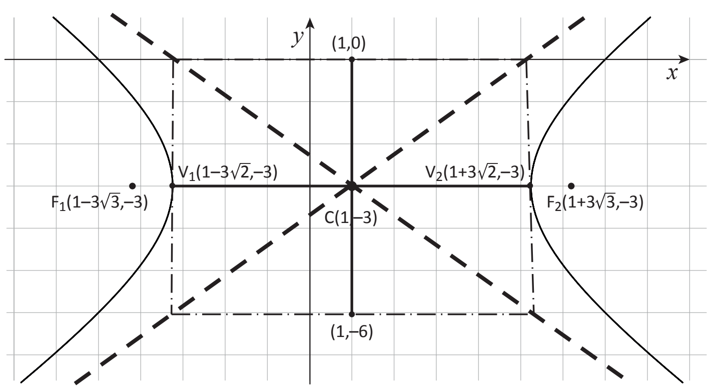


d)

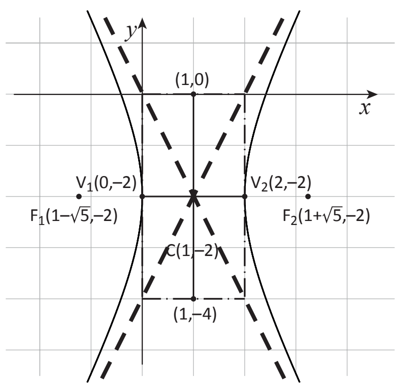


Solución Ejercicio 4.5. Pág. 80.

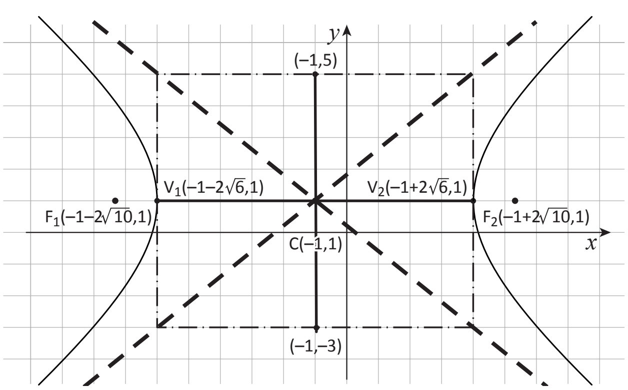
a)



b)

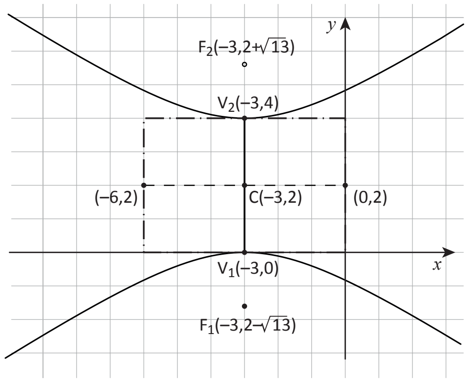


c)

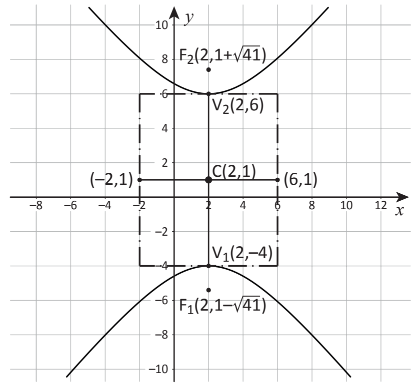


Solución Ejercicio 4.6. Pág. 82.

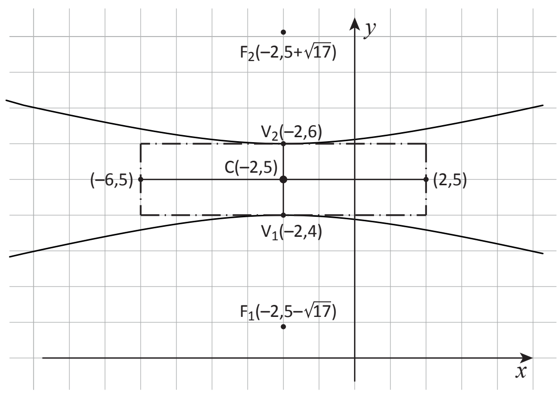
a)



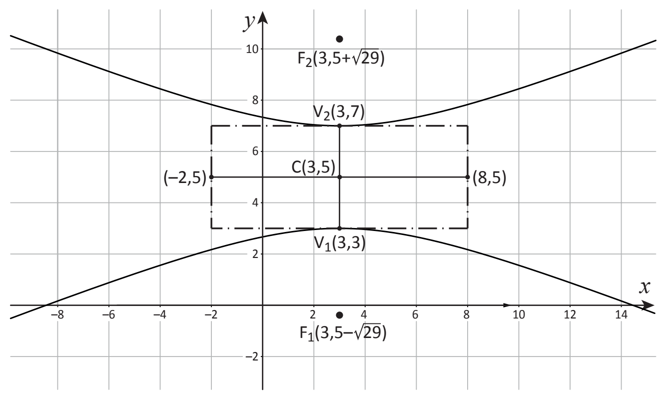
b)



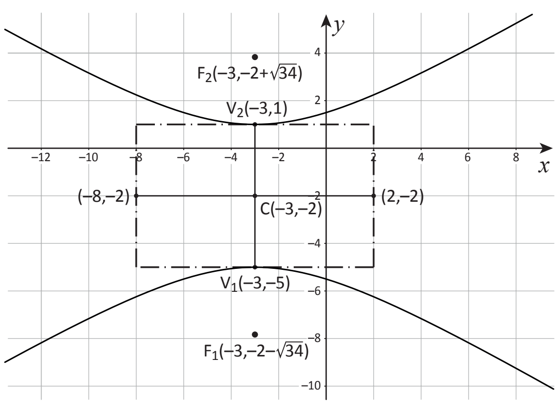
c)



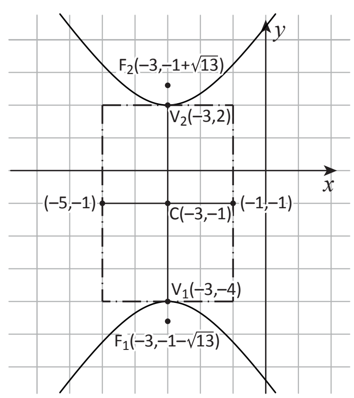
d) $\dfrac{(y-5)^2}{4}-\dfrac{(x-3)^2}{25}=1$



e) $\dfrac{(y+2)^2}{9}-\dfrac{(x+3)^2}{25}=1$



f) $\dfrac{(y+1)^2}{9}-\dfrac{(x+3)^2}{4}=1$



Matemáticas III
Unidad III

Probabilidad

1. Competencias de la Unidad

1. Determinar la probabilidad de eventos simples y compuestos
2. Usar el principio fundamental de conteo para determinar el tamaño del espacio de muestra para eventos simples y compuestos.

2. Relación y Desarrollo

Matemáticas 8º

Manera de Contar
Probabilidad

Matemáticas II

Unidad III: Estadística

Matemáticas III

Unidad III
- Lección 1: Conteo
- Lección 2: Probabilidad

3. Plan de Estudio de la Unidad (17 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Conteo	1	Principios de conteo	n(A ∪ B), n(A), n(B), n(A ∩ B)
	2	Definición de permutación	Permutación $n!$; r; P(n, r)
	3 y 4	Aplicación de la permutación	$P_{circular}$ (n); P_{rep} (n, r)
	5	Definición de combinación	Combinación C(n, r)
	6	Aplicación de la combinación	
		Ejercicios de la lección	
2. Probabilidad	1	Definición de probabilidad	Probabilidad, espacio muestral (S), evento
	2	Definición de probabilidad (Ejemplos simples)	
	3	Eventos	Unión ∪, intersección ∩
	4	Propiedad de las probabilidades	P(∅), P(A), P(S)
	5	Regla de adición	P(A ∪ B), P(A ∩ B)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Conteo	6	Propiedades del complemento de un evento	Complemento $n(\overline{A})$; $P(\overline{A})$
	7	Probabilidad condicional	P(B/A)
	8	Aplicación de la propiedad condicional	
	9	Eventos Independientes	
	10	Experimentos independientes	$P(A_1)$, $P(A_2)$
	11	Probabilidad de experimentos repetidos	
		Ejercicios de la lección	

Puntos de lección

Lección 1: Conteo

En octavo grado se estudiaron los principios de conteo de la suma y de la multiplicación de una forma sencilla, en esta lección se aborda profundizando un poco más ya que se involucran permutaciones y combinaciones además de los principios, las cuales se utilizarán para desarrollar la lección de probabilidad.
En la permutación se debe tener en cuenta que es bastante útil cuando se quiere conocer de cuantas maneras se puede ordenar un conjunto de elementos considerando que el orden importa, a diferencia de las combinaciones donde el orden no interesa por lo que hacer uso de diagrama de árbol y tablas facilita en gran medida la comprensión de estos conceptos.

En el desarrollo de este contenido los estudiantes se enfrentaran al uso de simbología nueva ($n!$; $P(n, r)$, $C(n,r)$, etc), es importante que se familiaricen con ello y entiendan su significado.
Puede resultar difícil para el estudiante identificar cuando va usar en un problema el principio de la suma o de la multiplicación o cuando implementa combinaciones o permutaciones para ello se proponen ejemplo y ejercicios que contribuirán a la comprensión, sin embargo si el docente considera que no son suficientes puede complementar con otros recursos para alcanzar un mejor aprendizaje.

Lección 2: Probabilidad

El aprendizaje de la probabilidad comenzó en octavo grado donde los estudiantes resolvían una serie de ejercicios sencillos con el objeto de introducir de manera intuitiva que es probabilidad y para que se puede utilizar. En esta lección se comienza haciendo un experimento con los estudiantes utilizando dados, cartas y monedas, para lograr conceptualizar probabilidad experimental y probabilidad teórica y poder concluir que en la probabilidad experimental entre más ensayos se hagan más se aproxima a la probabilidad teórica, luego se proponen una serie de ejercicios y problemas donde se aplica probabilidad, estudiando con mayor detalles y profundizar más en este concepto.

También se estudia la probabilidad de eventos independientes, de experimentos independientes y probabilidad condicional con el objeto de resolver problemas aplicados a la vida cotidiana.
El docente debe desarrollar ejemplos suficientes para logar una mejor comprensión sobre el contenido.

Unidad III. Lección 1.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Encuentran la cantidad de maneras de ocurrencias de dos o más casos aplicando el principio de la suma.

Evaluación: Ejercicio 1.1

[A] Principio de la suma (15 min)

Ejemplo 1.1
* Este experimento puede ser realizado por los estudiantes y comprobar los resultados.
M: ¿Cuántos casos posibles se pueden obtener 7 ó 11?
RP: 6 y 2.

Concluye: se utilizará n para determinar el número de casos posibles a obtener en cada situación.
M: ¿Cómo se obtiene el total de casos posibles de sacar 7 ó 11?
RP: sumando el total de casos de cada uno.

Concluye: El total es 8 y se representa como n(A) + n(B) = 8.

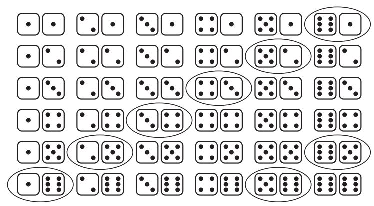
Ejemplo 1.2
M: En este caso es importante que el estudiante conozca y se familiarice con la situación planteada es decir debe conocer que una baraja estándar consta de 52 cartas y tiene 4 tipos, 13 de cada uno: tréboles, corazones, espadas y diamantes de igual manera tiene 12 caras distribuidas, 3 en cada tipo.
*Puede intentar resolver sin consultar él LE para aprovechar mejor las opciones de los estudiantes.

Lección 1. Conteo

Clase 1. Principios de conteo

Ejemplo 1.1. Determine el número de casos posibles de obtener un total de 7 puntos o 11 puntos en el lanzamiento de dos dados.

Solución: Se hará una lista de todos los posibles casos que se pueden obtener al lanzar dos dados y luego se cuentan cuántos de ellos son 7 ó 11.



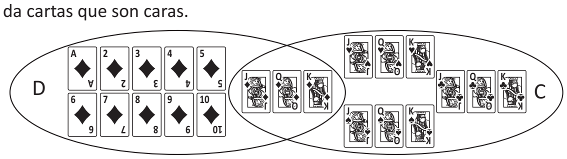
Se determinan dos conjuntos:
Sea A conjunto de casos que dan 7
Sea B el conjunto de casos que dan 11
El total de casos de A o B se denota como (A∪B) y se obtiene:
n(A∪B) = n(A) + n(B)
= n(7) + n(11)
= 6 + 2
= 8
R: 8 casos.

[A]

Se utiliza n(A) para determinar el total de casos que hay en el conjunto.

A∪B se lee A unión B, y representa la suma de casos de A y de B.

Ejemplo 1.2. Determine el número de casos posibles de obtener diamantes o caras en una baraja de cartas.
Solución: Sea D el conjunto de cartas que son diamantes y C el conjunto da cartas que son caras.



El número de casos posibles para obtener cara o diamante se obtiene de la siguiente manera:
n(D∪C) = n(D) + n(C) – n(D∩C)
= 13 + 12 – 3
= 22
R: 22 casos.

Una baraja normal tiene 52 cartas, cuatro tipos: diamantes, trébol, corazones, espadas y dos colores rojo y negro.

