República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA III

Libro del Estudiante

Undécimo grado

11

Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Educación Media

MATEMÁTICA III - Libro del Estudiante - Undécimo grado
11

El **Libro del Estudiante - Matemática III - del Undécimo grado de Educación Media**, es propiedad de la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras, C.A.

Presidencia de la República de Honduras

Secretaría de Estado en el Despacho de Educación

Sub Secretaría de Asuntos Técnico Pedagógicos

Sub Secretaría de Asuntos Administrativos y Financieros

Dirección General de Desarrollo Profesional

Esta obra fue elaborada y revisada en el marco del **Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM Fase III)**, que ejecutó la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación en coordinación con la **Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM)**, con el apoyo técnico de la **Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)**.

Autores - UPNFM
Luis Antonio Soto Hernández
Karla Valesca Matute Colindres

Equipo Técnico de Revisión – UPNFM – 2018
Luis Antonio Soto Hernández
Flavia María Romero Camacho

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2017
Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Carlos Antonio Mejía
José Hipólito Vásquez Rodríguez

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2018
Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Luisa Naomi Herrera Torres

Revisión Técnico Gráfico y Pedagógico 2017, 2018
Dirección General de Innovación Tecnológica y Educativa

© Secretaría de Educación,
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán,
Agencia de Cooperación Internacional del Japón.
1ª Calle entre 2ª y 4ª Avenida,
Comayagüela, M.D.C. Honduras, C.A.
www.se.gob.hn
Libro del Estudiante, Matemática III, Undécimo grado
Primera Edición 2017
Revisión 2018

ISBN 978-99979-53-75-9

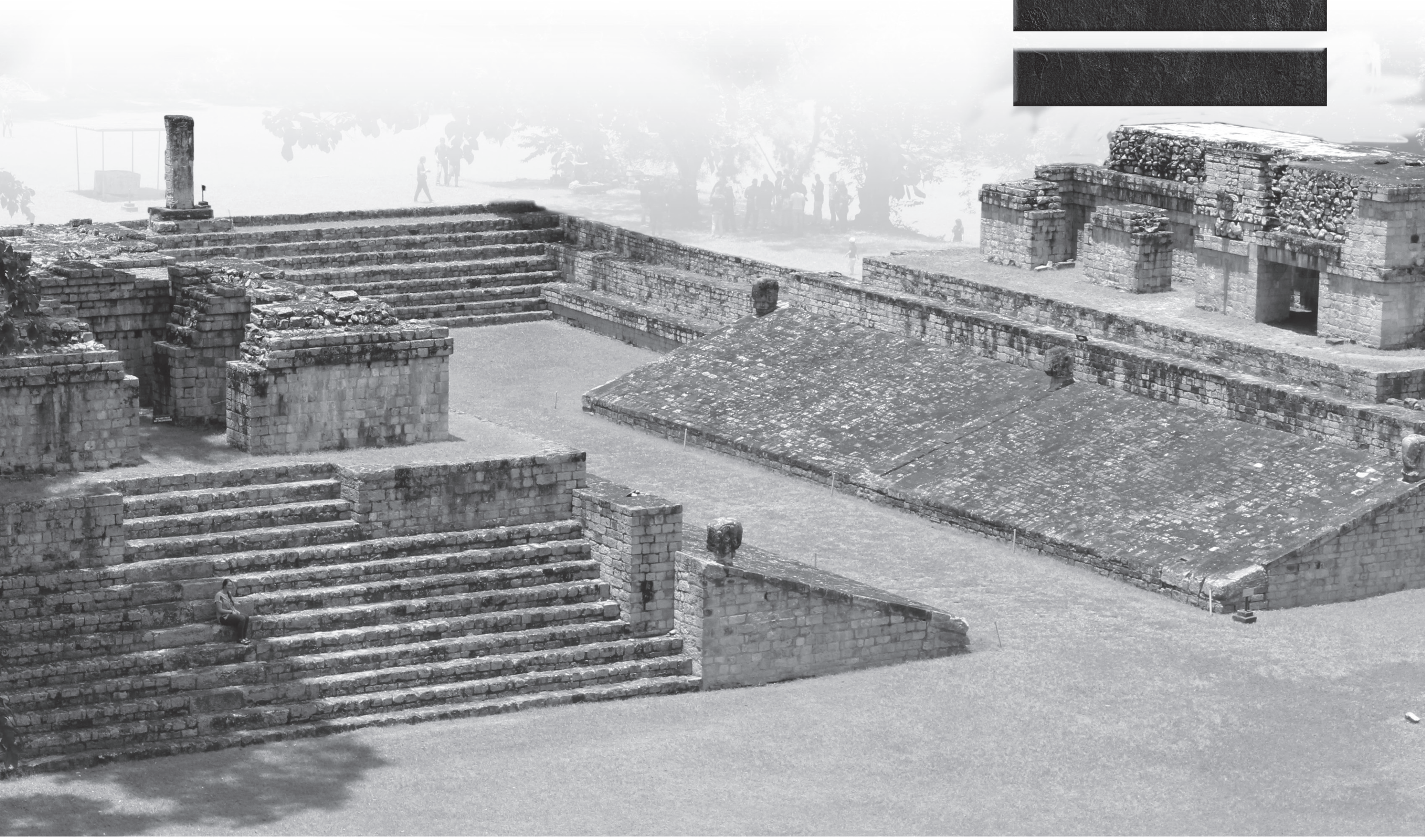
Se prohíbe la reproducción total o parcial de este libro por cualquier medio, sin el permiso por escrito de la Secretaría de Educación de Honduras.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA – PROHIBIDA SU VENTA

República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA III
Libro del Estudiante
Undécimo grado

11



Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en este Libro, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

Jóvenes de HONDURAS:

Es una gran satisfacción para la Secretaría de Educación, presentar este Libro del Estudiante que ha sido elaborado para ustedes con mucho esmero y con el propósito de que encuentren en él la oportunidad de aprender matemática.

El Libro del Estudiante que tienen en sus manos, está diseñado de manera sencilla considerando sus experiencias diarias, sus capacidades y habilidades y sobre todo haciendo énfasis en la realización de actividades que les permitan aprender y aprender a hacer, mediante la aplicación de conceptos, resolución de problemas y ejercicios.

La orientación oportuna de sus docentes, el apoyo de sus padres y fundamentalmente sus esfuerzos por aprender, son la vía para el logro del derecho universal que les asiste: Educación de Calidad. Derecho estimado como el tesoro más preciado de nuestra querida Patria.

Como autoridades educativas tenemos un gran compromiso con ustedes, asegurarles un mejor futuro y para eso estamos trabajando con mucho esfuerzo, para encaminarlos en la formación de valores, hábitos, actitudes, habilidades y conocimientos que le permitan integrarse a la vida social como personas capacitadas e independientes; que sepan ejercer su libertad con responsabilidad, para convertirse cada día en mejores ciudadanos.

Se espera que este Libro del Estudiante se convierta en una herramienta de aprendizaje de mucha utilidad en su proceso de formación.

SECRETARIA DE ESTADO
EN EL DESPACHO DE EDUCACIÓN

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

***La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación** de Honduras con mucha satisfacción le entrega este **Libro del Estudiante**, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo: por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:*

1. *Forre el **Libro del Estudiante** con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.*

2. *Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del **Libro**, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.*

3. *Todos los ejercicios propuestos en el **Libro** debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.*

4. *Está permitido llevar a su casa el **Libro**, cuidando que otras personas que conviven con usted se lo manchen, rayen o rompan.*

5. *Recuerde llevar el **Libro** al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.*

6. *Antes de usar su **Libro**, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.*

7. *Tenga cuidado de usar su **Libro** como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.*

8. *Al pasar las hojas o buscar el tema en el **Libro**, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.*

Recuerde que este Libro es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

ESTIMADO DOCENTE: POR FAVOR EXPLIQUE A SUS ESTUDIANTES LA FORMA DE CUIDAR Y CONSERVAR EL LIBRO DEL ESTUDIANTE, YA QUE PERTENECE AL CENTRO EDUCATIVO.

Índice

Explicación de iconos en el libro

Cada ícono representa:

El desarrollo de un ejemplo.

La propuesta de ejercicios o problemas.

Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro, a la vez, algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.

Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.

Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.

Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

Matemáticas III

Unidad I

Geometría elemental

- Lección 1: Congruencia de triángulos
- Lección 2: Semejanza de triángulos

Algo de historia

Euclides
(330 a.c. – 275 a.c.)

Euclides fue un matemático griego, se conoce muy poco de su vida, sin embargo por su legado es considerado como uno de los matemáticos más famosos de su época junto a Apolonio y Arquímedes. Euclides fundó una escuela de matemática en Alejandría la cual durante varios años se consideró una de las más célebres del mundo.

El nombre de Euclides está ligado a la geometría, al escribir su famosa obra llamada Elementos, está compuesta por 13 libros en las cuales se explican las bases de la geometría.

La influencia de los Elementos de Euclides fue muy fuerte, convirtiéndolo en texto ejemplar en la enseñanza inicial de la matemática, conservando la vigencia en nuestro tiempo.

Los primeros seis libros tratan sobre lo que hoy se conoce como geometría plana o elemental, en los libros séptimo al décimo se estudian temas relacionados con la teoría de números y los tres restantes tratan los temas de los sólidos, culminando con la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas. Esta obra generó muchas discusiones posteriores por diferentes matemáticos los cuales llegaron a confirmar la veracidad de la misma, de igual forma ha sido de mucha ayuda en diferentes campos de la ciencia como ser física, química, astronomía, ingeniería entre otros.

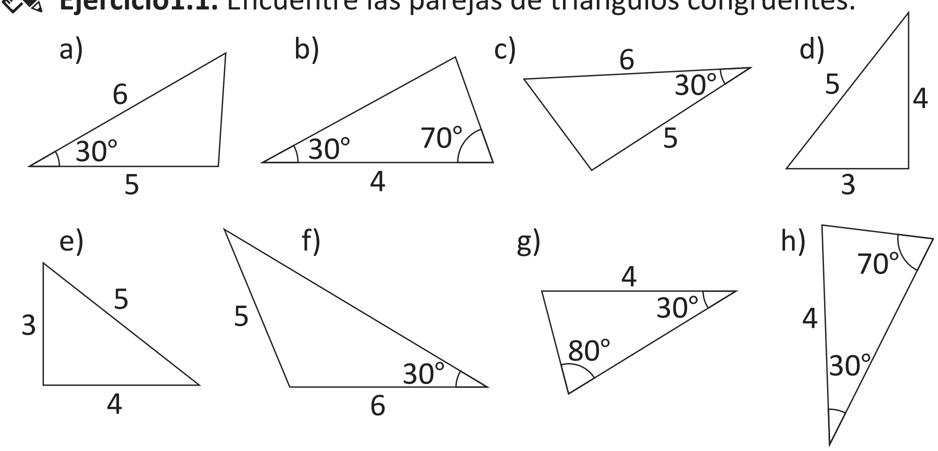
Fuente: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm

Lección 1. Congruencia de Triángulos

Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos

Congruencia de triángulo

Ejercicio1.1. Encuentre las parejas de triángulos congruentes.



Pareja 1: __________ Pareja 2: __________ Pareja 3: __________

Criterio: ___________ Criterio: ___________ Criterio: ___________

Dos triángulos son congruentes si satisfacen uno de los siguientes criterios:

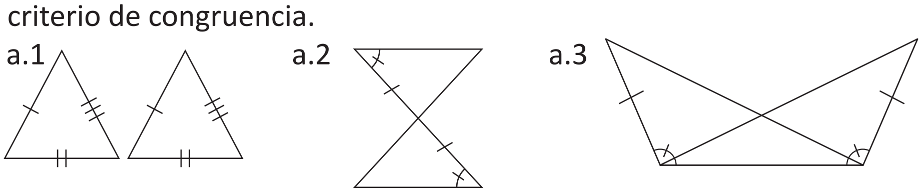
a) Los tres lados son respectivamente congruentes (LLL).

b) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (LAL).