D∩C se lee D intersección C

Hay cartas que tienen cara y a la vez diamante, se denota: n(D∩C) al total de casos que se repiten.

Nota que en el Ejemplo 1.1 no hay casos repetidos por lo que n(A∩B) = 0.

56 | Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Principios de conteo

Concluye: Cuando se tiene dos conjuntos donde hay elementos en común a estos les llamaremos intersección, se denota por: n(A ∩ B) sabiendo que A y B son conjuntos.

Hacer notar al estudiante que si los conjuntos no tiene elementos en común entonces n(A∩B) = ∅

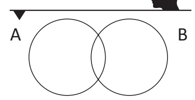
Objetivo: **[B]** Encuentra la cantidad de ocurrencia de dos o más casos aplicando el principio del producto.

Evaluación: Ejercicio 1.2 y 1.3

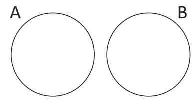
Clase 1
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Teorema 1.1. Principio de conteo de la suma
Si A y B son dos conjuntos finitos entonces. El número de casos en que pueden ocurrir los elementos de A ó B se denota como:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



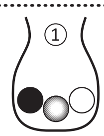
$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Principio de la suma: cuando hay dos casos que no ocurren al mismo tiempo, el número de maneras de la ocurrencia de alguna de ellas es la suma del número de casos de éstas.

Ejercicio 1.1
a) Un repuesto de automóvil se vende en 6 tiendas de Tegucigalpa y 8 tiendas en San Pedro Sula. ¿De cuántas maneras se puede obtener el repuesto?
b) En el lanzamiento de dos monedas, encuentre el número de casos posibles en el que caiga la primera un escudo o la segunda un escudo.
c) Dos dados son lanzados, determine el número de maneras de obtener un puntaje de 4 ó 6.
d) Una caja de chocolates contiene 14 de crema 16 de caramelo y 10 cubierto de nueces. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar uno de crema o uno de caramelo?
e) En un vuelo de Honduras a Estados Unidos todas las personas hablan español o inglés. Si 71 personas hablan español, 85 hablan inglés y 29 hablan los dos idiomas. ¿Cuántas personas hay en el avión?

[B]

Ejemplo 1.3. Un frasco contiene tres mables de color negro, gris y blanco. Se extraen dos mables del frasco, primero uno y luego otro, sin reemplazo. Encuentre las diferentes maneras en que se puede combinar los colores.



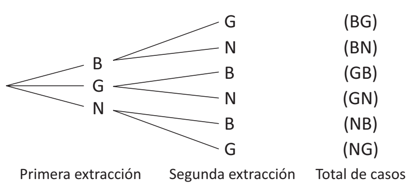
Solución: Se puede utilizar dos formas de encontrar todas las maneras diferentes de combinar los colores.
1) Tabla

Extracción 2ª / Extracción 1ª	B	G	N
B		BG	BN
G	GB		GN
N	NB	NG	

Hay 6 maneras diferentes de obtener los dos Mables BG, BN, GB, GN, NB y NG.

Nota que se tacha BB, GG y NN. Debido a que no hay reemplazo de los mables y no se podrá obtener dos mables del mismo color.

2) Diagrama de árbol



El diagrama de árbol tiene la ventaja de que se pueden usar muchas más combinaciones.

Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Principios de conteo | 57

Teorema 1.1
Presentar en la pizarra los diagramas de Venn para que el estudiante observe los dos casos en que puede ser aplicado el teorema.

Ejercicio 1.1
(10 min) Soluciones
a) 14 b) 3
c) 8 d) 30
e) 127

[B]

Principio del producto
(10 min)

Ejemplo 1.3 y las dos formas de encontrar la respuesta.

*Tratar de que los estudiantes planteen sus soluciones antes de consultar él LE.

*Inducir al estudiante a utilizar el diagrama de árbol ya que será útil para resolver problemas futuros.

Clase 1
(Continuación)

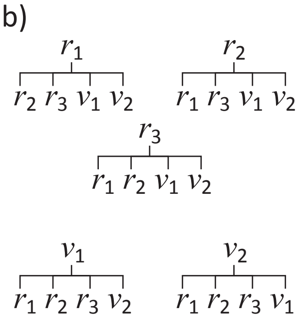
Ejercicio 1.2
Puede ser asignado como tarea para la casa.
Solución
9 maneras diferentes
a) En el Ejemplo 1.3 no hay reemplazo de los mables y en el 1.2 si por lo que pueden salir colores repetidos.

b) no ya que hay 3x3=9 maneras de combinar los colores.

Teorema 1.2
Principio de conteo del producto.
$n(\text{AyB}) = n(\text{A}) \times n(\text{B})$

Ejercicio 1.3
(10 min)
Si el tiempo no es suficiente pueden ser asignados como tarea.

Soluciones:
a) $5^5 = 3125$

b)


Ejercicio 1.2
En el Ejemplo 1.3 encuentre mediante un diagrama de árbol todas las diferentes maneras que se pueden obtener dos mables, si después de la primera extracción el mable se devuelve al frasco.
a) ¿Cuál es la diferencia entre las dos situaciones?
b) ¿Resultó el mismo número de maneras diferentes de obtener los dos mables? Explique.

Teorema 1.2. Principio de conteo de la multiplicación
Si una operación se puede efectuar de m maneras y para cada una de ellas se puede efectuar una segunda operación de n maneras, entonces el número de maneras en que se pueden realizar estas operaciones , está dado por el producto m x n.

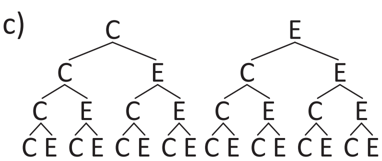
Principio de la multiplicación:
El número total de casos es el producto de los números de casos para cada parte.

Ejercicio 1.3
a) ¿Cuántas maneras hay de escribir un código de 5 letras si la repetición de letras es permitida.

b) Una bolsa contiene 3 mables rojos, r_1, r_2, r_3 y dos verdes v_1, v_2. Dos mables son extraídos uno después del otro sin reemplazo del mable que se sacó primero. Construya un diagrama de árbol.

c) Si 4 monedas son lanzadas construya un diagrama de árbol que determine de cuántas maneras se puede obtener dos caras y dos escudos

d) Un equipo de futbol tiene 4 camisetas de color: azul, verde, roja y amarilla también 4 calzonetas de color: café, blanca, negra y anaranjada. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar uniformes para jugar?

c)


d) 16

Objetivo: **[A]** Definen que es una permutación.
Evalúan expresiones aplicando permutaciones.

Unidad III. Lección 1.

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: Ejercicio 1.4, 1.5

Clase 2. Permutación 1

Ejemplo 1.4. Se tienen las letras S, O, L. Encuentre todas las formas diferentes de colocarlas para formar una palabra de 3 letras.

Solución
Diagrama de árbol

Primera posición	Segunda posición	Tercera posición	Palabras de 3 letras
S	O	L	SOL
	L	O	SLO
O	S	L	OSL
	L	S	OLS
L	S	O	LSO
	O	S	LOS
3 x	2 x	1 =	6

Hay 6 formas diferentes de ubicar las letras sin repetir.

[A]

Al formar la palabra de tres letras tenemos

hay 3 posibles letras	hay 2 posibles letras	hay 1 posible letra

El proceso anterior se le llama Permutación.

Definición 1.1
Una permutación es una secuencia ordenada de objetos en un conjunto, donde el orden sí importa.

Ejercicio 1.4.
En el ejemplo 1.4 se agrega la letra E ¿de cuántas maneras diferentes se puede formar una palabra de 4 letras?

Definición 1.2
Sea n un número entero, n factorial se define por $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(1)$ para $n \geq 1$.

Para $n = 0$, se defina $0! = 1$.

Ejercicio 1.5
Evalué las siguientes expresiones:
a) 4! b) 10! c) $\frac{7!}{5!}$ d) $4 \cdot 3!$ e) $\frac{8!}{0!}$

Unidad III • Lección 1 • Clase 2. Permutación 1 | 59

[A]

Ejemplo 1.4

Definición de Permutación. (10 min)

*Hacer que los estudiantes hagan un diagrama de árbol para representar la situación y que noten que al aplicar el principio del producto se obtiene:
3 x 2 x 1.

*Concluye que al hacer las relaciones entre las letras se le conoce como permutación.
Concluye en la definición 1.1.

Ejercicio 1.4

Solución:
24 maneras
Concluye con la definición 1.2 como se define $n!$

Ejercicio 1.5

(10 min) Soluciones

a) 24

b) 3628800

c) 42

d) 24

e) 40320

Clase 2
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Calcular el número de permutaciones que se pueden obtener en n objetos distintos.

Evaluación: Ejercicio 1.6

Concluye en el teorema 1.3
El número de permutaciones de n objetos distintos está dado por $n!$.

*Hacer énfasis que en las permutaciones el orden es importante.

Ejercicio 1.6
(15 min) Solución:
a) 7! = 5040
b) 15!
c) 26!
d) 5! = 120
*e) 7! x 5! = 604800

[B] Permutación de r objetos en n objetos.
(10 min)

Ejemplo 1.5
M: ¿Qué nos pide encontrar?
RP: Las maneras en que se pueden permutar los dígitos en 4 lugares.
M: ¿Cómo se pueden expresar utilizando el factorial? ya que solo son 4 dígitos los que se necesitan debemos expresar $\frac{10!}{6!}$
6! Es como que se tenga (10-4)!

***Concluye en el teorema 1.4**

Si se tiene n objetos con los que se pueden formar permutaciones se cuenta con: n opciones para el primer objeto.
$n - 1$ opciones para el segundo objeto.
$n - 2$ opciones para el tercer objeto y así sucesivamente hasta llegar al último objeto, por lo tanto, aplicando el principio del producto se tiene:
$n(n-1)(n-2)\ldots(1)$ Permutaciones para n objetos, y se denota con $n!$ y
Se lee: n factorial.

Teorema 1.3. El número de permutaciones de n objetos distintos está dado por $n!$

Ejercicio 1.6
a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra INMERSA?
b) Una profesora tiene que sentar 15 de sus estudiantes en fila para la clase de arte. ¿De cuántas maneras diferentes puede sentar a los estudiantes?
c) Se quiere formar un código de 26 letras de un alfabeto de 26 letras ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar dicho código?
d) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 sin repetición?
*e) En un aula de clase hay 7 estudiantes que son mujeres y 5 varones ¿De cuántas maneras se pueden sentar las mujeres juntas a la derecha y los varones juntos a la izquierda?

El resultado puede quedar expresaro como $n!$

En e) obtener las permutaciones de las mujeres y las permutaciones de los varones, luego aplique el principio de multiplicación.

Ejemplo 1.5.
Se quiere formar un código de 4 números utilizando los dígitos del 0 al 9 sin repetición. ¿De cuántas formas diferentes se puede escribir el código?

Solución:
Hay 10 dígitos y 4 opciones para el código, por lo tanto, para el primer dígito hay 10 opciones, para el segundo hay 9 opciones, para el tercero hay 8 opciones y para el cuarto digito hay 7 opciones.
Por lo tanto:
Aplicamos el principio del producto: 10 x 9 x 8 x 7 = 5040 (Respuesta)
Si utilizamos factorial ¿Cómo podemos expresar este producto?

$$\frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

De lo anterior se deriva el siguiente teorema.

Teorema 1.4. El número de permutaciones de r objetos elegidos de n objetos de un conjunto, donde $0 \leq r \leq n$, es:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

[B]

Al expresar como factorial se necesita el factor 6, 5, 4, 3, 2, 1; por lo que se divide entre 6!.
6! = (10 – 4)!

¿Cuál es la diferencia entre el Ejemplo 1.4 y 1.5?

60 | Unidad III • Lección 1 • Clase 2. Permutación 1

M: ¿Cuál es la expresión para calcular el total de permutaciones de 4 dígitos en 10 dígitos?
RP $\frac{10!}{(10-4)!}$

Concluye: la fórmula está determinada por $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
ó $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

Objetivo: **[A]** Aplican permutaciones circulares en la resolución de problemas aplicados a la vida cotidiana.

Evaluación: Ejercicio 1.8

Unidad III. Lección 1.

Clase 2

(Continuación)

Clase 3 y 4

(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 1.7

a) Usando los dígitos 1, 3, 5, 7, y 9 sin repetición ¿De cuántas maneras se puede formar un número de 1, 2, 3, 4, y 5 dígitos?

b) Un equipo de tenis consta de 12 jugadores ¿De cuántas maneras pueden ser elegidos 5 jugadores para un partido donde los jugadores deben ser clasificados?

c) Un club de ajedrez tiene 6 miembros.
 c1) ¿De cuántas maneras podría ubicarse todos los 6 miembros para una fotografía?
 c2) ¿De cuántas maneras puede el club elegir un presidente y un secretario?

Clase 3 y 4. Permutación 2

Al aplicar permutaciones para resolver problemas se deben considerar diferentes situaciones particulares. **[A]**

En el Ejemplo 1.4 y 1.5 aplicamos:

* Permutaciones sin repetición de n elementos tomados a la vez.
 $P(n, n) = n!$

* Permutaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r

donde $r \leq n$ $\qquad P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Se denota: $P(n, n) = P(n)$

Ejemplo 1.6. ¿De cuantas formas distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa redonda?

Solución:
Es una permutación circular por lo que se considera una persona fija, es decir 7 personas serán permutadas.
$P_{circ}(8) = (8-1)! = 7! = 5040$ Formas distintas

Otra forma de aplicar permutaciones

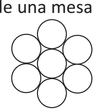
Teorema 1.5. El número de permutaciones circulares de n objetos está dada por: $P_{circular}(n) = (n-1)!$

Una permutación circular se aplica a un conjunto ordenado de permutaciones, es decir que no hay principio ni final. Para trabajar con ellas se fija arbitrariamente un elemento como el primero.

Ejercicio 1.8

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar alrededor de una mesa redonda una madre y sus cinco hijos?

*b) ¿De cuántos modos diferentes se pueden ubicar las cifras del 1 al 7 en la figura siguiente?



c) En un club forman una mesa redonda presidencial por 8 personas ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

d) ¿De cuántas formas se puede sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

Unidad III • Lección 1 • Clase 3 y 4. Permutación 2 | 61

Ejercicio 1.7
(Asignar como tarea)
Solución

a) 1 digito 5; 2 dígitos: 20; 3 dígitos: 60; 4 dígitos: 120; 5 dígitos: 120
b) 95040
c) c_1)720 $\quad c_2$)30

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

[A] Permutaciones circulares. (5 min)
*Hacer un recordatorio de las fórmulas utilizadas para calcular permutaciones y establecer cuando se debe aplicar una o la otra.

Ejemplo 1.6
(5 min)
*Proponer el problema en la pizarra y permitir que los estudiantes intenten resolverlo antes de consultar el LE.

*Inducir que el estudiante deduzca la fórmula a utilizar haciendo dibujos o diagramas.

*Concluir en el teorema 1.5 y consultar el LE con los alumnos para concluir ideas.

Ejercicio 1.8. (10 min) Solución

a) 120 $\qquad$ *b) $7 \times P_{circ}(6) = 7 \times 5! = 840$

c) $2 \times P_{circ}(7) = 1440$ $\qquad$ d) $P(2) \times P(3) = 12$

Clase 3 y 4
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Aplican permutaciones circulares en la resolución de problemas aplicados a la vida cotidiana.

Evaluación: Ejercicio 1.9

[B] Permutaciones con repetición
(10 min)

Ejemplo 1.7
M ¿Cuál es la diferencia de esta situación con las anteriores?
RP: Las cifras se pueden repetir
M ¿Qué significa que las cifras se puedan repetir, en que cambia el problema?
RP: cada digito tiene el mismo número de posibilidades por lo que se da una potencia.

Concluye Teorema 1.6

Ejercicio 1.9
*Pueden ser asignados como tarea. Solución
a) $9^4 = 6561$
b)$2^4 = 16$
c) c_1) $25^2 \times 10^3$
$= 625000$

c_2) $25 \times 24 \times 10^3$
$= 600000$

Ejemplo 1.8
(10 min)
Revisar el LE y analizar la solución propuesta usando permutaciones y diagrama de árbol.

Ejemplo 1.7. Para formar la combinación de un candado se eligen 4 dígitos de 10. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los dígitos?

Solución
En una combinación de un candado los dígitos se pueden repetir por lo que cada dígito tiene igual número de posibilidades de ser elegido.
En la primera posición hay 10 opciones
En la segunda posición hay 10 opciones
En la tercera posición hay 10 opciones
y en la cuarta posición hay 10 opciones

Código
____ ____ ____ ____
1 2 3 4

Por lo tanto
El número de maneras que se pueden elegir los dígitos: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$ (Respuesta).

[B]

Teorema 1.6. Permutaciones con repetición
Para encontrar el total de permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r utilizamos $P_{\text{repetición}}(n, r) = n^r$

Ejercicio 1.9
a) ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras 1, 2, 3...9 si se permite repetición?
b) Se lanzar 4 monedas distintas de forma simultánea. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?
*c) En un hospital se utilizan 5 símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes de manera que las primeras son letras y las tres últimas son dígitos. Suponiendo que hay 25 letras. ¿Cuántas historias clínicas pueden hacerse si:
c1) No hay restricciones sobre letras y números.
c2) Las dos letras no pueden ser iguales.

En c2) calcula la P(25, 2) para las letras y luego P con repetición de los números después aplica el principio del producto para obtener le resultados.

Ejemplo 1.8
Un barco manda señales utilizando banderas de colores. Si el barco tiene tres banderas azules y dos rojas. ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer?

Solución: Si las 5 banderas fueran diferentes entre sí se tendría 5! = 120 señales distintas, pero como 2 son de un color y 3 son de otro, entonces se tiene un número x de permutaciones que es menor que 5!.
Si las 2 banderas rojas fueran distintos entonces se tiene 2! Formas de colocarlas y por el principio de multiplicación tendríamos $x(2!)$ de la misma manera con las 3 banderas azules, si estas fueran diferentes se tiene 3! formas de colocarlas y tendríamos $x(2!)(3!)$ y esto debería ser igual a 5!
Despejando se tiene:

$$x(2!)(3!) = 5! \qquad x = \frac{5!}{2!3!} \qquad x = 10$$

62 | Unidad III • Lección 1 • Clase 3 y 4. Permutación 2

Clase 3 y 4
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Otra forma de obtener las señales que se pueden hacer es utilizando el diagrama de árbol.

```
A ── A ── R ── R ── R   (AARRR)
  └─ R ┬─ A ── R ── R   (ARARR)
       └─ R ┬─ A ── R   (ARRAR)
            └─ R ── A   (ARRRA)
R ┬─ A ┬─ A ── R ── R   (RAARR)
  │    └─ R ┬─ A ── R   (RARAR)
  │         └─ R ── A   (RARRA)
  └─ R ┬─ A ┬─ A ── R   (RRAAR)
       │    └─ R ── A   (RRARA)
       └─ R ── A ── A   (RRRAA)
```

Hay 10 formas diferentes de obtener señales.

Nota que el diagrama de árbol se vuelve más complicado cuando la cantidad de elementos involucrados es mayor

Por lo tanto, surge

Teorema 1.7. Permutaciones con repetición de elementos distintos.
Las permutaciones de n elementos de los cuales p_1 son de un tipo, p_2 son de otro tipo, p_k de otro tipo, donde $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$ se denota por:

$$\mathrm{P}_{\text{rep}}\,(n, (p_1, p_2, \ldots p_k)) = \frac{n!}{(p_1)!(p_2)!\ldots(p_k)!}$$

Ejercicio 1.10 [C]

a) Calcule
   a1) P_{rep} (10, (5, 3, 2)) a2) P_{rep} (12, (6, 6))
   a3) P_{rep} (6, (2, 2, 2)) a4) P_{rep} (9, (4, 3, 2))

b) Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 ¿Cuántos números de 9 cifras se pueden formar?

c) Se ordenan en fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí. ¿De cuantas formas posibles pueden ser ordenadas?

d) Una persona intenta recordar una clave de 6 letras que ha olvidado, sin embargo, recuerda que esta clave, estaba formada utilizando 2 veces cada una de las iniciales de su nombre (a, b, c) ¿Cuántas posibles claves puede formar?

Ejemplo 1.9. Cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de química serán colocados en un librero. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar si

a) Los libros de cada materia deben estar juntos.
b) Solo los de matemáticas tienen que estar juntos.

Solución

Como los libros de cada materia son diferentes, se tiene tres conjuntos

a) Considerar cada conjunto de libros de una materia como una unidad por lo tanto hay P(3) = 3! = 6 maneras de ordenar los libros por materia. Además, se debe considerar también las permutaciones entre cada materia por lo que tenemos.

Otra forma de aplicar permutaciones

P(3) = P(3, 3)

Unidad III • Lección 1 • Clase 3 y 4. Permutación 2 | 63

Concluir en el teorema 1.7 (5 min)

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

Ejercicio 1.10
(20 min) Solución

a) a_1) 2520 a_2) 924

   a_3) 90 a_4) 1260

b) $\dfrac{9!}{3!3!3!} = 1680$

c) 2520

d) 90

[C]

Ejemplo 1.9
(15 min)

* Es importante que el estudiante note en las diferentes situaciones en las que se aplican permutaciones.

*Puede intentar resolver el problema sin consultar el LE.

Hacer notar que si desea agrupar los libros, se deben trabajar como un conjunto y como estos se permutan entre sí, luego dentro de cada conjunto hay un número de permutaciones por lo que se aplica la propiedad del producto para obtener el inciso a). En el inciso b) se agrupan solo matemáticas por lo que se calcula las permutaciones de los demás y se multiplican por las permutaciones de matemáticas.

Unidad III. Lección 1.

Objetivo: **[A]** Definen que es una combinación.

Clase 3 y 4
(Continuación)

Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 1.11
(10 min) Solución
Hay 4 posiciones pares por lo que se ubican las mujeres.
P(4) = 4! = 24 Número posible de colocar mujeres.
P(5) = 5! = 120 Número posible de colocar varones.
Total = 24 x 120 = 2880 maneras.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

[A] Definir combinación

Ejemplo 1.10
(15 min)
*Hacer notar al estudiante que el orden no importa en la combinación.

Intentar resolver el problema sin consultar LE y explorar ideas de cómo lo pueden resolver aplicando conocimientos previos.

M: Hacer un cuadro de posibilidades de los equipos.

¿Qué sucede con los equipos que se forman?

P(4) = 4! = 24 para matemáticas
P(6) = 6! = 720 para física
P(2) = 2! = 2 para química
Por el principio de la multiplicación se tendría:
Total de Permutaciones = P(3)(4! x 6! x 2!)
= 6 · 24 · 720 · 2
= 207,360 Diferentes maneras de colocar los libros

b) Se considera los libros de matemáticas como una unidad por lo que se tiene:
Una unidad correspondiente a matemáticas, 6 unidades distintas de física y 2 unidades distintas de química. Por lo tanto, hay:
P(9) = 9! maneras de ordenar 9 unidades y por cada una de ellas hay
P(4) = 4! maneras posibles de ordenar los 4 libros de matemáticas
En total hay
P(9) x P(4) = 9! x 4! = 8,709,120 maneras de colocar los libros.

Aplicando el principio del producto en permutaciones.

Los libros de matemáticas se pueden combinar entre sí

Ejercicio 1.11. Hay que colocar a 5 hombres y a 4 mujeres en una fila, de manera que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Clase 5. Combinación 1

Ejemplo 1.10. Se tiene un grupo de 5 estudiantes Bairon, Henry, Lisa, Marcela y Tomás, tres estudiantes son seleccionados para hacer un grupo de estudio, ¿Cuántos equipos pueden formar?
Solución:
Si el orden importa se tiene la siguiente solución.

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Sin embargo se debe considerar que el orden no importa.
Si se hacen los grupos tenemos las siguientes posibilidades:

Equipos	Posibilidades
(B, H, L) →	BHL, BLH, HBL, HLB, LBH, LHB.
(B, H, M) →	BHM, BMH, HBM, HMB, MBH, MHB
(B, H, T) →	BHT, BTH, HBT, HTB, THB, TBH
⋮	
(L, M, T) →	LMT, LTM, MLT, MTL, TLM, TML

Total de grupos x 3! = Total de permutaciones
Considerando lo anterior se debe dividir por el número de equipos extra que tienen, es decir: P(5, 3) ÷ 3!
Por lo tanto 60 ÷ 6 = 10 equipos
A este proceso se le llama combinación.

[A]

Nota que el grupo será formado sin importar el orden de los integrantes.

Se hizo una permutación de 3 personas de un grupo de 5, lo importante en este caso es que en cada grupo hay 6 permutaciones.

RP: Hay equipos repetidos, es decir con los mismos integrantes.
M: Concluye que en este caso no se pueden utilizar la permutación como resultado final, por lo que es necesario dividirlo entre el total de grupos repetidos.

Objetivo: **[B]** Resuelven problemas de combinaciones aplicados el teorema 1.8

Clase 5
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 1.12

> **Definición 1.3**
> Una combinación es una colección de objetos donde el orden no importa.

El símbolo $C(n, r)$ denota el número de combinaciones de r objetos elegidos de un conjunto de n objetos.
El total de combinaciones $C(n, r)$ es igual al número de permutaciones $P(n, r)$ dividido por $r!$ (número de permutación dentro de cada combinación).
De lo cual surge el siguiente teorema:

[B]

> **Teorema 1.8.** El número de combinaciones de r objetos elegidos de n objetos, donde $0 \leq r \leq n$ es:
> $$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Una combinación también puede ser expresada como nCr o $\binom{n}{r}$ y se lee "n elementos tomados en grupos de r"

Ejercicio 1.12. Evalué
a1) C(6, 2) a2) C(7, 4) a3) C(10, 10) a4) C(9, 3)

Ejemplo 1.11. Un grupo de 9 estudiantes forman un club de estudio y seleccionan un miembro como presidente. Se desea formar un grupo de 4 estudiantes

a) ¿Cuántas combinaciones se pueden formar en total?
b) ¿Cuantos grupos incluyen al presidente?
c) ¿Cuantos grupos no incluyen al presidente?

Solución
a) El total de combinaciones lo obtenemos aplicando el teorema 1.8

$$C(9,4) = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = 126$$ (Respuesta)

b) El presidente está en el grupo, por lo que los otros 3 miembros deben ser seleccionados de los 8 estudiantes.

$$C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = 56$$ (Respuesta)

c) Si el presidente no está en el grupo, tenemos.

$$\underbrace{C(9, 4)}_{\text{Total de combinaciones}} - \underbrace{C(8, 3)}_{\text{Combinaciones donde está el presidente}} = 126 - 56 = 70$$ (Respuesta)

Unidad III • Lección 1 • Clase 5. Combinación 1 | 65

*Observan la solución propuesta en LE.

Concluye definición 1.3

[B]: Introduce el símbolo de combinaciones.