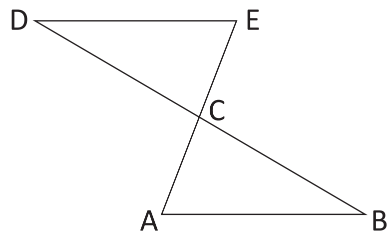
c) Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes (ALA).

Ejercicio 1.2.

a) Para cada par de triángulos dibujados a continuación diga cuál es el criterio de congruencia.



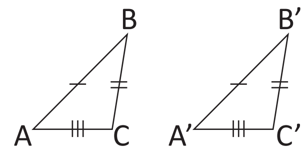
b) En la figura $\overline{AE}$ interseca a $\overline{BD}$ en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demuestre que el $\angle A \cong \angle E$.



[A]

En una congruencia de triángulos se da una correspondencia entre vértices, lados y ángulos.

En la congruencia



$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ Se da:

*Correspondencia entre vértices

$A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$

*Lados correspondientes de triángulos congruentes son congruentes

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

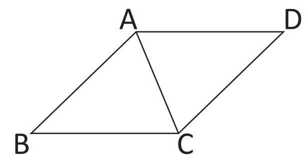
*Los ángulos correspondientes son congruentes

$$\angle A \cong \angle A'$$

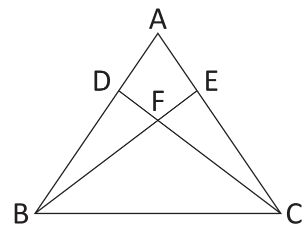
$$\angle B \cong \angle B'$$

$$\angle C \cong \angle C'$$

c) La figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.
Demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

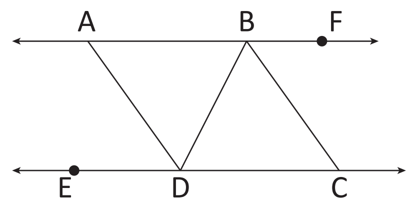


d) En el triángulo isósceles ΔABC, hay dos puntos D y E en los lados congruentes AB y AC respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Demuestre que:
d1. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.
d2. Si F es el punto donde se cortan $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$



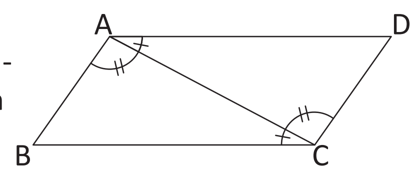
En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y viceversa.

e) En la figura las rectas AB y DC son paralelas, $\overline{DA}$ biseca el $\angle BDE$ y $\overline{BC}$ biseca el $\angle DBF$. Demuestre:
e1. $\Delta DAB \cong \Delta BCD$
e2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Aplicación de congruencia a los cuadriláteros

Ejercicio 1.3. Demuestre que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. En el ΔABC y ΔCDA, el $\angle BAC \cong \angle DCA$ y $\angle BCA \cong \angle DAC$	
2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$	
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 1, 2 y criterio de congruencia
4. $\overline{AB} \cong$ $\overline{BC} \cong$	Por 3 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

[B]

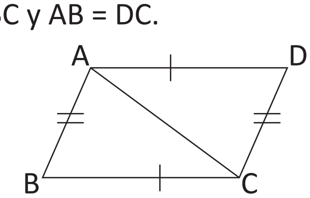
La relación de los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas paralelas y una transversal.

Teorema 1.1
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Ejercicio 1.4. En el cuadrilátero ABCD, AD = BC y AB = DC.
Demuestre lo siguiente:

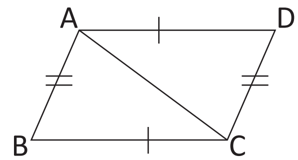
a) Los ΔABC y ΔCDA son congruentes

b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



Clase 2. Características de los cuadriláteros

Condiciones para ser paralelogramo



Ejemplo 1.1. Demuestre que un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.

Proposición	Justificación
1. En el ΔABC y ΔCDA $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$	Congruencia del mismo segmento
3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	Por 1, 2 y criterio de congruencia LLL
4. $\angle CAB \cong \angle ACD$ $\angle BCA \cong \angle DAC$	Por 3 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes
5. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	Por 4 y condición de paralelismo (ángulos alternos internos)
6. ABCD es un paralelogramo.	Por 5 y definición de paralelogramo.

[A]

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

Teorema 1.2
Condiciones para ser un paralelogramo
Un cuadrilátero es un paralelogramo si cumple una de las siguientes condiciones:

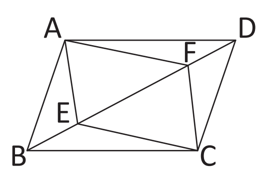
a) Dos pares de lados opuestos son paralelos. (Definición)
b) Dos pares de lados opuestos son congruentes.
c) Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
d) Las diagonales se cortan en el punto medio.
e) Un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.

Otra condición para ser un paralelogramo: Los ángulos consecutivos son suplementarios.

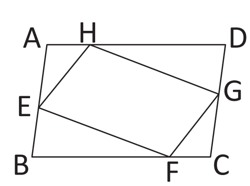
Ejercicio 1.5.

a) Demuestre las condiciones c, d y e para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

b) En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



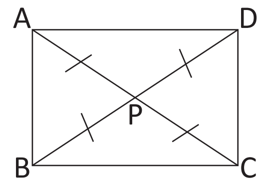
c) Se toman 4 puntos E, F, G y H en los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestre que EFGH es un paralelogramo.



Tenga en cuenta las condiciones para ser un paralelogramo al demostrar b y c.

Rectángulos, rombos y cuadrados

Ejercicio 1.6. Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio es un rectángulo. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. PA = PB = PC = PD	Hipótesis
2. ∆PAB, ∆PBC, ∆PCD, ∆PDA son triángulos $\square$	$\square$
3. ∠APD ≅ ∠CPB, ∠APB ≅ ∠CPD	$\square$
4. ∆PAD ≅ ∆PCB, ∆PAB ≅ ∆PCD	$\square$
5. m∠PAD = $\square$ = $\square$ = $\square$ y m∠PAB = $\square$ = $\square$ = $\square$	$\square$
6. m∠DAB = m∠ABC = m∠BCD m∠CDA = 90°	Por 5 y (suma de los ángulos internos de cuadrilátero) ÷ 4
7. ABCD es un rectángulo.	$\square$

Teorema 1.3
Las diagonales de un:
Rectángulo son congruentes y se cortan en el punto medio.
Rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
Cuadrado son congruentes y perpendiculares y se cortan en el punto medio.

Ejercicio 1.7.

a) Demostrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio entonces este es un cuadrado.

b) Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

[B]

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.

Es importante saber que:
Todo cuadrado es un rectángulo.
Todo cuadrado es un rombo.
La inversa no se cumple.

Clase 3. Teorema de los dos puntos

Ejercicio 1.8.

Construya:

- Dibuje un ΔABC
- Marque los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, nombrándolos como D y E respectivamente
- Trace $\overline{DE}$

Verifique:

- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- Compare DE con respecto a AC.

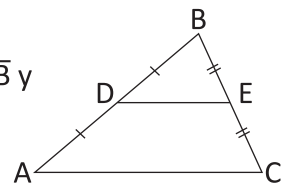
[A]

En el Ejercicio 1.8, utilice regla para las mediciones y escuadras para verificar el paralelismo.

El resultado anterior se cumple por el siguiente teorema.

Teorema 1.4
Teorema de los dos puntos
En el ΔABC, D y E son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y

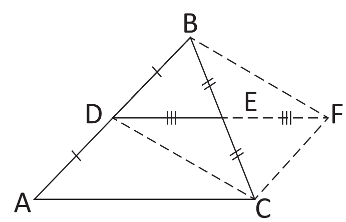
$DE = \frac{1}{2}AC$.



[B]

Teorema de los dos puntos también se llama "Teorema del segmento medio de un triángulo" y "Teorema del conector de puntos medios".

Ejemplo 1.2. Demostración de Teorema de los dos puntos. Utilice la siguiente construcción auxiliar: Sea F el punto que pertenece a la prolongación de $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, tal como se muestra en la figura.



1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

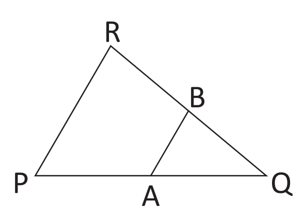
Proposición	Justificación
1. $\overline{BD} \cong \overline{DA}$	Hipótesis
2. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$	Hipótesis
3. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$	Hipótesis
4. E es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$	Por 2 y 3
5. BDCF es un paralelogramo	Por 4 y condición de paralelogramo
6. $\overline{BD} \cong \overline{FC}$	Por 5
7. $\overline{DA} \cong \overline{FC}$	Por 1 y 6
8. $\overline{DA} \parallel \overline{FC}$	Por 5 y ser A, D, B colineales
9. ADFC es un paralelogramo	Por 5, 8 y condición de paralelogramo
10. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	Por 9 y definición de paralelogramo

2) $DE = \frac{1}{2}AC$

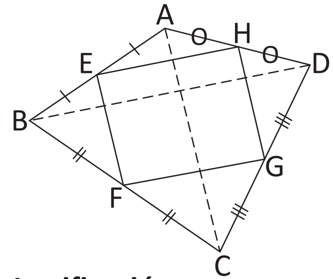
Proposición	Justificación
1. DF = 2DE	E es punto medio del $\overline{DF}$.
2. DF = AC	ADFC es un paralelogramo
3. 2DE = AC	Por 1 y 2
4. $DE = \frac{1}{2}AC$	Por 3

Para realizar las demostraciones, debe analizar los teoremas de la lección anterior sobre congruencia de triángulos y sobre cuadriláteros.

Ejercicio 1.9. En el ΔPQR, A y B son los puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ respectivamente. Si RP = 16, $m\angle P = 58°$ y $m\angle Q = 38°$, obtenga AB y $m\angle BAQ$.



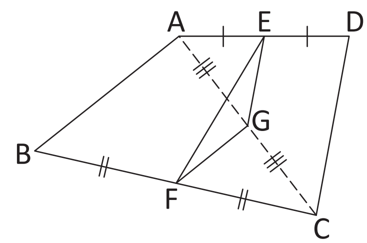
Ejercicio 1.10. Demuestre que el cuadrilátero EFGH que se obtiene uniendo los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Llene las casillas en blanco.



Proposición	Justificación
1. E, F, G y H son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ respectivamente	Hipótesis
2. En el ΔABD, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$	☐
3. En el ΔBCD, ☐	Teorema de los dos puntos
4. $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$	Igualando 2 y 3
5. En ΔACD, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$	☐
6. ☐	Teorema de los dos puntos
7. $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$	Igualando 5 y 6
8. EFGH es un paralelogramo.	☐

Para los ejercicios 1.10 y 1.11: Aplique el teorema del segmento medio de un triángulo a los triángulos que se forman con las diagonales.

Ejercicio 1.11.
En el dibujo $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y los puntos E y F son los puntos medios de los lados AD y BC respectivamente. El punto G es el punto medio de la diagonal AC, ¿Qué tipo de triángulo es ΔEFG?



Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

Propiedad de la mediatriz

[A]

Construcción

Ejercicio 1.12.
Construya:
- Trace un segmento, $\overline{AB}$
- Trace la mediatriz de $\overline{AB}$
- Coloque un punto P sobre la mediatriz, no colineal con A y B

Verifique:
- Compare PA con PB

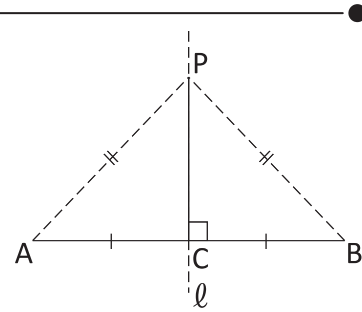
Lo anterior es una propiedad.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Teorema 1.5 Propiedad de la mediatriz
La recta ℓ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

1) Si P está en ℓ, entonces PA = PB

2) Si PA = PB, entonces P está en ℓ.



Demostración:

1) Si P está en ℓ, PA = PB

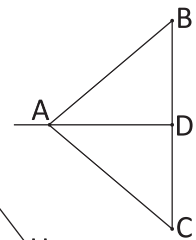
Proposición	Justificación
1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	C es punto medio del $\overline{AC}$.
2. $\angle ACP \cong \angle BCP$	Perpendicularidad (ángulos rectos).
3. $\overline{PC} \cong \overline{PC}$	Congruencia del mismo segmento
4. $\Delta PAC \cong \Delta PBC$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL
5. $PA \cong PB$	Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

2) Demuestre que sí PA = PB, entonces P está ℓ.

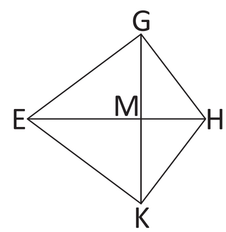
Para la parte 2), debe llegar a demostrar que C es punto medio y que $m\angle ACP = m\angle BCP = 90°$

Ejercicio 1.13.

a) Si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el ΔABC es isósceles.



b) En la figura, M está en el $\overline{GK}$, GE = KE, GM = KM y H está en la recta EM. Demostrar que GH = KH.



En el ejercicio a), no utilice congruencia de triángulos en la demostración, emplee la propiedad de la mediatriz.

Circuncentro de un triángulo

[B]

Ejercicio 1.14.

a) Construya el ΔABC

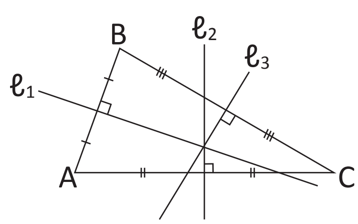
b) Trace las mediatrices de los lados del ΔABC.

c) ¿Qué observa respecto a las mediatrices? ¿Coinciden en un punto?

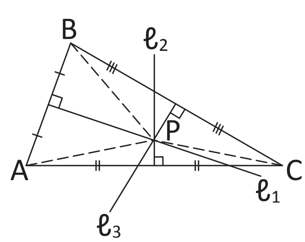
Construcción

Dos o más rectas son **concurrentes** si hay un solo punto que está en todas ellas.

Teorema 1.6. Concurrencia de las mediatrices.
Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.



Ejercicio 1.15. Demuestre el teorema anterior considerando a P como punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P también está en la recta ℓ_3 y que PA = PB = PC.

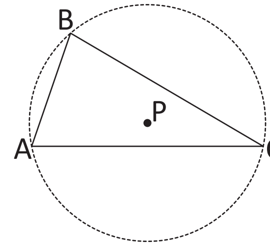


Ejercicio 1.16.
Utilice la construcción del Ejercicio 1.14 y nombre con P el punto de intersección de las mediatrices y trace una circunferencia con centro en P y con radio PA.

1) ¿Qué observa con respecto a la circunferencia y los vértices del triángulo?
2) ¿Cómo se llama este tipo de circunferencia?

Al punto P se le llama **circuncentro**.

Circunferencia circunscrita.



Es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo

Definición 1.1
El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama circuncentro del triángulo.

Ejercicio 1.17.

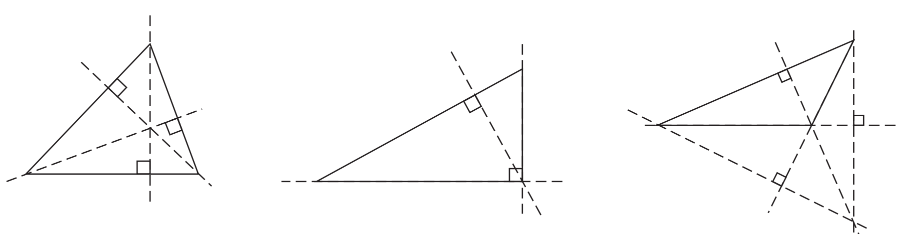
a) Construya un triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo; y la circunferencia circunscrita a cada uno. Compare la ubicación del circuncentro en cada caso.
b) ¿Cómo ha de ser el triángulo para que el circuncentro se sitúe en uno de sus lados? Cuando eso sucede, ¿con qué punto coincide el circuncentro? ¿Por qué?

Ortocentro

[C]

Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

Ejercicio 1.18. Para cada uno de los siguientes triángulos se han trazado sus tres alturas.

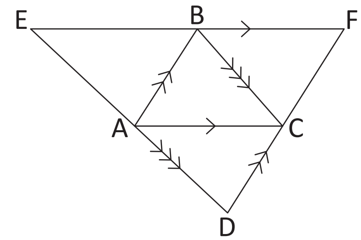


a) ¿Qué tienen en común los tres triángulos?
b) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en un vértice?
c) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en el interior del triángulo?
d) ¿En cuál se intersecan en el exterior?

Ese punto se llama **ortocentro**.

Teorema 1.7. Concurrencia de las alturas.
Las tres alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro del triángulo.

Ejercicio 1.19.
Demuestre el teorema anterior.
Considere la siguiente construcción auxiliar:
En el ΔABC, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el ΔDEF. Demuestre que las mediatrices de los lados del ΔDEF son las tres alturas del ΔABC.
Utilice las condiciones para ser paralelogramo.



Los símbolos >, >> en los segmentos están indicando paralelismo.

Clase 7 y 8. Bisectriz

Ejercicio 1.20.
Construya:
a) Dibuje el $\angle ABC$ y trace su bisectriz.
b) Marque un punto P en la bisectriz.
c) Desde P, trace segmentos que sean perpendiculares a los lados BA y BC.
d) Nombre los puntos de intersección como K y L respectivamente.

Verifique:
Compare la longitud de $\overline{KP}$ con respecto a la de $\overline{LP}$.

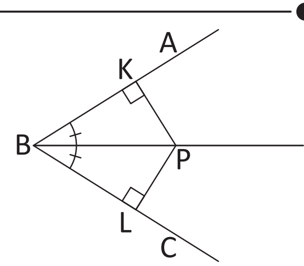
[A] Construcción

Puede trazar la bisectriz utilizando regla y compás, o haciendo uso del transportador.

El resultado anterior se cumple en el siguiente teorema:

La bisectriz de un ángulo lo divide en dos ángulos congruentes.

Teorema 1.8. Propiedad de la bisectriz de un ángulo.
El punto P está en el interior del $\angle ABC$.
P equidista de los rayos BA y BC si y sólo si el rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$.



Equidista:
P equidista de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ entonces $\overline{PK} \perp \overline{BA}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$,
Además, PK = PL.

Demostración:
Si K y L equidistan de P, entonces el rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$.

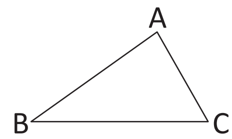
Proposición	Justificación
1. PK = PL	Hipótesis
2. $\overline{PK} \perp \overline{BA}$; $\overline{PL} \perp \overline{BC}$	Hipótesis
3. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	Congruencia del mismo segemento.
4. $\Delta BKP \cong \Delta BLP$	Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia hipotenusa-cateto de triángulos rectángulos.
5. $\angle KBP \cong \angle LBP$	Por 4 y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes.
6. Rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$	Por 5 y definición de bisectriz.

Para demostrar un teorema que involucre un "si y sólo si" deben demostrarse ambos sentidos.

Considere:
$\overline{PK} \perp \overline{BA}$,
$\overline{PL} \perp \overline{BC}$ y los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.

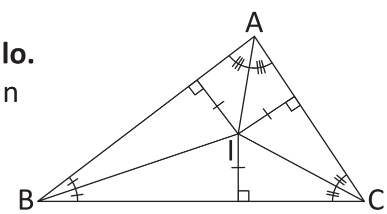
Ejercicio 1.21. Demuestre el otro sentido del teorema.
Si rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$ entonces K y L equidistan de P.

Ejercicio 1.22.
En el ΔABC,
a) Trace las bisectrices de sus ángulos.
b) ¿Coinciden las bisectrices en un punto?, si es así ¿el punto está en el interior o exterior del triángulo? Nombre el punto de intersección como I.
c) Trace desde éste, segmentos perpendiculares a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$.(Nombre esos puntos P, Q y R respectivamente).
d) Compare la medida de estos segmentos ($\overline{IP}$, $\overline{IQ}$ y $\overline{IR}$).



Esto nos lleva al siguiente teorema:

Teorema 1.9. Concurrencia de las bisectrices de un triángulo.
Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.

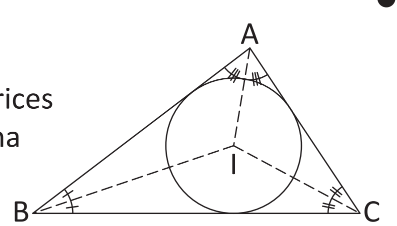


Ejercicio 1.23. Complete la demostración del teorema 1.9.
En el ΔABC, sea I el punto de intersección de las bisectrices de ∠BAC y ∠BCA.

Proposición	Justificación
1. $\overline{AI}$ es la bisectriz del ∠BAC	Hipótesis
2. ☐ es la bisectriz del ∠BCA	Hipótesis
3. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$	Por 1 y propiedad de bisectriz.
4. I equidista de $\overline{AC}$ y ☐	Por 2 y ☐
5. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$	Por 3, 4 y propiedad transitiva.
6. ☐ es la bisectriz de ☐	Por 5 y propiedad de la bisectriz.

Ejercicio 1.24. Utilizando la construcción empleada en el Ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. ¿Por qué la circunferencia es tangente a los tres lados?

Definición de Incentro
El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama Incentro.



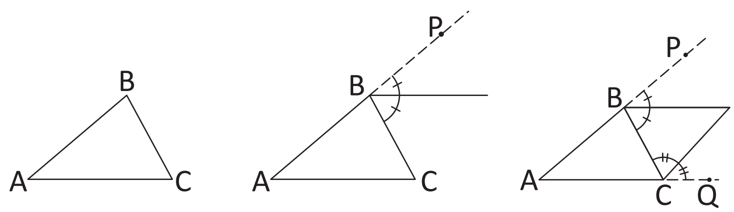
[B]

La construcción del Ejercicio 1.22 se utiliza posteriormente.

Circunferencia inscrita: Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo entonces se dice que la circunferencia está inscrita en el triángulo y el triángulo está circunscrito en la circunferencia.

Ejercicio 1.25. Realice la siguiente construcción:
Construya un triángulo equilátero y luego construya su circunferencia inscrita.

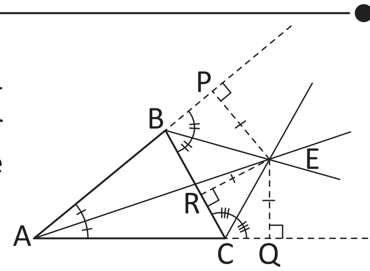
Ejercicio 1.26. Explique las construcciones realizadas en cada paso.



Conteste:
a) ¿Cómo se llaman los ángulos PBC y QCB?
b) ¿Qué son los rayos BE y CE?
c) Verifique si la bisectriz del ángulo interior ∠BAC es también concurrente en el punto E.