[B] Teorema de combinaciones.
Concluye en el teorema 1.8
(10 min)

*La fórmula para calcular combinaciones de r objetos elegidos de n objetos.

Ejercicio 1.12
(10 min) Solución
a_1) 15 a_2) 35
a_3) 1 a_4) 84

Ejemplo 1.11
(10 min)
Pensar en la forma de solucionar el problema, en a) y b) aplican el Teorema 1.8 para resolverlo.

En c) es importante que las combinaciones que no incluyen al presidente son el complemento de las que si lo incluyen o lo pueden encontrar mediante la combinación:

$$C(8, 4) = \frac{8!}{(8-4)!\times 4!} = 70$$

Unidad III. Lección 1.

Clase 6

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Resuelven problemas aplicando combinaciones.
[B] Aplican las combinaciones al triángulo de Pascal.

Evaluación: Ejercicio 1.13, 1.14

[A] Ejercicios aplicando combinaciones.
(35 min)

Ejercicio 1.13
Soluciones:
a) 1365 b) 10 c) 176
d) d_1) 1716
(Recuerda que la baraja tiene 13 cartas con diamantes)
d_2) 3432
e) 150
f) f_1)56 f_2) 21 f_3) 35
f_4) C(8,5) = C(7,5) + C(7,4)

[B] Aplicar combinaciones para resolver triángulo de Pascal.
(10 minutos)

Ejercicio 1.14
Solución
M*¿Cómo se pueden completar los números que hacen falta en el triángulo de Pascal?
1) Se puede usar la fórmula de combinaciones. Por ejemplo

$$C(1,0) = \frac{1!}{1!0!} = 1$$

$$C(2,2) = \frac{2!}{0!2!} = 1.$$

Clase 6. Combinación 2

Ejercicio 1.13

[A]

a) ¿Cuántos grupos de 4 integrantes pueden ser formados de un grupo de 15 personas?

b) Una moneda se lanza 5 veces ¿De cuántas maneras se puede obtener 2 caras y 3 escudos?

c) En un examen hay 10 preguntas ¿De cuántas maneras se pueden obtener 7 o más respuestas correctas?

d) Se selecciona 6 cartas de una baraja de 52 cartas.
   d1) ¿De cuántas maneras se pueden elegir un conjunto de 6 diamantes?
   d2) ¿De cuántas maneras se pueden elegir un conjunto de 6 corazones ó 6 tréboles?

e) En un grupo de estudiantes hay 6 varones y 5 mujeres. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar un equipo de 4 personas donde haya 2 mujeres y 2 varones?

Aplique el principio de la multiplicación C(mujeres) x C(varones)

f) Una bolsa contiene 8 mables de diferentes colores de los cuales uno es azul.
   f1) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 mables?
   f2) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 mables donde no haya azul?
   f3) ¿De cuántas maneras se puede elegir un grupo de 5 mables incluyendo el azul?
   f4) Escriba la expresión que muestra que la respuesta de f1) es la suma de f2) y f3).

Ejercicio 1.14. Triángulo de Pascal

[B]

Utilizando la fórmula de combinaciones. Completa las primeras 6 filas del triángulo de Pascal (C(n, r) donde n es la fila y r es la posición n = 0, 1, 2,... r = 0, 1, 2,..., n)

1
□ 1
□ 2 □
1 3 □ 1
□ □ 6 4 1
1 5 □ 10 5 □

Considere:
C(0,0)
C(1,0) C(1,1)
C(2,0) C (2,1) C(2,2)
C(3,0) C(3,1) C(3,2) C(3,3)

¿Qué puedes concluir de los extremos del triángulo?
¿Si se desea encontrar la fila 7, es necesario la fórmula? Explique.

66 | Unidad III • Lección 1 • Clase 6. Combinación 2

De igual forma, C(2,0) = C(4,0) = (5,5) = 1.
*Concluir que en los extremos del triángulo siempre irá el número 1.

*Calcular y completar con C(3,2) = 3, C(4,1) = 4, C(5,2) = 10.
*Para encontrar la fila 7, se calcula C(7,1) = 7, C(7,2) = 21, C(7,3) = 35, C(7,4) = 35, C(7,5) = 21, C(7,6) = 7.

Luego de encontrar el valor de todas las combinaciones, se pueden verificar los resultados empleando las sumas de parejas en cada fila para encontrar los valores de la siguiente fila.

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Unidad III. Lección 1.
Ejercicios de la lección

Ejercicios de la lección

a) En un aula de clases hay 26 estudiantes, todos los estudiantes hablan miskito o español y algunos hablan ambos. Si 18 de los estudiantes pueden hablar miskito y 14 pueden hablar español.
   a1) ¿Cuántos estudiantes pueden hablar español y miskito?
   a2) ¿Cuántos estudiantes pueden hablar miskito pero no español?
b) Se quiere usar un código de 4 letras usando el alfabeto de 28 letras. ¿De cuántas maneras diferentes se puede obtener el código?
   b1) Si se permite repetir b2) Si no se permite la repetición
c) Si se lanzan dos dados, ¿Cuántas maneras hay para obtener dos números diferentes?
d) De cuántas maneras se puede seleccionar una carta con cara y roja o una carta As negro de una baraja de 52 cartas.
e) En un salón se tiene cierta cantidad de sillas acomodadas en fila y cierta cantidad de personas. De cuantas maneras distintas se puede acomodar las personas en las sillas si tenemos:
   e1) 5 sillas, 5 personas e2) 5 sillas 8 personas e3) 8 sillas y 5 personas
f) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar que no tienen dígitos 0 ni 1?
g) Evalué cada una de las siguientes expresiones:
   g1) 8! g2) 9! ÷ 7! g3) 7 · 7! g4) 0!
   g5) P(13, 8) g6) P(15, 2) g7) P(15, 15)
h) En un aula de clase hay 14 estudiantes de los cuales 8 son mujeres y 6 varones.
   h1) ¿De cuántas maneras puede el grupo colocarse en línea para una foto?
   h2) ¿De cuántas maneras pueden tomarse una foto con las mujeres al frente y los varones en la fila de atrás?
   h3) ¿De cuántas maneras se puede elegir al azar un comité de tres miembros incluyendo: presidente, secretario y tesorero?
i) ¿De cuántas formas diferentes, puede un alumno contestar 8 preguntas de un examen de verdadero o falso?
j) Evalué cada una de las siguientes expresiones.
   j1) C(13,8) j2)C(15,15) j3) C(13,2)
k) Se seleccionaron 6 cartas de una baraja sin reemplazo.
   k1) ¿De cuántas maneras puede elegirse 6 corazones?
   k2) ¿De cuántas maneras puede seleccionar un grupo de tres corazones y tres espadas?
   k3) ¿De cuántas maneras puede elegir un grupo de seis corazones o seis espadas?
l) Un estudiante tiene que elegir 7 de 10 preguntas de un examen ¿De cuántas maneras puede elegirlas?
   Y, si las cuatro primeras son obligatorias, ¿de cuantas maneras puede elegirlas?
*m) Tres atletas toman parte en una competencia. ¿De cuántas maneras pueden llegar a la meta? (Pueden llegar todos juntos).

Clase 1 principios de conteo.

Dibuje un diagrama de Venn.

Clase 2, 3 y 4 Permutación

Puede dejar expresados resultados muy grandes como en h1.

Clase 5 y 6 Combinaciones

Unidad III • Lección 1 • Ejercicios de la lección | 67

*Si llegan dos juntos existen C(3, 2) = 3 grupos de 2 que llegaron juntos y P(2) = 2! Ordenaciones distintas del grupo de dos y el otro atleta. Por tanto existe un total de 3 x 2 = 6 posibilidades.
* Si llegan los 3 por separado existen P(3) = 3! = 6 posibilidades.
* Pueden llegar a la meta de 6 + 6 + 1 = 13 Posibilidades.

Ejercicios
a, b, c, d, e y f.

Clase 1 Principios de conteo
Soluciones:

a) a_1) 6 a_2) 12

b) b_1) 28^4 = 614656

b_2) 28 x 27 x 26 x 25 = 491400

c) 30 d) 8

e) e_1) P(5,5) = 120
   e_2) P(8,5) = 6720
   e_3) P(8,5) = 6720

f) 8^5 = 32768

Ejercicios g, h , i
Clase 2 y 3 Permutaciones
Soluciones:

g) g_1) 40320 g_2) 72
   g_3) 35280 g_4) 1
   g_5) 51891840
   g_6) 210 g_7) 15!

h) h_1) 14! h_2) 8! x 6!
   h_3) P(14,3) = 2184

i) 2^8 = 256

Ejercicios j, k, l y m
Clase 4 y 5 combinaciones

j) j_1) 1287 j_2) 1 j_3) 78

k) k_1) C(13,6) = 1716
   k_2) C(13,3) x C(13,3) = 81796
   k_3) C(13,6) + C(13,6) = 3432

l) l_1) 120 l_2) C(6,3) = 20

*m) *Si llegan los tres juntos solo hay 1 posibilidad.

Unidad III. Lección 2.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Desarrollan en forma intuitiva el concepto de probabilidad.

Evaluación: Juego de posibilidades

[A]
Concepto de Probabilidad.

Probabilidad Experimental y Probabilidad Teórica. (15 min)

*Se propone que los estudiantes realicen el juego de oportunidades utilizando los materiales indicados y haciendo los experimentos. Este se puede hacer de forma individual o grupal.

En grupo se puede aprovechar las discusiones que ellos tengan al momento de predecir los resultados y comparar con los que se obtienen.

Puede hacer la actividad colocando estaciones en el aula de clase, una estación de los dados otra de las monedas y otra de las cartas y dividir el grupo en equipos de trabajo para que realicen los experimentos de forma simultánea.

Lección 2. Probabilidad
Clase 1. Definición de probabilidad

Ejercicio 2.1. (Juego de oportunidades)
Para llevar a cabo este juego se necesitan un dado, una moneda, una baraja de 52 cartas.
Instrucciones:
a) En cada juego se debe predecir cuales podrían ser los posibles resultados y registrarlos en la tabla.
b) Realizar el experimento 10 veces y registrar los resultados.
c) Si los resultados coinciden con la predicción se debe escribir un cheque (✓) en la fila de la predicción.

Experimento 1
Lanzar una moneda y predecir los resultados más frecuentes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

Experimento 2
Lanzar un dado predecir qué número es más frecuente (1, 2, 3, 4, 5, ó 6)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

Experimento 3
Sacar una carta y predecir qué color es más frecuente (Roja o negra)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

Experimento 4
sacar una carta y predecir qué carta es más frecuente (Trébol, Diamante, Espada o Corazón)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

*Responder las siguientes preguntas.
a) ¿En cuál de los experimentos las predicciones fueron mayormente coincidentes?

[A]

Experimento: Es el acto de hacer una observación o realizar una medición que proporcione datos numéricos o no numéricos.

Experimento Aleatorio: Conjunto de pruebas cuyos resultados están determinados únicamente al azar.

Resultado: Es uno de los posibles datos que pueden obtener en un experimento.

68 | Unidad III • Lección 2 • Clase 1. Definición de probabilidad

* Es importante hacer que los estudiantes comparen sus predicciones con las obtenidas a través del experimento y generar una discusión donde comenten que sucedió, con los datos obtenidos.

Clase 1
(Continuación)

Para realizar una predicción de un resultado en los experimentos anteriores se hace uso de la probabilidad.

Definición 2.1. Probabilidad
Es la rama de la matemática que permite hacer predicciones de la ocurrencia de los resultados de un experimento, de los cuales no es posible tener certeza.

b) ¿Cuáles son las posibilidades o posibles resultados que se tiene cuándo?
b1) Se lanza la moneda.
b2) Se lanza el dado.
b3) Se saca una carta de color.
b4) Se saca un tipo de carta

A estos resultados se les llama: Espacio Muestral.

Definición 2.2. Espacio Muestral
Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se denota con la letra S.

c) ¿Cuántas veces obtuvo:
c1) Cara?
c2) el número 3?
c3) color rojo?
c4) Diamante?

A los enunciados anteriores se les llama Evento.

Definición 2.3. Evento
Es un sub conjunto de un especio muestral. Se denota con la letra E.

Si se quiere conocer la probabilidad de obtener un evento en particular se pueden utilizar dos tipos de probabilidad:
- Probabilidad experimental
- Probabilidad teórica

Definición 2.4. Probabilidad Experimental
Es la probabilidad que un evento ocurra basado en los resultados de un experimento. Se denota por $P_e(E)$ y se calcula:

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

La probabilidad experimental es el límite de la frecuencia relativa.

[B]

En este curso estudiamos con más detalle la probabilidad teórica.

$P_e(E)$ Se lee: Probabilidad experimental de que el evento E ocurra.

[B] Definir probabilidad teórica y probabilidad experimental.
(10 min) *Definir los dos tipos de probabilidad.

M ¿Cuál es la diferencia entre la probabilidad experimental y la probabilidad teórica?

(10 min)

Concluye que al realizar una predicción de un resultado en los experimentos se le llama probabilidad.

M: ¿Cuáles son las posibilidades que se tiene cuando se lanza una moneda?
RP: 2 posibles resultados

(Cara y escudo)
¿Cuándo se lanza un dado?
RP: 6 posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5 y 6)
¿Cuándo se saca una carta de color?
RP: 2 (negro y rojo)
¿Cuándo se saca un tipo de carta?
RP: 4 (trébol, espadas, diamantes y corazón)

Concluye: Los resultados de los experimentos se llaman espacio muestral.

*Pedir a los estudiantes que compartan los datos de cuántas veces obtuvieron cara o escudo, el número 3 o 5, una carta de color rojo o negro, una carta de trébol, espadas, diamante o corazón.

Concluye: Cada uno de los resultados anteriores se les conoce como evento.

Unidad III. Lección 2.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definen que es una combinación.

Evaluación: Ejercicio 2.3

RP: La probabilidad experimental se obtiene con los datos obtenidos después de la realización de un experimento y la probabilidad teórica se obtiene considerando las posibilidades que se podrían obtener en un experimento.

Ejercicio 2.2
(10 min)

Con los datos obtenidos en los experimentos calcular las probabilidades teórica y experimental.

M: ¿Cómo resultaron las probabilidades? existen diferencias, son iguales, son cercanas…explique.

*Es importante que el estudiante note que la probabilidad teórica siempre será la misma en los eventos de un espacio muestral. Por ejemplo en la moneda la probabilidad de obtener cara o escudo es $\frac{1}{2}$, en el dado la probabilidad de obtener (1, 2, 3, 4, 5, ó 6) es $\frac{1}{6}$, y en las cartas la probabilidad de obtener un color es $\frac{1}{2}$, la probabilidad de obtener un trébol, espada, diamante o corazón es $\frac{1}{4}$, sin embargo, en la probabilidad experimental dependerá de los resultados obtenidos en el experimento.

Definición 2.5. Probabilidad Teórica
Es la probabilidad que un evento ocurra basado en todos los posibles resultados del espacio muestral. Se denota por P(E) y se calcula:

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos en E}}{\text{número de elementos en S}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Cuando todos los eventos de S tienen la misma probabilidad.

n(E) Número de elementos en el evento E.
n(S) Número de elementos en el espacio muestral S.

Ejercicio 2.2. Con los resultados obtenidos en los experimentos 1, 2, 3, y 4 del Ejercicio 2.1 complete la siguiente tabla.

Experimento	Evento	Probabilidad Experimental	Probabilidad Teórica
Lanzar una moneda	Cara		
Lanzar un dado	5		
Sacar una carta (color)	Rojo		
Sacar una carta (tipo)	Trébol		

La probabilidad teórica es la misma para todos los eventos de un mismo experimento.

¿Qué se puede concluir de la probabilidad Experimental?
¿Qué se puede concluir de la probabilidad Teórica?
¿Son iguales?

De aquí en adelante, se considera que todos los eventos de un mismo experimento tienen la misma probabilidad de que ocurran.

~~Clase 2. Definición de probabilidad (Ejemplos simples)~~

Ejemplo 2.1. Calcular la probabilidad teórica **[A]**

a) En un aula de clase hay 20 mujeres y 15 varones, si se escoge una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de escoger mujer?
Solución
S: Son todos los estudiantes del aula
$n(S) = 15 + 20 = 35$
A: Es el evento de que la persona escogida sea mujer.
$n(A) = 20$
$P(A) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

b) Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos números cuya suma es 7?
Solución
$n(S) = 6^2 = 36$
A: evento de sacar dos números cuya suma es 7; $n(A) = 6$
$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Consultar el ejemplo 1.1 Lección 1 clase1.

70 | Unidad III • Lección 2 • Clase 2. Definición de probabilidad (Ejemplos simples)

Pero entre más veces se hace el experimento estos se aproximan más a la probabilidad teórica.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

[A] **Ejemplo 2.1.** (15 min)
*En cada ejercicio es importante analizar cuál es el espacio muestral en cada caso, cuales son los eventos y ¿que se pide encontrar?

Clase 2
(Continuación)

c) En una bolsa hay 5 pelotas, 2 blancas y 3 rojas se extrae una pelota al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea roja?
Solución
$n(S) = 5$
A: es el evento de sacar una pelota roja, $n(A) = 3$
$P(A) = \frac{3}{5}$

Ejercicio 2.3 [B]

a) Si se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un As?

b) Se lanza al aire una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un escudo en el primer lanzamiento?

c) Se lanza un dado, calcule la probabilidad de:

c1) Obtener un número menor que 5.

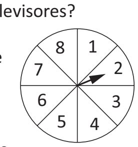
c2) Un número par múltiplo de 3.

c3) Un número impar menor que 5.

c4) Un número primo.

d) De 25 televisores que se fabrican 1 sale defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de escoger un televisor defectuoso de 100 televisores?

e) Se gira una flecha en una ruleta, si la probabilidad de seleccionar alguna línea es nula ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3?



f) En una caja hay 90 tarjetas numeradas del 10 al 99, se saca una tarjeta al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 4?

*En el ejercicio b) se debe tomar en cuenta que el espacio muestral está considerado por 36 elementos ya que son dos dados y aplicando el principio del producto se obtienen 6^2.

* Puede tratar de que los ejercicios el estudiante los resuelva sin consultar el LE y luego comparar sus respuestas.

[B] Aplicar probabilidades.

Ejercicio 2.3
(30 min) Permitir que los estudiantes resuelvan cada ejercicio en forma individual y luego compartir las soluciones en la pizarra para verificar que hubo entendimiento.

Solución:
a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $c_1)$ $\frac{2}{3}$ $c_2)$ $\frac{1}{6}$

$c_3)$ $\frac{1}{3}$ $c_4)$ $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{25}$ e) $\frac{5}{8}$

f) $\frac{4}{90} = \frac{2}{45}$ (13, 22, 31, 40)

Unidad III. Lección 2.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calculan la probabilidad de un evento.
[B] Resuelven problemas cotidianos aplicando probabilidad.

Evaluación: Ejercicio 2.4

[A] Unión de eventos

Ejemplo 2.2
(10 min)
* Tratar de resolver sin consultar el LE
M: ¿Cuál es el espacio muestral que se obtiene de lanzar los dados?
RP: Encuentran el espacio tomando en cuenta que S tiene 6^2 elementos.
M: ¿Cuál de los resultados da una suma de 5?
RP: (1, 4) (2, 3) (3, 2) (4, 1)
M: ¿Cuáles de los resultados da una suma de 8?
RP: (2, 6) (3, 5) (4, 4) (5, 3) (6, 2)

*Aplicando el principio de conteo de la suma se encuentra el total de casos que dan 5 ó 8.

Concluir: Se deduce la expresión de la unión de eventos
$A \cup B = n(A) + n(B)$

Clase 3. Eventos

Ejemplo 2.2. Se lanzan dos dados, ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener donde la suma de los números obtenidos sea 5 ó 8?

Solución.
Es importante considerar que en este experimento se está pidiendo la ocurrencia de dos posibles eventos:

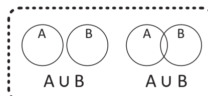
A: Obtener dos números cuya suma sea 5.

B: Obtener dos números cuya suma sea 8
$n(A) = 4$
$n(B) = 5$
$n(A \text{ o } B) = n(A) + n(B)$ (Principio de conteo de la suma)
$= 4 + 5 = 9$
La expresión anterior se puede escribir como:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ y se llama Unión de Eventos.

[A]

A	B
(1, 4)	(2, 6)
(2, 3)	(3, 5)
(3, 2)	(4, 4)
(4, 1)	(5, 3)
	(6, 2)

La unión de dos eventos se puede dar cuando no tengan nada en común o compartan elementos en común



Los elementos que se repiten se cuentan solo una vez.

Definición 2.6. Unión de Eventos.
Sea A y B dos eventos cualesquiera de un espacio de eventos, la unión de los eventos A y B es el evento que consta de los elementos que pertenecen a A o B y se representa por $A \cup B$.

Ejercicio 2.4. Dados dos eventos, exprese la unión de los eventos pedidos, si:

A = {2, 4, 6, 8}, B = {1, 3, 5, 7, 9}, C = {cara, escudo},

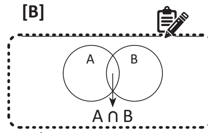
D = {azul, rojo, negro, verde}, E = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17},
el espacio muestral está dado por $S = A \cup B \cup C \cup D \cup E$

a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $C \cup D$

d) $A \cup E$ e) $A \cup B \cup E$

En el Ejercicio 2.4, los eventos B y E tienen elementos en común {3, 5, 7}. Este evento resulta de la intersección de B y E.

[B]



Si los eventos no tienen elementos en común la intersección es vacía.

Definición 2.7. Intersección de Eventos.
Sea A y B dos eventos cualesquiera de un espacio de eventos.
La intersección de los eventos A y B es el evento que contiene los elementos que simultáneamente pertenecen a A y a B y se representa por $A \cap B$.

72 | Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Eventos

Ejercicio 2.4
(10 min) Solución:
a) A∪B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
b) A∪C = {2, 4, 6, 8, cara, escudo}
c) C∪D = {cara, escudo, azul, rojo, negro, verde}
d) A∪E = {2,3,4,5,6,7,8,11,13,17}
e) A∪B∪E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 17}

[B] Intersección de Eventos.
(7 min) *De forma similar que en [A] desarrollar la clase para definir la intersección de eventos.

Objetivo: **[C]** Determinan cuando dos eventos son mutuamente excluyentes.

Clase 3
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 2.5, Ejercicio 2.6

Ejercicio 2.5. Se lanzan tres dados y se registra la suma de los puntos en el siguiente subconjunto del espacio muestral:

{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}

Considerar los eventos siguientes:

A: Salir un número múltiplo de 3.

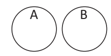
B: Salir un número primo.

C: Salir un número mayor o igual que 12.

Determinar:

a) $n(A \cap B)$ b) $n(A \cap C)$

c) $n(A \cap B \cap C)$ d) $n(B \cap C)$



$A \cap B = \varnothing$

Definición 2.8. Eventos Mutuamente Excluyentes

Sean A y B dos eventos, se dice que A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si no tienen elementos en común, es decir, si: $A \cap B = \varnothing$

[C]

Ejemplo 2.3. En el lanzamiento de un dado se establecen los eventos:

A: Obtener número par, A = {2, 4, 6}

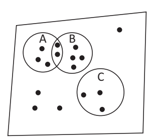
B: Obtener número impar, B = {1, 3, 5}

$A \cap B = \varnothing$

En el Ejemplo 2.3, A y B son mutuamente excluyentes. En el Ejercicio 2.4, B y E no son mutuamente excluyentes.

Ejercicio 2.6.

a) La siguiente figura, muestra un diagrama de un espacio muestral S de un experimento. Se indican los eventos A, B, y C y sus resultados representados por puntos. Encuentre:
   - a.1) $n(S)$
   - a.2) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$
   - a.3) $n(A \cup B)$
   - a.4) $n(A \cap B)$
   - a.5) $n(A \cup C)$
   - a.6) ¿Qué eventos son mutuamente excluyentes?



b) Dados los siguientes eventos identifique, ¿Cuáles de ellos son mutuamente excluyentes y cuáles no?
   Experimento: En una bolsa hay 4 bolas azules numeradas del 1 al 4 y se extrae una bola.
   - b1) Sacar una bola con el número 1 ó 4.
   - b2) Sacar una bola con un número par o mayor que 2.
   - b3) Sacar una bola con un número impar o número primo.
   - b4) Sacar una bola con número múltiplo de 2 o con el número 5.

Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Eventos | 73

b) b_1) son mutuamente excluyentes
   b_2) no son mutuamente excluyentes
   b_3) no son mutuamente excluyentes
   b_4) son mutuamente excluyentes

Ejercicios 2.5

Soluciones:

A = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

B = {3, 5, 7, 11, 13, 17}

C = {12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}

a) 1 b) 3

c) 0 d) 2

[C]

Eventos Mutuamente excluyentes

(7 min)

* De forma similar que en los procesos anteriores.

*Es importante que los estudiantes identifiquen cuando dos eventos son mutuamente excluyentes puesto que es un concepto que será utilizado en las clases posteriores.

Ejercicio 2.6

(11 min) Solución

a) a_1) 16
   a_2) 5, 6, 3
   a_3) 9
   a_4) 2
   a_5) 8
   a_6) A y C; B y C.

Unidad III. Lección 2.
Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Determinar las propiedades de la probabilidad.
[B] Determinar la regla de adición para eventos.

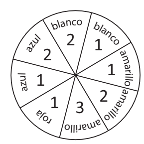
Evaluación: Ejercicio 2.4

[A] Propiedades de la probabilidad. (15 min)

Ejemplo 2.4
M: ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color amarillo?
RP: 3/8
M: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un color?
RP: 1
M: ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color verde?
RP: ninguna
M: ¿porque?
RP: La ruleta no tiene color verde
¿Qué puede concluir?
*Si la probabilidad es cero el evento no ocurrirá.
*Si la probabilidad es uno el evento siempre ocurrirá.
*Si es posible que un evento ocurra, la probabilidad es mayor o igual a 0 y menor o igual a 1.

Clase 4. Propiedades de la probabilidad

Ejemplo 2.4. Se gira una ruleta de 4 colores dividido en 8 partes iguales de las cuales 2 son blancas, 3 son amarillas, 1 es roja y 2 azules.



a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color amarillo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color azul?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un color?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color verde?

Solución:
El espacio muestral está dado por los colores de la ruleta: S = {blanco 1, blanco 2, amarillo 1, amarillo 2, amarillo 3, azul 1, azul 2, rojo}; $n(S) = 8$.
Sean los siguientes eventos:

A: Salir el color amarillo; $n(A) = 3$ $\quad P(A) = \frac{3}{8}$

B: Salir el color azul; $n(B) = 2$ $\quad P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

C: Salir un color; $n(C) = 8$ $\quad P(C) = \frac{8}{8} = 1$

D: Salir el color verde; $n(D) = 0$ $\quad P(D) = 0$

[A]

Note que en la ruleta no hay color verde, por lo que el número de elementos en el evento D es cero.