El punto E se llama **Excentro**.

Teorema 1.10
El punto donde se intersecan dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior en un triángulo, se llama excentro y éste equidista de los lados del triángulo.



Ejercicio 1.27. Complete la demostración. Considere en el ΔABC las bisectrices BE y CE de los ángulos exteriores ∠PBC y ∠QCB respectivamente y tome tres puntos P, Q y R tal que, $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$. Demuestre que el rayo AE es la bisectriz del ∠BAC. (Vea la figura de Teorema 1.10).

Proposición	Justificación
1. Rayo BE es la bisectriz de ∠PBC	____
2. ____ es la bisectriz de ____	Hipótesis
3. $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$	____
4. PE = RE	Por 1, 3 y propiedad de bisectriz.
5. ____	Por 2, 3 y propiedad de bisectriz.
6. PE = QE	____
7. ____ es la bisectriz de ____	____

[C]

Puede calcar las figuras y hacer las verificaciones con regla, transportador y compás.

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, se le llama bisectriz exterior.

Está es también una aplicación de la propiedad de la bisectriz.

La circunferencia inscrita en un triángulo es tangente a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos.

¿Cuántas de estas circunferencias se pueden construir en el ΔABC?

Clase 9 y 10. Baricentro

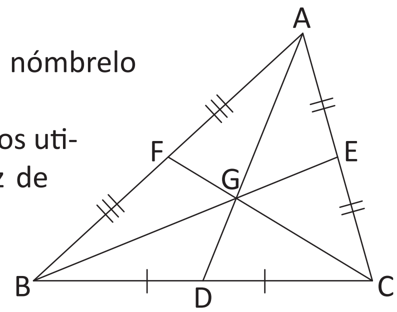
Trazar las medianas de un triángulo

Ejemplo 1.3.

a) Dibuje en el cuaderno un triángulo y nómbrelo ΔABC.

b) Encuentre los puntos medios de los lados utilizando la construcción de la mediatriz de un segmento.

c) Una los vértices con el punto medio del lado opuesto correspondiente.



Una **mediana** de un triángulo
es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene 3 medianas.

Teorema 1.11 Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

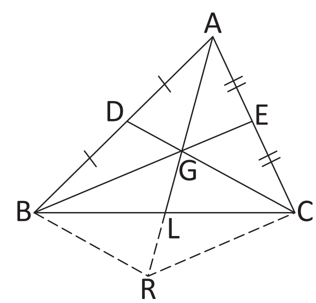
Ejemplo 1.4. Demuestre el Teorema 1.11.
Solución:
En el ΔABC, sean D y E los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente (Vea la figura de la derecha).

Proposición	Justificación
1. En el ΔABC, $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ son medianas y se cortan en G.	Construcción e hipótesis
2. Rayo AG corta a $\overline{BC}$ en L y se extiende a R tal que $\overline{AG} \cong \overline{GR}$.	Construcción
3. D es el punto medio de $\overline{AB}$.	Por 1
4. G es el punto medio de $\overline{AR}$.	Por 2
5. En el ΔABR, $\overline{DG} \parallel \overline{BR}$	Teorema de los dos puntos
6. $\overline{GC} \parallel \overline{BR}$	Por 5
7. E es punto medio de $\overline{AC}$.	Hipótesis
8. En el ΔARC, $\overline{GE} \parallel \overline{RC}$	Teorema de los dos puntos
9. $\overline{BG} \parallel \overline{RC}$	Por 8
10. BGCR es paralelogramo.	Por 6, 9 y definición de paralelogramo
11. $\overline{BL} \cong \overline{LC}$	Por 10 y la propiedad de la diagonal del paralelogramo.
12. L es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AL}$ es una mediana del ΔABC.	Por 11

[A]

Los segmentos AD, CF y BE son medianas del ΔABC.
$\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto G.

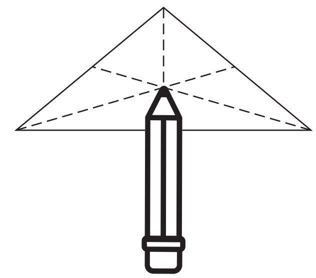
En esta demostración trazamos segmentos auxiliares como estrategia para su solución.



El punto donde se intersecan las medianas de un triángulo se llama baricentro.

Ejemplo 1.5.

a) Dibuje un triángulo escaleno grande en una cartulina y recórtelo.
b) Trace dos medianas y encuentre el Baricentro.
c) Ubique la punta del lápiz en el baricentro.
d) Comente con sus compañeros que sucedió.



Note que el triángulo se equilibró.

El baricentro es el centro de masa o centro de gravedad de un triángulo.

Ejercicio 1.28.

a) Construya un triángulo escaleno, un equilátero y un isósceles y trace las medianas utilizando regla y compás.

b) Dado el ΔABC con mediana AD perpendicular al lado BC. Demuestre que:
b1. $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$
b2. ΔABC es isósceles.

c) Demuestre que la mediana correspondiente al lado no congruente de un triángulo isósceles es perpendicular al lado y biseca al ángulo opuesto a la base.

d) Demuestre que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

e) Dados dos triángulos congruentes, la mediana de uno de los triángulos es congruente con la mediana del lado correspondiente del otro.

Ejercicio 1.29.

En el ΔABC, demuestre que si $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro entonces AG : GD = 2 : 1, BG : GE = 2 : 1, CG : GF = 2 : 1.

[B]

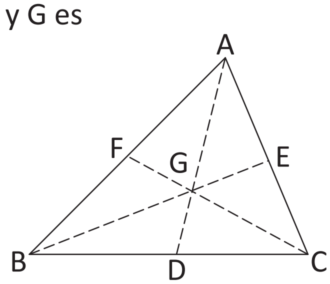
Puede utilizar como referencia la figura del Ejemplo 1.4.

En el ΔABC, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro. Se cumple que:

$AG=\frac{2}{3}$ AD ó AG = 2GD

$BG=\frac{2}{3}$ BE ó BG = 2GE

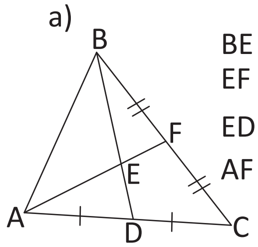
$CG=\frac{2}{3}$ CF ó CG = 2GF



Ejercicio 1.30.

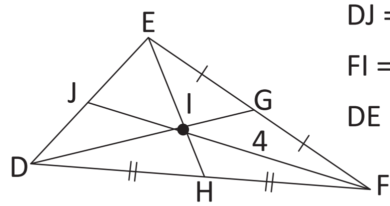
Encuentre las medidas.

a)



BE = 16
EF = 7
ED = $\boxed{}$
AF = $\boxed{}$

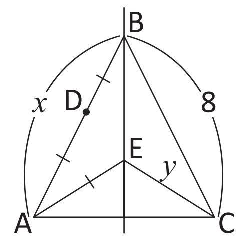
b)



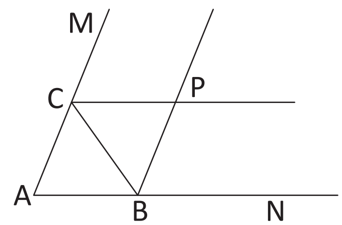
DJ = 3, JE = $\boxed{}$
FI = 4, IJ = $\boxed{}$
DE = EH, EI = $\boxed{}$

Ejercicios de la lección

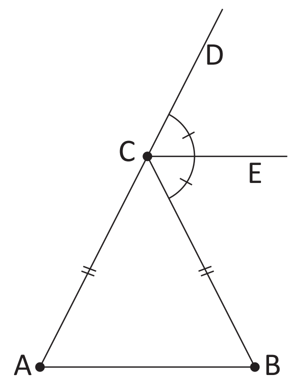
1) En la figura ΔABC es isósceles donde BA = BC, $\overline{BE}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$. Si los segmentos tienen las longitudes indicadas, halle x, y.



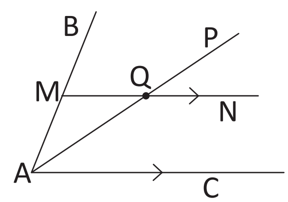
2) En el ΔABC, las bisectrices de dos ángulos externos de $\angle B$ y $\angle C$ se intersecan en P. Demuestre que la suma de la medida del ángulo BPC y la mitad de la medida del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).



3) Demuestre que en todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesta a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.

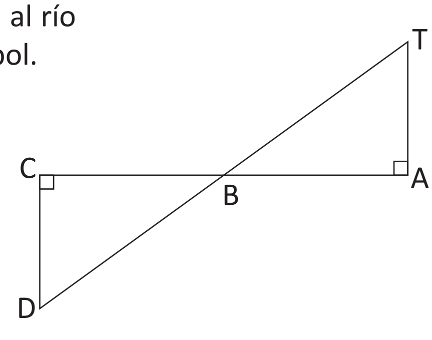


4) Demuestre que si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles. Demuestre que el triángulo MAQ es isósceles.

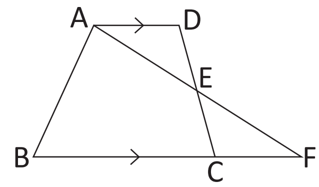


5) Dos exploradores Luis y María están parados a la orilla de un río en el punto A directamente enfrente de un árbol T que se encuentra al otro lado del rio. Ellos marcan cierta distancia a un punto B donde María permanece, sin embargo, Luis camina exactamente la misma distancia de A a B a un punto C, luego gira y camina en dirección opuesta al río hacia un punto D donde él puede ver a María alineada con el árbol. A, B y C son colineales.

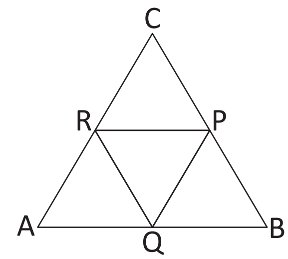
   a) Identifique la correspondencia de pares de lados y ángulos congruentes
   b) Demuestre que $\Delta ABT \cong \Delta CBD$
   c) ¿Cómo podrían ellos usar la información que se tiene para encontrar el ancho del río?



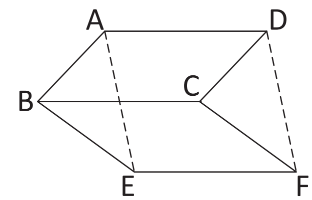
6) En la figura de la derecha $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y E es el punto medio de $\overline{CD}$. Demuestre que los triángulos ΔADE y ΔFCE son congruentes.



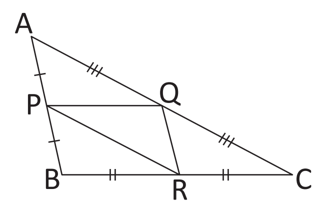
7) En la figura P, Q y R son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ΔABC. Demuestre que el triángulo ΔPQR es equilátero.



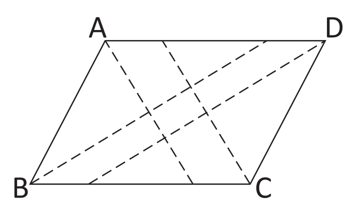
8) En la figura los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestre que el cuadrilátero AEFD también es paralelogramo.



9) Se da cualquier ΔABC y los puntos medios de los lados, P, Q y R. Demuestre que el perímetro del ΔPQR es la mitad del perímetro del ΔABC.

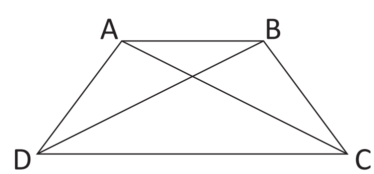


*10) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma con las bisectrices de los 4 ángulos de un paralelogramo? Demuéstrelo.