En c) la probabilidad que salga un color siempre será posible.

De lo anterior se puede concluir las propiedades de la probabilidad:

Propiedades de la probabilidad:
1) Para cualquier evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(\emptyset) = 0$
3) $P(S) = 1$; S es el espacio muestral.

En a) y b) se aplicó propiedad 1
En c) se aplicó propiedad 3
En d) se aplicó propiedad 2

Ejemplo 2.5. En el Ejemplo 2.2, determine la probabilidad de obtener una suma de 5 ó 8.
Solución:
$n(S) = 36$
$n(A) = 4$
$n(B) = 5$

$$P(A \cup B) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

[B]

En el Ejemplo 2.2, los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

Regla de la adición para eventos mutuamente excluyentes:
Para todo evento A y B mutuamente excluyentes se da:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

74 | Unidad III • Lección 2 • Clase 4. Propiedades de la probabilidad

[B] Regla de adición (10 min)

Ejemplo 2.5
M: ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 ó 8?
RP: $\frac{1}{4}$

* Hacer notar al estudiante que los eventos son mutuamente excluyentes.

Concluye: Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes y se desea conocer la probabilidad de que ocurra uno u otro se debe aplicar: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Objetivo: **[A]** Resolver problemas de probabilidad aplicando. La regla de adición.

Evaluación: Ejercicio 2.9

Unidad III. Lección 2.

Clase 4

(Continuación)

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 2.7.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un Rey (negro o rojo) o una Reyna roja en una sola extracción de una baraja de 52 cartas?

b) En una urna hay 10 pelotas numeradas del 1 al 10. Calcule la probabilidad de:
b1) Sacar un número múltiplo de 5.
b2) Sacar un número múltiplo de 5 o divisor de 4.

c) Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes y la probabilidad de A es 0.2 y la probabilidad de B es 0.7. Calcule la probabilidad de que ocurran ambos eventos.

d) Una empresa rentadora de carros tiene disponibles de la marca X, 3 carros rojos, 4 blancos y 2 negros; de la marca Y, 6 rojos, 2 blancos y 5 negros. Si se selecciona un carro al azar para rentarlo a un cliente, ¿cuál es la probabilidad de:
d1) Sea X y de color blanco.
d2) Sea de la marca Y.
d3) Sea de color blanco o de color rojo
d4) Sea Y y de color negro o sea X de color blanco

e) Una bolsa contiene 6 caramelos rojos, 3 caramelos verdes y 2 caramelos amarillos; si se saca un caramelo al azar, calcule la probabilidad de que éste sea:
e1) Verde.
e2) Amarillo.
e3) Rojo o amarillo.
e4) Verde o rojo.

Clase 5. Regla de adición

Ejemplo 2.6. Se lanzan dos dados, calcule la probabilidad de que la suma sea 8 o los sumandos sean pares.

Solución:
$n(S) = 36$.

A: La suma sea 8; $n(A) = 5$

B: Los sumandos sean pares; $n(B) = 9$

La probabilidad de que la suma sea 8 o los sumandos sean pares está dada por la regla de la adición:
Pero hay elementos en común que se deben restar:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

[A]

Los eventos no son mutuamente excluyentes

$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

Unidad III • Lección 2 • Clase 5. Regla de adición | 75

Ejercicio 2.7

(20 min) Solución

a) $\frac{3}{26}$

b) b_1) $\frac{1}{5}$ b_2) $\frac{1}{2}$

c) 0.9

d) d_1) $\frac{2}{11}$ d_2) $\frac{13}{22}$

d_3) $\frac{15}{22}$ d_4) $\frac{9}{22}$

e) e_1) $\frac{3}{11}$ e_2) $\frac{2}{11}$

e_3) $\frac{8}{11}$ e_4) $\frac{9}{11}$

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

[A] Regla de Adición

(15 min)

Ejemplo 2.6

Tratar de resolver sin consultar el LE.

*Hacer que el estudiante se dé cuenta de que en este caso hay elementos que pertenecen al evento A y el evento B por lo que se deben restar.
Concluye regla de adición para eventos que no son mutuamente excluyentes.

Concluye: que cuando los eventos son mutuamente excluyentes la intersección es vacío.

Unidad III. Lección 2.

Clase 5
(Continuación)

Clase 6
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Determinar el complemento de un evento.
[B] Calcular la probabilidad de eventos .

Evaluación: Ejercicio 2.9, Ejercicio 2.10

Ejercicio 2.8
(30 min)
Discutir las soluciones en la pizarra y supervisar el trabajo individual.

Solución:

a) $\frac{4}{13}$ b) $\frac{4}{5}$

c) c_1) $\frac{46}{85}$ c_2) $\frac{66}{85}$

c_3) $\frac{7}{85}$ c_4) $\frac{8}{17}$

c_5) $\frac{9}{17}$ c_6) $\frac{53}{85}$

c_7) $\frac{3}{5}$ c_8) $\frac{42}{85}$

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

[A]

Ejemplo 2.7
(10 min)
*Siguiendo las mismas indicaciones de la clase 3 induzca a los estudiantes a deducir que es un evento complementario.

Concluye: Los eventos complementarios de un evento A son los eventos que están en S pero no pertenecen a A.

De lo anterior se concluye en:

Regla de la adición:
Sean A y B dos eventos, la probabilidad de la ocurrencia de los eventos A o B está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el Ejemplo 2.5.
$P(A \cap B) = 0$

Ejercicio 2.8.
a) En una baraja de 52 cartas calcule la probabilidad de sacar un As o un Corazón rojo en una sola extracción.
b) En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Calcule la probabilidad de sacar un número par o un número primo.
c) En un grupo de 85 pacientes se tienen los datos siguientes:

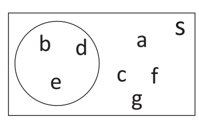
Tipo de sangre	Hombres	Mujeres	Total
O	12	15	27
A	21	25	46
B	5	2	7
AB	2	3	5
Total	40	45	85

Calcular la probabilidad de que al seleccionar un paciente al azar se de:
c1) Tipo sanguíneo A. c2) Tipo sanguíneo A o sea mujer.
c3) Tipo sanguíneo B. c4) Sea hombre.
c5) Sea mujer. c6) Tipo sanguíneo A o B.
c7) Tipo sanguíneo A o AB. c8) Tipo sanguíneo B o sea hombre.

Clase 6. Propiedades del complemento de un evento

[A]

Ejemplo 2.7. Se tiene espacio muestral S = {a, b, c, d, e, f, g}
Sea A = {b, d, e}
¿Qué elementos no están en A?
R: a, c, f, g.
A estos elementos se les llama el complemento de A ya que no están en el evento A, pero pertenecen al espacio muestral S.



Ejemplo 2.8. Se lanza un dado y se dan los siguientes eventos:
A: Obtener un 6.
B: Obtener un número diferente de 6.
Las posibilidades para A es una, {6}; sin embargo, para B es {1, 2, 3, 4, 5}
A y B son eventos complementarios ya que al unirlos conforman el espacio muestral.

76 | Unidad III • Lección 2 • Clase 6. Propiedades del complemento de un evento

Ejemplo 2.8. (5 min)
M: al lanzar un dado, ¿Cuáles son los elementos del evento, obtener un 6?
RP: 6
¿Cuáles son los elementos de un evento de obtener un número diferente de 6?}
RP: {1,2,3,4,5}
Concluye: A y B son eventos complementarios.

Objetivo: **[A]** Resolver problemas de probabilidad aplicando. La regla de adición.

Clase 6
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 2.9

(Continúa en la siguiente página)

Definición 2.9. Complemento de un evento.
Sea A un evento de un espacio muestral, el complemento de A es todos aquellos elementos que están en el espacio muestral pero que no pertenecen a A.
El complemento de A se denota por $\overline{A}$ o A^c; $A \cup \overline{A} = S$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$$n(S) = n(A) + n(\overline{A})$$

En este libro se usa con frecuencia $\overline{A}$ para complemento de A.

Ejercicio 2.9. Determine los elementos del complemento de los siguientes eventos:

a) Si se extrae un mable blanco de una caja que contiene: 1 mable blanco, 1 rojo y 2 azules. A es el evento de sacar un mable blanco
b) Si se tiene como espacio muestral S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A es el evento de obtener un número par.
c) Se lanza una moneda. A es el evento de obtener cara.

Ejemplo 2.9. Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas y A es el evento de sacar una carta de diamante. Calcule la probabilidad de que A ocurra.

[B]

Solución:
$n(S) = 52$ $\quad$ $n(A) = 13$; hay 13 cartas de diamante

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ (Respuesta)

Si se aplica la regla de adición, tenemos:
P(sea trébol) + P(sea corazón) + P(sea espada)

$$\frac{13}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$$

Si obtenemos el complemento de A
$n(\overline{A}) = 52 - 13 = 39$ $\quad$ Por tanto, $\quad P(\overline{A}) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$

En este caso se pide conocer la probabilidad de sacar una carta que sea trébol o espada o corazón.

De lo anterior se deduce:

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$

Teorema 2.1
Si A y $\overline{A}$ son dos eventos complementarios entonces $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
La probabilidad de que un evento ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que el evento no ocurra.

Si A y $\overline{A}$ son dos eventos complementarios recuerde que: $A \cup \overline{A} = S$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Unidad III • Lección 2 • Clase 6. Propiedades del complemento de un evento | 77

*Explicar al estudiante que en eventos complementarios se da la situación que un evento ocurra o que no ocurra.

Concluye en la adición de eventos complementarios.

Ejercicio 2.9
(5 min) Solución
a) $\overline{A}$ es 1 mable rojo y 2 azules
b) $\overline{A}$ = {1,3,5,7,9}
c) $\overline{A}$ = {escudo}

[B]

Probabilidad de eventos complementarios

Ejemplo 2.9
(7 min)
* Usar la misma estrategia de las clases anteriores.

*Plantear el problema y permitir que los estudiantes propongan formas de resolverlo.

*Deducir que la probabilidad de un evento se puede obtener operando 1 menos la probabilidad del complemento.

Concluir en el teorema 2.1

*Hacer notar al estudiante que cuando dos eventos son complementarios, la unión de ellos es el espacio muestral y la intersección es vacío.

Unidad III. Lección 2.

Clase 6

(Continuación)

Clase 7

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** *Definen la probabilidad condicional.
*Calcular la probabilidad condicional de eventos.

Evaluación: Ejercicio 2.11

Ejercicio 2.10
(18 min) Solución:

a) $a_1)\ \frac{1}{5}$ $\quad a_2)\ \frac{1}{4}$

$a_3)\ \frac{19}{20}$

b) 0.11

c) $\frac{39}{40}$

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

[A] Definir Probabilidad Condicional
(15 min)
M: ¿Qué significado tiene la palabra condicional?
RP: Limita la ocurrencia de algo.
Si se tiene dos eventos condicionales ¿Qué puede decir de ellos?
RP: Que la ocurrencia de un evento está condicionada por la ocurrencia del otro.

Concluye: La probabilidad de que un evento ocurra dado que ha ocurrido otro evento se conoce como probabilidad condicional.

*Concluir en la fórmula para calcular la probabilidad condicional.

Ejercicio 2.10.
De un grupo de 40 estudiantes se le aplicó una prueba de matemáticas, y se obtuvieron los resultados siguientes:

Nota	Hasta (%) 2	Entre (%) 3 y 6	Entre (%) 7 y 10
Cantidad de estudiantes	2	8	30

a) Se elige un alumno al azar. Calcule la probabilidad de:
  a1) Haya obtenido una nota entre 3 y 6.
  a2) Que no obtenga una nota entre 7 y 10.
  a3) Que no obtenga una nota hasta 2.

b) Si la probabilidad de que un futbolista logre el gol en un penal es de 0.89; ¿Cuál es la probabilidad de que no logre el gol?

c) En un contenedor hay 1,000 televisores, de los cuales $\frac{1}{40}$ son defectuosos, si se saca un televisor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un televisor no defectuoso?

Clase 7. Probabilidad condicional

[A]

Definición 2.10. Probabilidad Condicional.
Sea A y B dos eventos en un grupo muestral S, la probabilidad de que el evento B ocurra dado que el evento A ha ocurrido, es una probabilidad condicional y se denota por P (B⁄A) y se lee: "probabilidad de B dado A"

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Teorema 2.2
Sea A y B dos eventos de un espacio muestral la probabilidad de que B ocurra dado A está dada por:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Del Teorema 2.2 se puede deducir:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

78 | Unidad III • Lección 2 • Clase 7. Probabilidad condicional

*Deducir el Teorema 2.2. (10 min)

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \qquad P(B/A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Concluir que en el teorema se puede despejar para P(A ∩ B).

Clase 7
(Continuación)

Ejemplo 2.10. La siguiente muestra el número de estudiantes de un instituto, matriculados en cada una de los niveles de enseñanza desde 7mo a 10mo grado.

	7mo.	8vo.	9no.	10mo.	Total
Mujeres	50	82	86	82	300
Varones	73	99	103	125	400

a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar a un estudiante que sea de 7mo grado, dado que sea mujer?

Solución:
Los eventos son:
A: Es mujer. B: Es estudiante de 7mo. $n(A \cap B) = 50$

$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$ $n(A) = 300$

b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un estudiante de 9no dado que sea varón?