Primero demuestra que las bisectrices de ángulos opuestos del paralelogramo son paralelas entre sí.

11) Demuestre que las diagonales de un trapecio Isósceles son congruentes



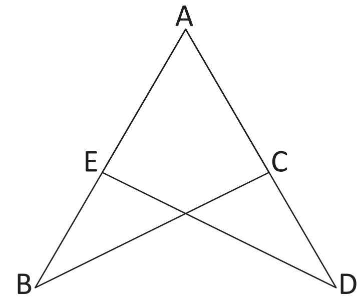
12) Para cada una de las siguientes opciones decide si la información dada es suficiente para concluir que $\Delta ABC \cong \Delta ADE$, si es así demuéstrelo.

a) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\angle B \cong \angle D$

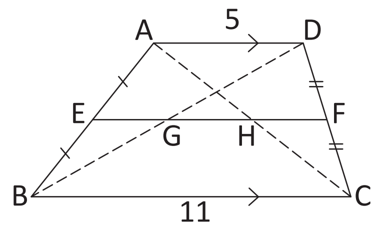
b) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

c) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{AC}$

d) $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$



13) En la figura AD || BC, AE = EB y DF = FC. Encuentre la longitud de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.



Considere la siguiente propiedad, la mediana de un trapecio es paralela a sus bases y su longitud es igual a la mitad de la suma de ellas.

Lección 2. Semejanza de Triángulos

Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

Definición de semejanza

Se dice que dos figuras son semejantes, cuando se pueden colocar en la posición como muestra la Fig. 2.1 donde

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

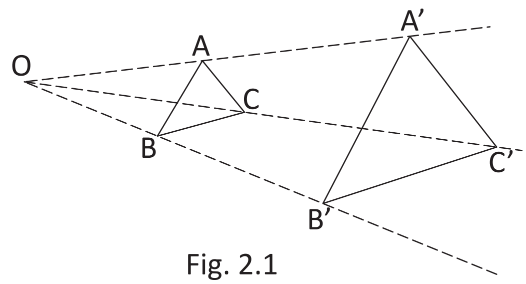


Fig. 2.1

A este valor se le denomina **razón de semejanza** entre los triángulos A’B’C’ y ABC**.**

[A]

Se puede dar la vuelta a una de estas figuras. Cada punto de las dos figuras se corresponde como los puntos A y A’, etc.

En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición de semejanza:

Los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}, \quad m\angle A = m\angle A',\ m\angle B = m\angle B',\ m\angle C = m\angle C'$$

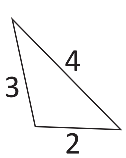
Se denota la semejanza con el signo “$\sim$”, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

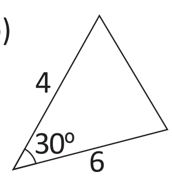
El valor de $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ coincide con la razón de semejanza entre los triángulos A’B’C’ y ABC.

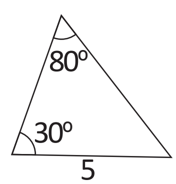
Para confirmar la semejanza de triángulos, no es necesario verificar todas las condiciones

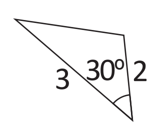
En 9no. grado se aprendió el criterio de semejanza de triángulos.

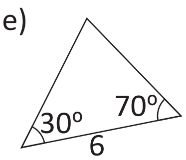
Ejemplo 2.1. Encuentre las parejas de triángulos que son semejantes y diga la condición de semejanza:

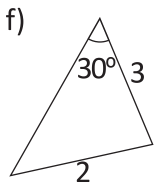
a)


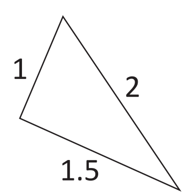
b)


c)


d)


e)


f)


g)


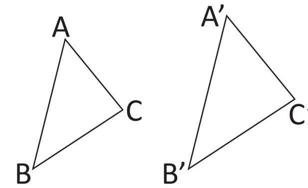
Criterio de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes cuando cumplen una de las siguientes condiciones:

a) Dos pares de lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados tienen la misma medida (LAL).

b) Dos pares de ángulos tienen la misma medida (AA).

c) Los tres lados son proporcionales (LLL).



$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

$m\angle B = m\angle B'$ (LAL)

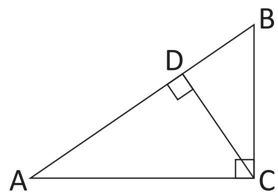
$m\angle A = m\angle A'$,
$m\angle B = m\angle B'$ (AA)

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$

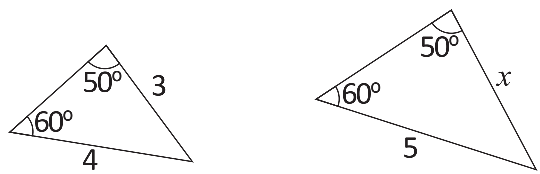
(LLL)

[B]

Ejercicio 2.1.
Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$



Ejemplo 2.2. Encuentre los valores de x

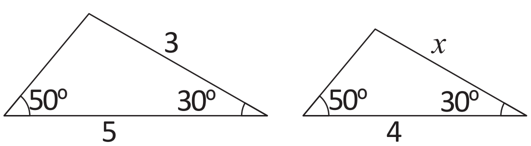


Solución: En los dos triángulos hay dos pares de ángulos iguales, por lo tanto son semejantes, así que se tiene que

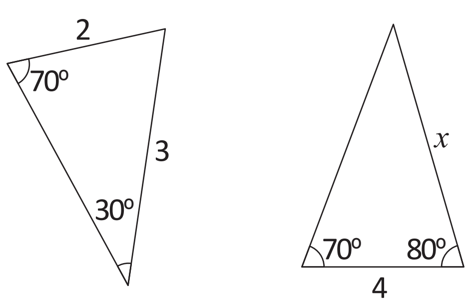
$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}\ ;\ \ x = \frac{5}{4}(3) = \frac{15}{4} \text{ (Respuesta)}$$

Ejercicio 2.2. Encuentre el valor de x.

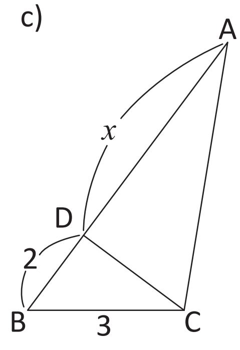
a)



b)



c)



$\angle BAC \cong \angle BCD$

Clase 2. Semejanza y razón de área

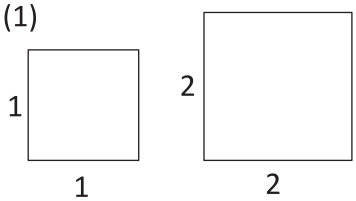
Ejemplo 2.3. En (1) y (2):

a) Encuentre la razón de semejanza entre la figura de la derecha y la de la izquierda.

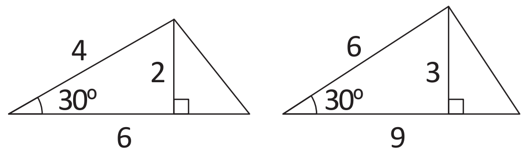
b) Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda.

c) ¿Qué observa?

(1)



(2)



Solución: a) (1) $\frac{2}{1} = 2$ (2) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) (1) $\frac{2^2}{1^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ (2) $\frac{\frac{1}{2}(9)(3)}{\frac{1}{2}(6)(2)} = \left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

c) La razón de área = (La razón de semejanza)^2

La relación de arriba se aplica a cualquier figura.

En (2) si k es la razón de semejanza,

$k = \frac{9}{6} = \frac{6}{4}$

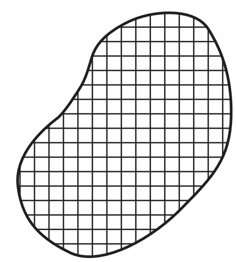
$9 = 6k$; $6 = 4k$; $3 = 2k$

El área del triángulo de derecho

$= \frac{1}{2}(9)(3) = \frac{1}{2}(6k)(2k)$

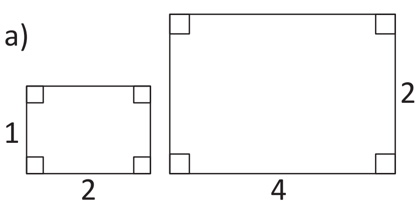
= (El de izquierdo) x (k^2)

Es porque se puede evaluar el área por conjunto de cuadrados con cualquier exactitud.

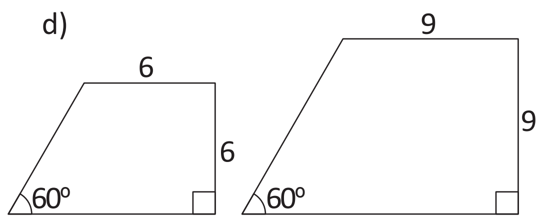


Ejercicio 2.3. Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda. En cada caso las dos figuras son semejantes.

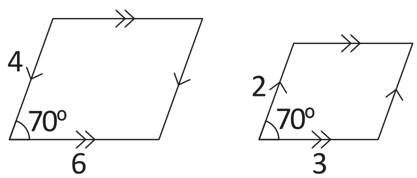
a)



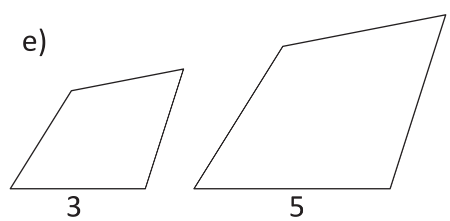
d)



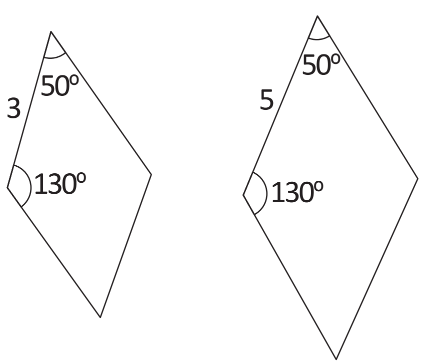
b)



e)



c)

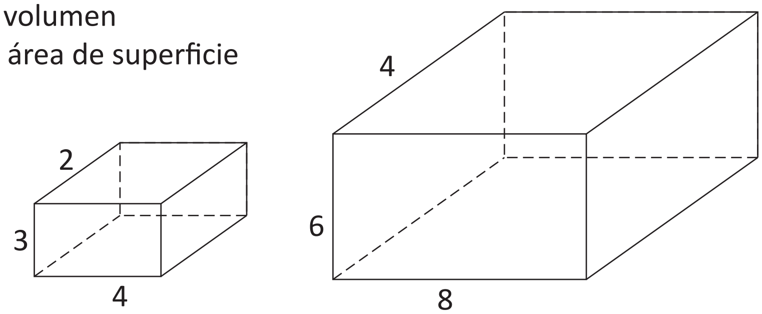


Clase 3. Semejanza y razón de volumen y área de superficie

Ejemplo 2.4.

Encuentre las siguientes razones entre el paralelepípedo rectangular de la derecha y el de la izquierda,

a) De semejanza
b) De volumen
c) Del área de superficie



El volumen del paralelepípedo rectangular es (largo) x (ancho) x (altura)

Solución: a) $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{8(4)(6)}{4(2)(3)} = \frac{8}{4}\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right) = 2^3 = 8$

c) La razón de área de cada cara = (La razón de semejanza)^2 = 2^2 = 4
Por lo tanto, la razón de área de superficie es 4

La razón de arriba se aplica a todos los sólidos

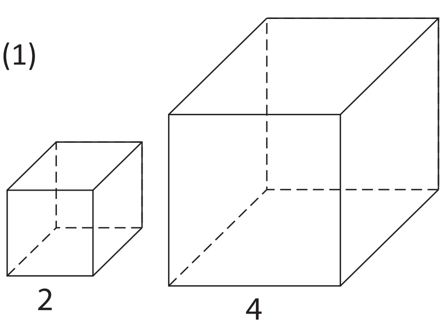
La razón de volumen = (la razón de semejanza)^3
La razón de área de superficie = (La razón de semejanza)^2

Ejercicio 2.4.

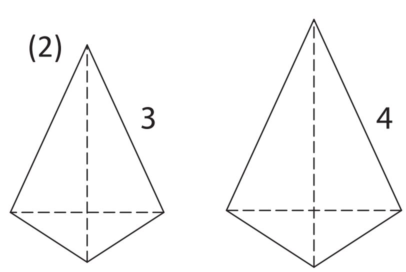
a) Encuentre la razón de volumen entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.
b) Encuentre la razón del área de superficie entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.

En cada caso los sólidos son semejantes

(1)



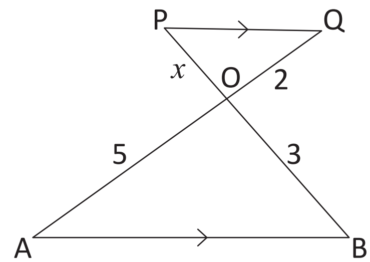
(2)



Ejercicios de la lección

1) En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$.

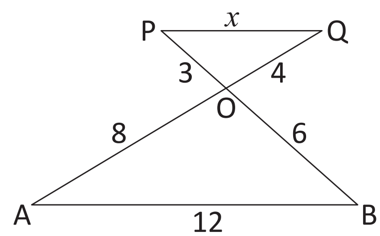
Clase 1



a) Demuestre que $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.
b) Encuentre el valor de x.

2) En la figura

Clase 1

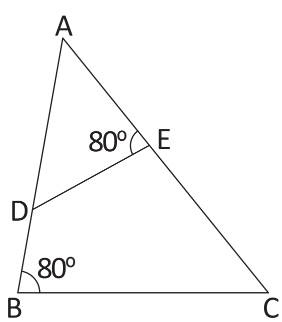


a) Demuestre que $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.
b) Encuentre el valor de x.

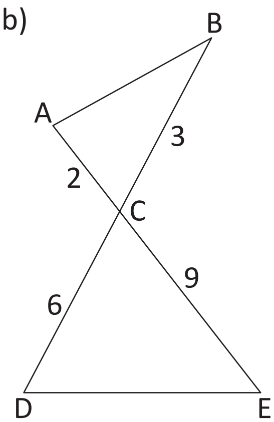
3) En cada uno de los dibujos, indique los triángulos semejantes y el criterio de semejanza utilizado.

Clase 1

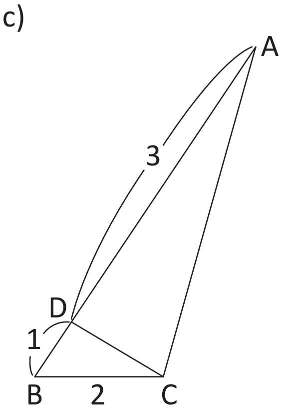
a)



b)



c)



Matemáticas III

Unidad II

Geometría analítica

- Lección 1: Parábola
- Lección 2: Circunferencia
- Lección 3: Elipse
- Lección 4: Hipérbola

Algo de historia

Apolonio de Perga
(c. 260 a.c. – c. 200 a.c.)

Apolonio fue un matemático griego. Nació en Perga y falleció en Alejandría. Conocido por su obra “Las cónicas”, en que estudió las curvas que se obtienen como una intersección entre la superficie lateral del cono recto que se extiende infinitamente en ambos lados del vértice y un plano.

Introdujo los términos parábola, elipse e hipérbola. Creó los cimientos de la geometría analítica a través de la elaboración de 8 libros titulado Tratado de las cónicas, muestran como una cónica puede dibujarse desde un punto, propone proposiciones donde se determina el centro y la curvatura lo que conduce a la ecuación cartesiana del desarrollo y la evolución.

Apolonio también es conocido por su aporte en el descubrimiento de la aproximación del número pi, así como sus contribuciones en otras áreas como la astronomóa, la invención del reloj solar entre otros.

Apolonio falleció alrededor de 190 a.C. en Alejandría, Egipto.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Parábola

Clase 1. Ecuación de la parábola

Definición de parábola
Una parábola es el conjunto de puntos P en el plano que distan lo mismo de un punto fijo F y una recta fija l.

Al punto F se le denomina **foco** y a la recta $\boldsymbol{l}$ **directriz**.

Ecuación de parábola
La ecuación de la parábola con el foco F(0, p) y la directriz $l : y = -p$ es:

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Como las distancias son iguales se tiene:

$$d(\text{P, F}) = d(\text{P, D})$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$$

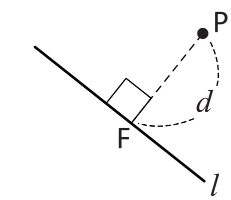
$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 - 4yp = 0$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

La Figura 1.1 muestra una parábola. Al eje y se le denomina eje de simetría y al punto (0, 0) se le denomina vértice.

Distancia d entre P y l



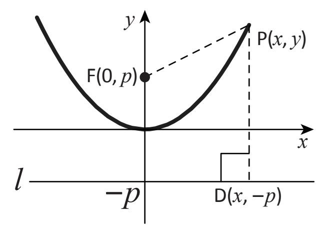


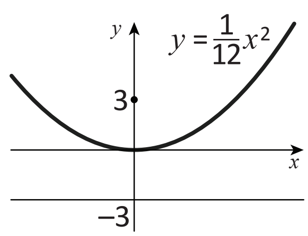
Fig. 1.1

Si A ≥ 0 y B ≥ 0, entonces
A = B ⇔ $A^2 = B^2$

Otra demostración:
El punto P(x, y) está en la parábola

$\Leftrightarrow |y-(-p)|$
$= \sqrt{x^2+(y-p)^2}$
$\Leftrightarrow |y+p|^2 = x^2 + (y-p)^2$
$\Leftrightarrow y^2 + 2py + p^2$
$= x^2 + y^2 - 2py + p^2$
$\Leftrightarrow 4py = x^2$
$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2$

Ejemplo 1.1. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es (0, 3) y cuya directriz es $y = -3$. Dibuje la gráfica.

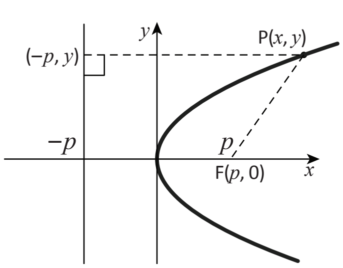


Solución: En la fórmula o ecuación se sustituye $p = 3$ y se obtiene:

$$y = \frac{1}{12}x^2$$

Ejercicio 1.1. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es F y cuya directriz es l. Dibuje la gráfica.

a) F(0, 1), $l : y = -1$ b) F(0, 4), $l : y = -4$
c) F(0, −3), $l : y = 3$ d) F(0, −2), $l : y = 2$

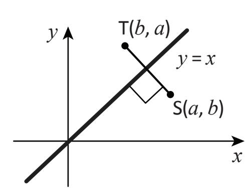


* Tomando la simetría de la Fig. 1.1, con respecto a la recta $y = x$ se obtiene otra parábola con:

foco (p, 0), directriz $x = -p$

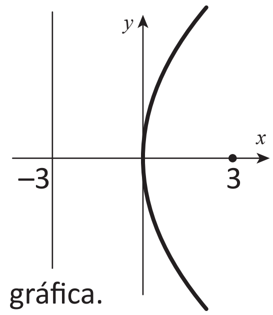
vértice (0, 0), eje y = 0 cuya ecuación es: $x = \frac{1}{4p}y^2$

El punto T que es simétrico al punto S(a, b) con respecto a la recta $y = x$ es T(b, a)



*** Ejemplo 1.2.** Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es (3, 0) y cuya directriz es $x = -3$. Dibuje la gráfica.

Solución: $x = \frac{1}{12}y^2$



*** Ejercicio 1.2.** Encuentre la ecuación de la parábola cuyo foco es F y cuyo vértice es l. Dibuje la gráfica.

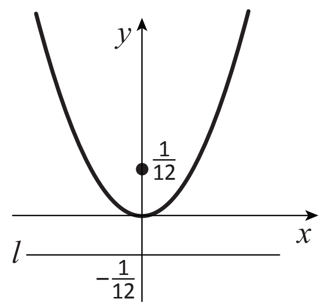
a) F(1, 0), $l : x = -1$ b) F($-\frac{1}{2}$, 0), $l : x = \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.3. Encuentre el foco F, la directriz l, el vértice V y el eje de la parábola $y = 3x^2$. Dibuje gráfica.

Solución: Comparando $y = 3x^2$ con $y = \frac{1}{4p}x^2$,

se tiene que: $3 = \frac{1}{4p}$, luego $p = \frac{1}{12}$

F = $(0, \frac{1}{12})$, $l : y = -\frac{1}{12}$, V(0, 0), eje $x = 0$



Generalmente, comparando $y = ax^2$ y $y = \frac{1}{4p}x^2$, se tiene que

$$\boxed{a = \frac{1}{4p}}$$

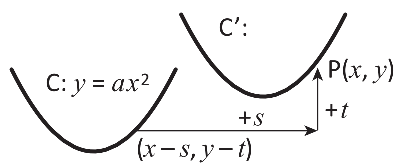
Luego $p = \frac{1}{4a}$.

Ejercicio 1.3. Encuentre el foco F, la directriz l, vértice V y el eje. Dibuje gráfica.

a) $y = \frac{1}{12}x^2$ b) $y = -3x^2$ *c) $x = \frac{1}{8}y^2$ *d) $x = -y^2$

Clase 2. Desplazamiento paralelo

Se desplaza paralelamente la parábola C: $y = ax^2$, s hacia el eje x y t hacia el eje y y se obtiene la parábola C'.



P(x, y) ∈ C' ⇔ ($x - s$, $y - t$) ∈ C

⇔ $y - t = a(x - s)^2$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

Desplazamiento paralelo

$$\text{C: } y = ax^2 \longrightarrow \frac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y} \longrightarrow \text{C': } y - t = a(x - s)^2$$

Ejemplo 1.4. Encuentre la ecuación de la parábola obtenida después de desplazar la parábola $y = 2x^2$, 3 hacia el eje x y −1 hacia el eje y.

Se puede desarrollar: $y = 2x^2 - 12x + 17$.

Solución: $y - (-1) = 2(x - 3)^2$, $y = 2(x - 3)^2 - 1$

Ejercicio 1.4. Encuentre la ecuación de la parábola obtenida después del desplazamiento indicado:

a) $y = x^2$; 2 hacia el eje x, 1 hacia el eje y
b) $y = 3x^2$; -4 hacia el eje x, -2 hacia el eje y
c) $y = -3x^2$; 3 hacia el eje x, 2 hacia el eje y
d) $y = -x^2$; -1 hacia el eje x, 3 hacia el eje y

Generalmente, si se representa la ecuación de la figura C en la forma $F(x, y) = 0$, la fórmula anterior tiene la siguiente forma:

Desplazamiento paralelo (forma general)

$$\text{C: } F(x, y) = 0 \longrightarrow \frac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y} \longrightarrow \text{C´: } F(x - s, y - t) = 0$$

En el caso de la parábola $y = ax^2$, puede ser $F(x, y) = ax^2 - y$.
La demostración anterior se aplica a este caso general.