Solución:
Eventos: A: Es varón. B: Es de 9no grado $n(A \cap B) = 103$

$P(B/A) = \frac{103}{400}$ $n(A) = 400$

Leer los datos de la tabla para obtener la intersección de eventos,

Columna

	7mo.	
Mujeres	50	Fila
Varones	73	

La intersección de fila y columna es el dato

Ejercicio 2.11. Considerando la tabla del Ejemplo 2.10, calcule la probabilidad de:

a) El estudiante sea de 10mo grado dado que sea mujer.

b) El estudiante sea de 10mo grado dado que sea varón.

c) El estudiante es de 8vo grado dado que sea mujer

d) Sea varón dado que sea estudiante de 8vo grado.

e) Sea mujer dado que sea estudiante de 9no grado.

Ejemplo 2.10
(15 min)
Tratar que los estudiantes lo hagan solos y luego consultar LE.

Ejercicio 2.11
(15 min) Solución

a) $\frac{41}{150}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{41}{150}$

d) $\frac{99}{181}$

e) $\frac{86}{189}$

Unidad III. Lección 2.
Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Resuelven problemas de la vida cotidiana aplicando probabilidad condicional.

Evaluación: Ejercicio 2.12

Ejemplo 2.11
(10 min)
*Tratar que el estudiante piense la manera de resolverlo y proponga su solución y luego la compare con la propuesta por el LE.

Ejercicio 2.12
(35 min)
Hacer supervisiones individuales del trabajo de los estudiantes y pasar a la pizarra para que propongan soluciones a los problemas.

Solución:

a) $a_1)$ $\frac{16}{49}$ $a_2)$ $\frac{20}{63}$

b) $b_1)$ $\frac{1}{4}$ $b_2)$ $\frac{15}{58}$

c) $c_1)$ $\frac{27}{116}$ $c_2)$ $\frac{25}{58}$

$c_3)$ $\frac{5}{29}$ $c_4)$ $\frac{3}{10}$

$c_5)$ $\frac{4}{9}$

Clase 8. Aplicación de la probabilidad condicional

Ejemplo 2.11. Una urna contiene tres bolas rojas y dos bolas blancas idénticas. Se extraen dos bolas al azar, una después de la otra, sin reemplazo: **[A]**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera bola es roja?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?

Solución:
Los eventos son:
A: La primera bola es roja.
B: La segunda bola es roja.
$n(S) = 5$

a) $P(A) = \frac{3}{5}$, son 3 bolas rojas de 5 que hay en la urna

b) $P(B/A) = \frac{2}{4}$, en este caso en la urna quedan 4 bolas de las cuales 2 son rojas.
$= \frac{1}{2}$

c) Como $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ y se pide encontrar $P(A \cap B)$

se tiene: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$
$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Ejercicio 2.12.

a) En una bolsa se introducen unas tarjetas con los nombres de los estudiantes de una clase con 16 mujeres y 12 varones; se extraen dos tarjetas al azar una después de la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos tarjetas con el nombre de dos mujeres?
a1) Con devolución de la primera tarjeta.
a2) Sin devolución de la primera tarjeta.

b) Una caja contiene 15 caramelos de limón y 15 caramelos de menta. Se extraen 2 caramelos al azar, hallar la probabilidad de que el primero sea de menta y el segundo de limón.
b1) Con devolución del primer caramelo.
b2) Sin devolución del primer caramelo.

c) La siguiente tabla muestra la cantidad de estudiantes matriculados por sección de matemáticas.

Sección	Mujeres	Varones	Total
A	30	24	54
B	40	60	100
C	30	48	78
Total	**100**	**132**	**232**

Objetivo: **[A]** Definir Eventos Independientes.
[B] Calcular la probabilidad de eventos independientes.

Evaluación: Ejercicio 2.13, Ejercicio 2.14

Unidad III. Lección 2.

Clase 8
(Continuación)

Clase 9
(Continúa en la siguiente página)

Se escoge un estudiante al azar, calcule la probabilidad de:
c1) Pertenezca a la sección A.
c2) Sea mujer.
c3) Sea mujer que pertenezca a la sección B.
c4) Pertenezca a la sección C sabiendo que es mujer.
c5) Sea un varón sabiendo que pertenece a la sección A.

*d) En una urna hay 5 letras E, I, O, T, X. Se extraen sucesivamente las 5 letras. Calcule la probabilidad que se forme la palabra ÉXITO en los siguientes casos:
d1) Con devolución.
d2) Sin devolución.

Clase 9. Eventos independientes

Ejemplo 2.12. Un dado rojo y un dado verde son lanzados.
Sean los eventos:
A: Obtener un número par en el dado rojo.
B: Obtener un número múltiplo de 3 en el dado verde.

Los elementos de A son A = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Los elementos de B son B = {(1,3), (1,6), (2,3), (2,6), (3,3), (3,6), (4,3), (4,6), (5,3), (5,6), (6,3), (6,6)}

¿Cuál es la probabilidad de que se dé A?

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra B?

¿La ocurrencia del evento A afecta al evento B y viceversa?

Solución:

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

No afecta la ocurrencia

Los eventos A y B se les llama eventos independientes.

[A]

La ocurrencia de A no afecta la de B.

A y B son independientes y, si A y B no son independientes se dice que son dependientes.

Concluye: El evento de sacar un número par en el dado rojo no afecta el resultado en el dado verde.
Concluye A y B son eventos independientes

*La probabilidad de que un evento independiente ocurra está dada por:

$P(A/B) = P(A)$
$P(B/A) = P(B)$

*d) d_1) P(se forme la palabra ÉXITO)

$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{3125}$

Todas las letras tienen las mismas probabilidades de ser elegidas).

d_2) P(Se forme la palabra Éxito)

$= P(1^{er}\ E) \cdot P(2^{da}\ X/1^{ra}\ E) \cdot P(3^{ra}\ I/1^{ro}\ E \cap 2^{da}\ X) \cdot P(4^{to}\ T/1^{ra}\ E \cap 2^{da}\ X \cap 3^{ra}\ I) \cdot P(5^{to}\ O/1^{ra}\ E \cap 2^{da}\ X \cap 3^{ra}\ I \cap 4^{ta}\ T)$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$= \frac{1}{120}$

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

[A]
Eventos Independientes
(15 min)
M: ¿Cuándo dos eventos son independientes?
RP: Cuando la ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia del otro.

Ejemplo 2.12
*Tratar de resolver sin consultar él LE.
M: ¿Los eventos A y B son independientes?

Clase 9
(Continuación)

Concluir en definición 2.11

Ejercicio 2.13
(5 min)
$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B/A) = P(B) = \frac{1}{3}$

Concluir con el Teorema 2.3
(5 min)
M: ¿Cómo calculamos la probabilidad de dos eventos independientes?
RP: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejercicio 2.14
(20 min) Solución

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{169}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{32}$

e) $\frac{1}{12}$

Definición 2.11. Eventos Independientes.
Sean A y B dos eventos, se dice que A y B son eventos independientes, si la ocurrencia o la no ocurrencia de A no afecta la ocurrencia o la no ocurrencia de B y viceversa. Se denota por:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) = P(B)$$

Ejercicio 2.13. Calcule la probabilidad de que A ocurra, dado que ocurre B y la probabilidad de que B ocurra dado que ocurre A. En el Ejemplo 2.12. **[B]**

Teorema 2.3. Probabilidad de eventos independientes.
Sean A y B dos eventos independientes en un espacio muestral, la probabilidad de que A y B ocurran están dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejercicio 2.14.

a) Si se lanza una moneda normal tres veces, calcule la probabilidad de obtener tres caras.

b) Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas, se devuelve y se extrae una segunda carta, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean Reyes?

c) Se lanza un dado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo lanzamiento resulte un número impar?

d) Un estudiante responde al azar 5 preguntas de verdadero o falso en una prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que las acierte todas?

e) Una persona ha olvidado el código de un candado de combinaciones de 4 dígitos, que se puede formar con las cifras del 0 al 9 y estas pueden repetirse. La persona recuerda dos cifras intermedias; además se sabe que el primer número es par distinto de cero y que la última cifra es impar mayor que 4. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el código correcto?

Objetivo: **[A]** Definir Experimentos independientes.
[B] Calcular la probabilidad de Experimento Independientes.

Evaluación: Ejercicio 2.15

Unidad III. Lección 2.
Clase 10
(Continúa en la siguiente página)

Clase 10. Experimentos independientes

Ejemplo 2.13. Ejemplos de experimentos: **[A]**

a) Lanzar un dado y lanzar una moneda.
b) Extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5 y lanzar un dado.
c) Extraer una carta 5 veces de una baraja con devolución.
d) Lanzar una moneda 10 veces.
e) Lanzar un dado 5 veces.

¿Qué características tienen entre sí los experimentos?
¿Qué puedes concluir de los resultados que se obtendrán en cada caso?

A los experimentos anteriores se les conoce como experimentos Independientes.

Definición 2.12. Experimentos Independientes.
Dos experimentos son independientes si el resultado que se obtiene en uno de ellos, no afecta en los resultados que se obtenga de otro.

Ejemplo 2.14. Se lanza un dado y se gira una ruleta que tiene 4 colores (rojo, azul, amarillo y verde). ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 5 y el color azul? **[B]**

Solución:
Sea A: El evento de obtener el número 5, en el experimento del dado.
Sea B: El evento de obtener el color azul al girar la ruleta.

$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{4}$

A y B son eventos de dos experimentos independientes.
Entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

Ejemplo 2.15. Se toma una moneda y un dado.
Calcular la probabilidad de obtener cara y el número 2.

Solución:
Sea A: El evento de obtener cara en el experimento de lanzar la moneda.
Sea B: El evento de obtener el número 2 en el experimento de lanzar un dado.
A y B son eventos de dos experimentos independientes

$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Los experimentos independientes tienen su propio espacio muestral; al lanzar el dado S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; al lanzar la moneda S = {cara, escudo}

[A] Experimentos Independientes
(15 min)

*Es importante hacer énfasis en la identificación de experimentos independientes y que noten la diferencia entre eventos independientes y experimentos independientes.

Ejemplo 2.13
M: ¿Son experimentos Independientes?
RP: si
M: ¿Por qué se puede decir que son independientes?
RP: Porque los resultados de un experimento no afectan a los resultados del otro.
Concluye en definición 2.11.

[B]

Ejemplo 2.14, 2.15 y 2.16
(15 min)
Hacer que los estudiantes lo piensen y propongan soluciones.

Clase 10
(Continuación)

Concluye en el teorema 2.4

*Para obtener la probabilidad de dos experimentos independientes utilizar:

$P = P(A_1) \cdot P(A_2)$

Siendo A_1 un evento en el experimento 1 y A_2 un evento en el experimento 2.

Ejemplo 2.17
(10 min)

*Este problema tiene la particularidad que se debe aplicar combinaciones para encontrar todas las maneras de obtener 1 en 5 lanzamientos de un dado es decir C(5, 3) y esta multiplicarlo por la probabilidad de obtener 1 tres veces, que está dada por $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ y por la probabilidad de no obtener 1 dos veces $\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Teorema 2.4. Si dos experimentos T_1 y T_2 son independientes, entonces la probabilidad P de obtener eventos A_1 en T_1 y evento A_2 en T_2 es:

$$P = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

Cada lanzamiento es un experimento independiente ya que los resultados de una no influyen en los resultados del otro.

Ejemplo 2.16. Se lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 veces escudo?

Solución:
A: evento de obtener escudo en cada lanzamiento

$P(A) = \frac{1}{2}$ Como son tres lanzamientos

$P(\text{sacar 3 veces escudo}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

¡INTENTE!: Calcule la probabilidad, si son 5 lanzamientos y se desea obtener 3 escudos

Ejemplo 2.17. Se lanza un dado 5 veces, calcule la probabilidad de obtener tres veces el número 1.

Solución:
A: Es el evento de obtener el número 1
Primera lanzada,
$P(A) = \frac{1}{6}$
Segunda lanzada,
$P(A) = \frac{1}{6}$
Tercera lanzada,
$P(A) = \frac{1}{6}$

Cada lanzamiento es un experimento independiente ya que los resultados que se obtienen en cada lanzada no se afectan entre sí.

Aplicando el Teorema 2.3, vemos algunos casos:

$$C(5, 3) = \left\{ \begin{array}{ccccc l} \multicolumn{5}{c}{\text{Lanzamientos}} & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ O & O & O & X & X & \ldots① \\ O & X & O & X & O & \ldots② \\ X & O & X & O & O & \ldots③ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right.$$

O representa 1
X representa un número diferente de 1

Probabilidad

①: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

②: $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

③: $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$

Es necesario conocer de cuantas maneras se puede obtener 3 veces uno y para ello utilizamos combinaciones.

Objetivo: **[A]** Determinar la fórmula para calcular la probabilidad de experimento repetidos.

Evaluación: Ejercicio 2.16

Unidad III. Lección 2.

Clase 10
(Continuación)

Clase 11
(Continúa en la siguiente página)

$C(5, 3) = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$, por lo tanto en los 5 lanzamientos la probabilidad de obtener 3 veces 1 es:

$$10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888}$$

10 representa las maneras que podemos obtener 1 con los 5 lanzamientos.

Ejercicio 2.15

a) Un examen consta de 5 preguntas de verdadero y falso. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante acierte 3?

*b) En una urna hay 5 pelotas rojas, 6 azules y 1 blanca. Se extraen, al azar, 6 pelotas con reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de:

b1) 3 pelota sean rojas?

b2) 6 pelotas sean azules?

b3) 3 pelotas sean azules, 2 sean rojas y 1 sea blanca?