Clase 3. Completación de cuadrados

De la fórmula de factorización: $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$, se obtiene la siguiente fórmula de completación de cuadrados.

Ya se aplicó esta técnica en la deducción de la fórmula cuadrática. (Matemática I)

Completación de cuadrados

$$x^2 + ax = x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

Ejemplo 1.5. Complete cuadrados. a) $x^2 + 6x$ b) $x^2 - 8x$

Solución: a) $x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9$
b) $x^2 - 8x = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2 = (x - 4)^2 - 16$

Ejercicio 1.5. Complete cuadrados.

a) $x^2 + 8x$ b) $x^2 + 4x$ c) $x^2 - 6x$ d) $x^2 - 2x$

Ejemplo 1.6. Complete cuadrados: $x^2 + 6x + 1$

Solución: $\underline{x^2 + 6x} + 1 = \underline{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^3 - 3^3} + 1$
$= (x + 3)^2 - 9 + 1$
$= (x + 3)^2 - 8$

Primero transforme los términos que contienen x.

Ejercicio 1.6. Complete cuadrados.

a) $x^2 + 8x + 2$ b) $x^2 + 4x - 5$ c) $x^2 - 6x + 1$ d) $x^2 - 2x - 7$

Ejemplo 1.7. Complete cuadrados: $3x^2 + 12x + 5$

Solución: $3x^2 + 12x + 5 = 3(x^2 + 4x) + 5 = 3\{x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2\} + 5$
$= 3\{(x + 2)^2 - 4\} + 5$
$= 3(x + 2)^2 - 12 + 5$
$= 3(x + 2)^2 - 7$

Se recomienda que no se abrevie el proceso para evitar errores, sobre todo cuando el coeficiente de x^2 es negativo.

Ejercicio 1.7. Complete cuadrados.

a) $3x^2 + 6x + 4$ b) $2x^2 - 8x + 1$ c) $5x^2 - 20x + 4$ d) $-3x^2 + 12x - 1$

e) $-2x^2 + 4x - 3$ f) $-5x^2 - 10x + 3$ g) $-x^2 - 4x + 3$ h) $-x^2 + 6x + 1$

*** Ejemplo 1.8.** Complete cuadrados: a) $x^2 + 3x + 1$ b) $3x^2 - 4x + 1$

Solución:

a) $$x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

b) $$3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 1 = 3\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} + 1 = 3\left\{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right\} + 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

*** Ejercicio 1.8.** Complete cuadrados.

a) $x^2 + 5x - 2$ b) $-x^2 + x + 1$ c) $5x^2 - 2x + 1$

d) $-3x^2 + 8x + 1$ e) $3x^2 + 5x - 4$ f) $-2x^2 + 3x + 7$

Clase 4. Encontrar desplazamiento

Ejemplo 1.9. Encuentre el desplazamiento que traslada

C: $y = x^2$ a C': $y = x^2 - 6x + 10$.

Solución: Completando cuadrados

$$y = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 + 1, \quad y - 1 = (x - 3)^2$$

Por lo tanto, se obtiene C' al desplazar C

3 hacia el eje x y 1 hacia el eje y.

Compare con la fórmula de la Clase 2.

Ejercicio 1.9. Encuentre el desplazamiento que traslada C a C'

a) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 - 4x + 5$ b) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 + 4x + 10$

c) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 + 6x + 1$ d) C: $y = x^2$, C': $y = x^2 - 8x + 2$

e) C: $y = -x^2$, C': $y = -x^2 - 4x + 3$ f) C: $y = -x^2$, C': $y = -x^2 + 6x - 10$

g) C: $y = -3x^2$, C': $y = -3x^2 - 6x + 4$ h) C: $y = -5x^2$, C': $y = -5x^2 - 20x + 3$

De esos cálculos se ve lo siguiente:

Se puede poner la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sobre la parábola $y = a'x^2 + b'x + c'$ por un desplazamiento paralelo $\Leftrightarrow a = a'$.

Demostración: La primera se obtiene desplazamiento

$y = ax^2$ y la segunda $y = a'x^2$

Clase 5. Componentes de parábolas

Ejemplo 1.10. Encuentre el vértice, el eje, el foco y la directriz de la parábola

$$y = x^2 - 4x + 9.$$

Solución: Se obtiene la parábola $y = x^2 - 4x + 9$ desplazando $y = x^2$.

Comparado $y = x^2$ con $y = \frac{1}{4p}x^2$, se tiene que $1 = \frac{1}{4p}$,

luego $p = \frac{1}{4}$.

Por otra parte,

$y = x^2 - 4x + 9 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 9 = (x-2)^2 - 4 + 9 = (x-2)^2 + 5$

Desplazar 2 hacia el eje x y 5 hacia el eje y.

	$y = x^2$	$y = (x-2)^2 + 5$
Vértice	(0, 0)	(2, 5)
Eje	$x = 0$	$x = 2$
Foco	$(0, \frac{1}{4})$	$(2, \frac{21}{4})$
Directriz	$y = -\frac{1}{4}$	$y = \frac{19}{4}$

Ejercicio 1.10. Encuentre vértice (V), el eje E, el foco (F) y la directriz (D).

a) $y = x^2 + 6x + 12$ b) $y = x^2 + 4x + 1$ c) $y = x^2 - 6x + 1$

d) $y = 2x^2 + 4x - 3$ e) $y = 3x^2 - 12x + 4$ f) $y = -x^2 + 6x + 3$

g) $y = -2x^2 - 8x + 3$ h) $y = -3x^2 + 6x$ *i) $y = x^2 - 3x + 1$

Si el foco y la directriz de la parábola C: $y = ax^2$ son $(0, p)$ y $y = -p$ respectivamente, entonces la ecuación de C tiene la forma $y = \frac{1}{4p}x^2$. Por lo tanto, se tiene que $a = \frac{1}{4p}$, luego $p = \frac{1}{4a}$.

Trasladando C, s hacia el eje x, t hacia el eje y, se tiene lo siguiente:

	C: $y = ax^2$	C´: $y = a(x-s)^2 + t$
Vértice	(0, 0)	(s, t)
Eje	$x = 0$	$x = s$
Foco	$(0, \frac{1}{4a})$	$(s, \frac{1}{4a} + t)$
Directriz	$y = -\frac{1}{4a}$	$y = -\frac{1}{4a} + t$

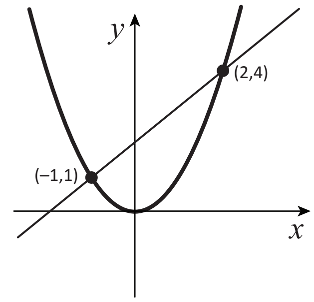
Clase 6. Parábola y recta

Ejemplo 1.11. Encuentre los puntos comunes de $y = x^2$ y $y = x + 2$.
Solución:

$$\begin{cases} y = x^2 & \ldots(1) \\ y = x + 2 & \ldots.(2) \end{cases}$$ De (1) y (2) se obtiene:

$x^2 = x + 2$, $\quad x^2 - x - 2 = 0$, $\quad (x - 2)(x + 1) = 0$
$x = 2$, $x = -1$. Sustituyendo el valor de x en (2),
cuando $x = 2$, $\quad y = 2 + 2 = 4$ $\quad$ y
cuando $x = -1$ $\quad y = -1 + 2 = 1$ $\quad$ Respuesta: (2, 4) y (–1, 1)

Las coordenadas del punto común es la solución del sistema de ecuaciones. (Matemática I Unidad IV)



Ejercicio 1.11. Encuentre puntos comunes si existen.

a) $y = x^2$, $\quad y = -x + 2$
b) $y = x^2 - x$, $\quad y = 3x - 3$
c) $y = -x^2 + 1$, $\quad y = x - 5$
d) $y = -2x^2 + 3$, $\quad y = -x$
e) $y = x^2 - x$, $\quad y = 3x - 4$
f) $y = x^2$, $\quad y = x - 1$

*** Ejemplo 1.12.** Determine el valor de b de modo que $y = x^2$ y $y = 2x + b$ tengan un solo punto común.
Solución:

$$\begin{cases} y = x^2 & \ldots(1) \\ y = 2x + b & \ldots.(2) \end{cases}$$ De (1) y (2) se obtiene:

$x^2 = 2x + b$, $\quad x^2 - 2x - b = 0$ $\quad \ldots (3)$
La condición equivale a que (3) tiene una única solución real, lo que significa que el discriminante D de (3) es 0.

$$D = (-2)^2 - 4\,(1)(-b) = 4 + 4b = 4(1 + b)$$

Como $D = 0$, entonce $b = -1$.

Cuando una recta no paralela al eje de la parábola tiene un único punto común con la parábola, se dice que la recta es tangente a la parábola.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ tiene una única solución $\Leftrightarrow$ el discriminante $b^2 - 4ac = 0$.

*** Ejercicio 1.12.** Determine el valor de b de modo que la parábola y la recta tengan solo un punto común.

a) $y = x^2$, $\quad y = -2x + b$
b) $y = x^2 - x$, $\quad y = 3x + b$
c) $y = -x^2$, $\quad y = 6x + b$
d) $y = -4x^2 - 3x$, $\quad y = x + b$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene el foco F y la directriz l siguientes: Clase 1

   a) $F(0, \frac{1}{2})$, $l: y = -\frac{1}{2}$

   b) $F(0, -3)$, $l: y = 3$

2. Encuentre el foco y la directriz. Clase 1

   a) $y = 2x^2$ b) $y = 5x^2$

   c) $y = -x^2$ d) $y = -\frac{3}{5}x^2$

3. Encuentre la ecuación de la parábola obtenida después del desplazamiento indicado. Clase 2

   a) $y = \frac{1}{2}x^2$; 1 hacia el eje x, -1 hacia el eje y

   b) $y = -\frac{3}{2}x^2$; $-\frac{1}{2}$ hacia el eje x, $\frac{1}{3}$ hacia el eje y

4. Complete cuadrados. Clase 3

   a) $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

   b) $-3x^2 + 2x - 1$

5. Encuentre el desplazamiento que traslada C a C'. Clase 4

   a) C: $y = x^2 - 4x + 3$, C': $y = x^2 + 2x + 3$

   b) C: $y = -x^2 - 6x + 1$, C': $y = -x^2 + 4x - 3$

   c) C: $y = -2x^2 + 6x - 2$, C': $y = -2x^2 + x$

6. Encuentre el vértice (V), el eje (E), el foco (F) y la directriz (D). Clase 5

   a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

   b) $y = 2x^2 + x - 1$

7. Encuentre los puntos comunes. Clase 6

   a) $y = 2x^2 + 3x$, $y = 2x + 1$

   b) $y = -6x^2 - 3x + 2$, $y = 4x - 1$

Lección 2. Cincunferencias

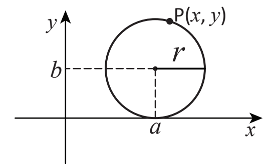
Clase 1. Ecuación de circunferencia

Definición Circunferencia
La circunferencia con el centro C y el radio r es el conjunto de puntos en el mismo plano que C, que distan r del punto C.

Ecuación de Circunferencia
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ centro: C(a, b), radio: r

Demostración: P(x, y) está en la circunferencia $\Leftrightarrow$ PC = r

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



La distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Ejemplo 2.1. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (2, 3) y el radio 4.

Solución: $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$, $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ (Respuesta)

Si $A \geq 0$ y $B \geq 0$, entonces $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

Ejercicio 2.1. Encuentre la ecuación de la circunferencia con el centro C y el radio r.

a) C(4, 1), $r = 2$ b) C(−5, 2), $r = 1$ c) C(−2, −1), $r = 2$ d) C(0, 0), $r = 4$

Ejemplo 2.2. Encuentre el centro y el radio de $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.
Solución: Expresando la ecuación en forma de $(x-3)^2+\{y-(-4)\}^2=5^2$
el centro: (3, – 4), el radio: 5.