Clase 11. Probabilidad de experimentos repetidos

La probabilidad de experimentos repetidos se refiere, a la probabilidad de x éxitos en n intentos repetidos en un experimento. Del Ejemplo 2.17, se sabe que:
Si la probabilidad de éxito en un intento individual es P, entonces la probabilidad es:

[A]

Teorema 2.5. Probabilidad de experimentos repetidos.

$$C(n, x) \cdot P^x(1 - P)^{n-x}$$

Se le conoce como probabilidad binomial

La probabilidad binomial, se aplica a experimentos que tienen dos resultados posibles.

*Si P es la probabilidad de éxito, (1 – P) es la probabilidad de fallo.

Ejercicio 2.16. Resuelva los Ejercicios 2.15, aplicando la probabilidad binomial.

Ejemplo 2.18. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda tres veces salgan dos veces cara y una vez escudo?

Solución:

- En cada experimento las posibilidades son dos: cara o escudo.
- Los eventos de cada experimento son independientes y los experimentos también son independientes.
- El valor de la probabilidad de cada experimento es el mismo.

Unidad III • Lección 2 • Clase 11. Probabilidad de experimentos repetidos | 85

Ejercicio 2.15
(5 min) Pueden asignar de tarea. Solución

a) $C(5,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

*b) b_1)

$$C(6, 3)\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(1 - \frac{5}{12}\right)^3 = \frac{214375}{746496}$$

b_2) $C(6,6)\left(\frac{6}{12}\right)^6$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

b_3)

$$\frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{6}{12}\right)^3\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{1}{12}\right)^1 = \frac{125}{1152}$$

[Hasta aquí Clase 10]

[Desde aquí Clase 11]

Formula del cálculo de probabilidad Binomial
(10 min)
*Tomando en consideración los Ejemplos 2.16 y 2.17 de la clase 10 se deduce la fórmula para calcular la probabilidad de eventos repetidos.

*Concluir en el Teorema 2.5

Probabilidad de Experimentos Repetidos.

Ejercicio 2.16
(Las soluciones son las mismas del Ejercicio 2.15) (10 min)

Ejemplo 2.18 (10 min)
*Aplicando la fórmula para encontrar probabilidad binomial, resolverlo sin consultar el LE y luego comparar las respuestas.

Clase 11
(Continuación)

*Pasar a la pizarra para que los estudiantes compartan las soluciones.

Ejercicio 2.17
(15 min) Solución:

a) $a_1)$ $C(7,7)\left(\frac{7}{10}\right)^7\left(\frac{3}{10}\right)^0$

$= \frac{823543}{10000000}$

$a_2)$ $C(7,7)\left(\frac{7}{10}\right)^0\left(\frac{3}{10}\right)^7$

$= \frac{2187}{10000000}$

b) $C(4,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

c) $c_1)$ $C(8,8)\left(\frac{9}{10}\right)^8\left(\frac{1}{10}\right)^0$

$= \frac{43046721}{100000000}$

$c_2)$ $C(8,1)\left(\frac{9}{10}\right)^7\left(\frac{1}{10}\right)^1$

$= 8 \times \frac{4782969}{100000000}$

$= \frac{4782969}{12500000}$

d) $d_1)$ $C(6,6)\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1$

$= \frac{1}{64}$

$d_2)$ $C(6,5)\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{32}$

Sea x la cantidad de caras que se obtienen en 3 lanzamientos. Cuando se lanza la moneda la probabilidad de obtener cara o escudo es $\frac{1}{2}$.

Cuando $x = 2$, se tiene:

$$P = \frac{1}{2},\ n = 3 \text{ lanzamientos}$$

$$C(n, x) \cdot P^x(1 - P)^{n-x}$$
$$= C(3, 2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(3-2)}$$
$$= \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{8}$$

Ejercicio 2.17.

a) La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de Bachiller en Ciencias y Humanidad es de 0.3; hallar la probabilidad de que un grupo de siete estudiantes matriculados en 10mo grado, finalmente:
   a1) Ninguno finalice la carrera.
   a2) Finalicen todos, la carrera.

b) Una familia tiene 4 hijos, calcule la probabilidad de que tres de ellos sean niños.

c) En una empresa que hace computadoras, el 10% de sus productos salen defectuosos. Si se toma una muestra de 8 computadoras, determina la probabilidad de que:
   c1) Ninguna de las computadoras salga defectuosa.
   c2) Solo una de ellas salga defectuosa.

d) Una persona que participa en un concurso debe responder verdadero o falso una afirmación que se le hace, en cada una de seis etapas. Si la persona responde al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en:
   d1) Seis etapas.
   d2) Cinco etapas.

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Unidad III. Lección 2.
Ejercicios de la lección

Ejercicios de la lección

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al rodar un dado salga un número primo? Clase 1 y 2 Probabilidad

b) En una caja hay 6 bolas: 3 rojas, 2 azules y 1 verde. ¿Cuál es la probabilidad que, al sacar una bola al azar, sea:

b1) Verde.

b2) Azul.

b3) Roja.

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un guante, al azar, este sea derecho rojo de un total de 5 pares de guantes rojos y 5 pares de guantes negros?

d) En una bolsa se tienen 20 fichas numeradas del 1 al 20. Si se saca una al azar, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número múltiplo de 4?

e) En la entrada a clases, 5 estudiantes guardaron su celular en 5 bolsas oscuras idénticas. Cuando finalizó la jornada, descubren que las bolsas han sido cambiadas de posición. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno escoja su celular en el primer intento?

f) Se extrae, al azar, una carta en la baraja de 52 cartas. Determine la probabilidad de los siguientes eventos: Clase 4 y 5

f1) Sacar un 7.

f2) Sacar una carta negra

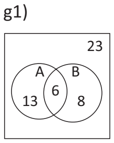
f3) Sacar un As ó un Rey

f4) Sacar un 2 (negro o rojo) ó un 4 negro

f5) Sacar un 3 (negro o rojo) ó un As negro

g) Los siguientes diagramas de Venn, indica el número de resultado de un experimento correspondiente a cada evento y el número de resultados que no corresponden a los eventos. Tomando en cuenta estos datos calcule la probabilidad que se pide.

g1)



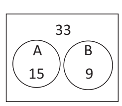
P(A) =

P(B) =

P(A ∪ B) =

P (A ∩ B) =

g2)



P(A) =

P(B) =

P(A ∪ B) =

P(A ∩ B) =

a) $\frac{1}{2}$

b) $b_1)\ \frac{1}{6}$ $b_2)\ \frac{1}{3}$ $b_3)\ \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{120}$

f) $f_1)\ \frac{1}{13}$ $f_2)\ \frac{1}{2}$

$f_3)\ \frac{2}{13}$ $f_4)\ \frac{3}{26}$

$f_5)\ \frac{3}{26}$

g) $g_1)$ $P(A) = \frac{19}{50}$;

$P(B) = \frac{7}{25}$

$P(A \cup B) = \frac{27}{50}$;

$P(A \cap B) = \frac{3}{25}$

$g_2)$ $P(A) = \frac{15}{57} = \frac{5}{19}$;

$P(B) = \frac{9}{57} = \frac{3}{19}$

$P(A \cup B) = \frac{24}{57} = \frac{8}{19}$;

$P(A \cap B) = 0$

Ejercicios de la lección
(Continuación)

h) $h_1)\ \frac{288}{515}$

$h_2)\ \frac{92}{515}$

$h_3)\ \frac{128}{515}$

$h_4)\ \frac{2}{103}$

$h_5)\ \frac{378}{515}$

$h_6)\ \frac{217}{515}$

i) 0.65

j) $j_1)\ \frac{7}{10}$

$j_2)\ \frac{1}{2}$

$j_3)\ \frac{4}{5}$

k) Solución en la siguiente página.

h) La siguiente tabla, muestra el resultado de 515 entrevistas durante una encuesta que se le hizo a estudiantes de diferentes áreas de estudio, respecto a la opinión que tienen sobre la modificación del plan de estudios.

Área	A Favor (F)	En contra (C)	No opina (N)	Total
A	110	15	7	132
B	100	10	5	115
D	40	70	30	140
E	38	40	50	128
Total	**288**	**135**	**92**	**515**

Si se elige al azar, una entrevista de las 515. Calcule la probabilidad que el estudiante:
h1) Esté a favor. h2) No opine.
h3) Sea de la carrera E. h4) Esté en contra y pertenezca a la carrera B.
h5) Esté a favor o que pertenezca a la carrera E.
h6) No opina o pertenezca a la carrera A.

i) Si la probabilidad de que un evento ocurra es de 0.35. Calcule la probabilidad de que el evento no ocurra.

Clase 6. Probabilidad del complemento de un evento.

j) En un curso de 50 estudiantes se hace una competencia de cultura general. Se obtienen los siguientes puntos:

PUNTOS	Hasta 2.9	Entre 3 y 3.9	Entre 4 y 7
Número de estudiantes	10	15	25

Si se escoge un estudiante al azar, cuál es la probabilidad de:
j1) No obtener una puntuación entre 3 y 3.9.
j2) No obtener una puntuación entre 4 y 7.
j3) No obtener una puntuación hasta 2.9.

k) La siguiente tabla, muestra la información del personal de una fábrica que ha sido o no capacitado y el servicio que brindan a los clientes de cierta ciudad.

Clase 7 y 8 Probabilidad condicional.

		B (Buen servicio)	**B´ (Servicio deficiente)**	**Total**
C	Capacitado	48	16	64
C´	No capacitado	24	62	86
	Total	**72**	**78**	**150**

Sea B: El evento de que el empleado brinda buen servicio.
B´: El evento de que el empleado no brinda buen Servicio.
C: El evento de que un empleado ha sido capacitado en la fábrica.
C´: El evento de que un empleado no ha sido capacitado en la fábrica.

Si se selecciona un empleado al azar, calcule la probabilidad de escoger:

k1) Un empleado que brinde buen servicio.
k2) Un empleado que ha sido capacitado en la fábrica.
k3) Un empleado que ofrezca buen servicio y ha sido capacitado en la Fábrica.
k4) Un empleado que brinde un buen servicio dado que ha sido capacitado en la fábrica.
k5) Un empleado que brinde un buen servicio dado que no ha sido capacitado en la fábrica.
k6) Un empleado que no brinde buen servicio dado que ha sido capacitado en la fábrica.
k7) Un empleado que no brinde buen servicio dado que no ha sido capacitado en la fábrica.

l) Cierta empresa ha recibido 25 solicitudes de empleo para una plaza disponible de gerente. De los aspirantes, 10 tienen más de 30 años y el resto menos de eso. 17 de los aspirantes tienen Licenciatura y 8 tienen Maestría. De los que son menores de 30 años, 6 tienen el grado de Maestría. Si se hace una selección al azar, calcule la probabilidad de que:

Clase 9 Eventos Independientes

l1) Sea seleccionado un aspirante de más de 30 años o que tenga Maestría
l2) Sea seleccionado un aspirante menor de 30 años dado que tenga una Licenciatura.
l3) Sea seleccionado un aspirante menor de 30 años con Licenciatura.
l4) Sea seleccionado un aspirante menor de 30 años y con Maestría.

m) En un examen hay 15 preguntas de las cuales son 5 verdadero o falso y 10 tipo selección con cuatro opciones. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante al responder al azar, acierte 3 de verdadero o falso y 7 de tipo selección?

Clase 10 Experimentos Independientes

n) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda tres veces se obtengan dos caras?

Unidad III • Lección 2 • Ejercicios de la lección | 89

k) k_1) $\frac{12}{25}$

k_2) $\frac{32}{75}$

k_3) $\frac{8}{25}$

k_4) $\frac{3}{4}$

k_5) $\frac{12}{43}$

k_6) $\frac{1}{4}$

k_7) $\frac{31}{43}$

l) l_1) $\frac{16}{25}$

l_2) $\frac{9}{17}$

l_3) $\frac{9}{25}$

l_4) $\frac{6}{25}$

m)
$$C(5, 3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C(10, 7)\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{2025}{2097152}$$

n) $$C(3, 2)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

AGRADECIMIENTO

La Secretaría de Educación, La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y La Agencia de Cooperación Internacional del Japón, AGRADECEN al personal docente y estudiantes de los centros educativos gubernamentales de Educación Media que participaron en el proceso de validación de los contenidos de los Libros y las Guías de Matemática para 10mo y 11mo grado que fueron elaborados en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática Fase III (PROMETAM FASE III).

DISTRITO CENTRAL - FRANCISCO MORAZÁN
Instituto Héctor Pineda Ugarte
Braulio Joel Gómez Sierra
Gustavo Adolfo Padilla Maradiaga
Allison Xiomara Chávez Ogando

Instituto España Jesús Milla Selva
Edna Evelyn Henríquez Rivera
Franklin Sadí Flores Osorto
Thesla Mariella Cerrato Coello

Instituto Blanca Adriana Ponce
Verónica Teodorlinda Acuña Sarantes
Víctor Manuel Mejía C.

Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE–UPNFM)
Rooy Estiven Fúnez Posadas

CHOLUTECA, CHOLUTECA
Instituto José Cecilio del Valle
Margarita Alvarenga Sandoval

COPÁN,
Instituto Copán Galel - Corquín
Rubén Arturo Álvarez Calidonio

Instituto Bernardo Galindo y Galindo – La Entrada, Nueva Arcadia
Walter Ananías Murillo Domínguez

SAN PEDRO SULA, CORTÉS
Instituto José Trinidad Reyes
Geovanni Javier Andino Sevilla
Martha Elena Perdomo Fernández

DANLÍ, EL PARAÍSO
Instituto Departamental de Oriente
Lilibeth Carolina López Zavala

Escuela Normal España Villa Ahumada
Digna Zulema Laínez Berríos

GRACIAS, LEMPIRA
Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE – UPNFM)
Dioselina Serrano Benítez