Ejercicio 2.2. Encuentre el centro (C) y el radio (r).

a) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ b) $(x-3)^2+(y+2)^2=16$
c) $(x+4)^2+y^2=1$ d) $(x+2)^2+(y+3)^2=5$

Complete cuadrados.

Ejemplo 2.3. Encuentre la figura representada por la ecuación:

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-6x-2y+6 &= 0\\
(x^2-6x)+(y^2-2y)+6 &= 0\\
(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2)+(y^2-2\cdot 1\cdot y+1^2-1^2)+6 &= 0\\
(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+6 &= 0\\
(x-3)^2+(y-1)^2 &= 4\\
(x-3)^2+(y-1)^2 &= 2^2
\end{aligned}$$

Respuesta: La figura es una circunferencia con centro (3, 1) y radio 2.

Ejercicio 2.3. Encuentre la figura representada por cada ecuación.

a) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ b) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$
c) $x^2+y^2+4y+3=0$ d) $x^2+y^2+10x+6y+30=0$
*e) $x^2+y^2-6x+2y+10=0$ *f) $x^2+y^2+4x-8y+21=0$

*** Ejercicio 2.4.**

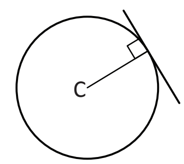
a) Determine el valor k de modo que $x^2 + y^2 - 6x + 2y + k = 0$ represente una circunferencia con el radio 4.

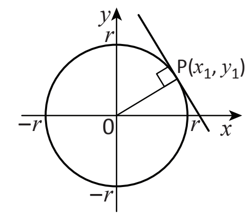
b) Determine el valor de s, t y k de modo que $x^2 + y^2 + sx + ty + k = 0$ represente la circunferencia con el centro (2, −1) y el radio 3.

Clase 2. Tangente a la circunferencia

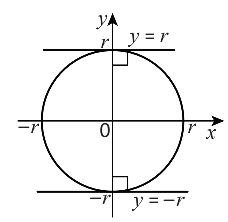
La tangente a una circunferencia
Es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

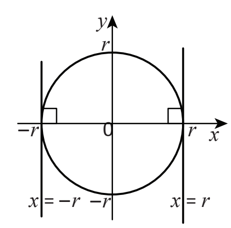
La tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con el punto de tangencia P(x_1, y_1) es $\quad x_1 x + y_1 y = r^2$





Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de las pendientes es igual a −1.





Demostración:

Caso 1. Cuando $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$. La pendiente de la recta OP es $\dfrac{y_1}{x_1}$.
Sea a la pendiente de la tangente.
Como la tangente es perpendicular a la recta OP, se tiene que:

$$a\frac{y_1}{x_1} = -1\,, \qquad a = -\frac{x_1}{y_1}\,.$$

Por otra parte, la tangente pasa por el punto P(x_1, y_1).

Por lo tanto, se tiene que: $\quad y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$.

Multiplicando por y_1; queda: $\quad x_1 x + y_1 y = r^2$.

Caso 2. Cuando $x_1 = 0$ se tiene que $y_1 = r$ o $-r$ y P es A$(0, r)$ o B$(0, -r)$,
luego la tangente es $y = r$ o $y = -r$.
Multiplicando y_1, se tiene que $y_1 y = r^2$
Como $x_1 = 0$, se tiene que $x_1 x + y_1 y = r^2$

Caso 3. Cuando $y_1 = 0$.
Se puede tratar de manera similar al Caso 2.

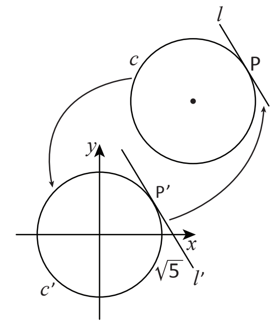
Ejemplo 2.4. Encuentre la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en el punto (2, 1).

Solución: $2x + 1y = 5, \quad 2x + y = 5$

Ejercicio 2.5. Encuentre la tangente en el punto indicado.

a) $x^2 + y^2 = 13$, (3, 2)
b) $x^2 + y^2 = 10$, (−1, 3)
c) $x^2 + y^2 = 20$, (2, −4)
d) $x^2 + y^2 = 2$, (−1, 1)
e) $x^2 + y^2 = 4$, (−2, 0)
f) $x^2 + y^2 = 9$, (0, −3)

*** Ejemplo 2.5.** Encuentre la tangente en el punto P(4, 6) a la circunferencia $(x-3)^2+(y-4)^2=5$.



Solución:

Paso 1: Se traslada la circunferencia –3 hacia el eje x y –4 hacia el eje y.
Se obtiene la circunferencia C': $x^2+y^2=5$
y el punto P se traslada al punto P'(1, 2)... (4 –3, 6 –4).

Paso 2. La tangente l' en P' a C' es
$1x+2y=5$, $\quad x+2y=5$.

Paso 3. Se traslada l' 3 hacia el eje x y 4 hacia el eje y.
Se obtiene
$(x-3)+2(y-4)=5$, $\quad x+2y-16=0$ (Respuesta)

*** Ejercicio 2.6.** Encuentre la tangente en el punto P.

a) $(x+3)^2+(y-1)^2=13$, P(–5, 4)
b) $x^2+y^2-4x+6y+3=0$, P(5, –2)

Clase 3. Circunferencia y recta

Ejemplo 2.6. Encuentre los puntos comunes de
$x^2+y^2=5$ y $3x+y-5=0$

Véase Ejemplo 1.12

Solución: Las coordenadas de los puntos comunes son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \ldots(1) \\ 3x+y-5=0 & \ldots(2) \end{cases}$$

De (2) se tiene que $y=-3x+5$ ... (3)
Sustituyendo (3) en (1)
$x^2+(-3x+5)^2=5$, $\quad 10x^2-30x+20=0$
$x^2-3x+2=0$, $\quad (x-1)(x-2)=0$, $\quad x=1, x=2$
Sustituyendo los valores de x en (3),
Cuando $x=1$, $\quad y=2$
Cuando $x=2$, $\quad y=-1$
Respuesta (1, 2) y (2, –1)

Ejercicio 2.7. Encuentre los puntos comunes.

a) $x^2+y^2=10$, $\quad 2x-y-5=0$
b) $x^2+y^2=5$, $\quad x+3y+5=0$
c) $x^2+y^2=13$, $\quad 5x-y-13=0$
d) $x^2+y^2=25$, $\quad 4x-3y+25=0$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la figura de cada ecuación. Clase 1
   a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ b) $x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 5x - 3y + 6 = 0$
2. Encuentre la tangente en el punto P. Clase 2
   a) $x^2 + y^2 = 1$, $P(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ b) $x^2 + y^2 = 4$, $P(-\sqrt{3}, 1)$
   c) $x^2 + y^2 = 9$, $P(2, -\sqrt{5})$
3. Encuentre los puntos comunes. Clase 3
   a) $x^2 + y^2 = 17$, $5x + 3y - 17 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 26$, $2x + 3y - 13 = 0$

Problemas de la Lección 1

1. Encuentre el desplazamiento paralelo que traslada C a C'. Clase 1.4
   a) C: $y = x^2 - x + 1$, C': $y = x^2 + 3x + 5$
   b) C: $y = -2x^2 + 2x - 1$, C': $y = -2x^2 - 3x$
2. Encuentre los puntos comunes. Clase 1.6
   a) $y = 2x^2 + x - 3$, $y = -x^2 + 6x - 1$ b) $y = 3x^2 - 2x + 1$, $y = x^2 - 3x + 4$
3. Encuentre la parábola obtenida desplazando C y cuyo vértice es V. Clase 1.5
   a) C: $y = x^2$, V: (3, 2) b) C: $y = -2x^2$, V: (–3, –4)
4. Encuentre la parábola obtenida después del desplazamiento indicado de la parábola C. Clase 1.2
   a) C: $y = 2(x - 1)^2 - 4$; 3 hacia el eje x, – 2 hacia el eje y
   b) C: $y = -x^2 + 3x + 1$; – 2 hacia el eje x, 1 hacia el eje y
5. Encuentre los puntos comunes. Clase 2.3
   a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$, $2x - y + 2 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$, $x + 5y - 10 = 0$
6. Determine el valor de k de modo que el eje x esté tangente a $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ Clase 2.1

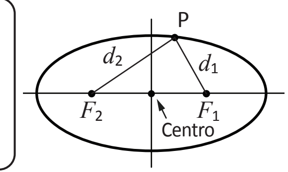
Problemas de la Lección 2

1. Determine el valor de a de modo que la recta $y = ax - 9$ esté tangente a la parábola $y = x^2$. Clase 1.6
2. Encuentre las tangentes de $x^2 + y^2 = 5$ cuya pendiente es 2. Clase 2.2
3. Demuestre que la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ de la circunferencia C: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ es $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ Clase 2.2
4. Encuentre la(s) tangente(s) de $x^2 + y^2 = 5$ que pasan por el punto (3, 4) considerando lo siguiente: Clase 2.2
   a) Sea $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia. Exprese la tangente con x_1 y y_1.
   b) Utilice el hecho de que el punto P está en la tangente en a) y obtenga una ecuación de x_1 y y_1.
   c) Utilice el hecho de que el punto (x_1, y_1) está en la circunferencia y obtenga una ecuación de x_1 y y_1.
   d) Resuelva el sistema de ecuaciones en x_1 y y_1.
   e) Exprese la(s) tangente(s).

Lección 3. Elipse

Clase 1 y 2. Ecuación de la elipse

Definición 3.1
Una elipse es el conjunto de puntos P(x, y) en un plano, tales que la suma de las distancias de P, a dos puntos fijos (F_1 y F_2) es constante.



[A]

P es un punto de la elipse.
d_1 y d_2 son las distancias de P a F_1 y F_2 respectivamente.

A los puntos fijos F_1 y F_2 se les llama focos.
El punto medio del segmento que une F_1 y F_2 se le denomina centro de la elipse.

Ecuación de la elipse
La ecuación de una elipse con centro en el origen (0, 0) es
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ donde $a > b > 0$.

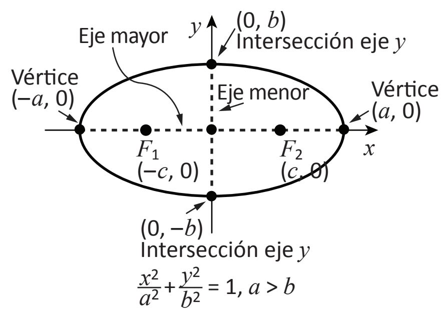


Fig. 1

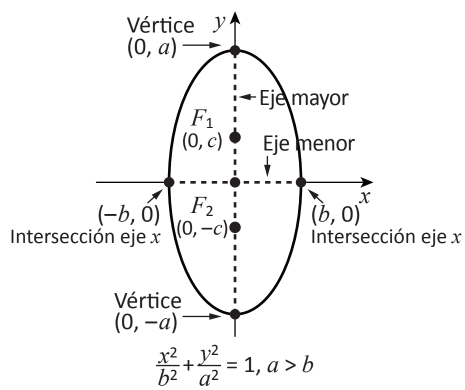
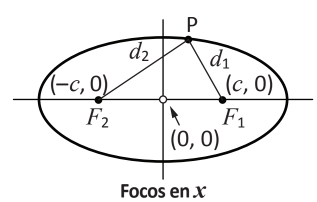


Fig. 2

Eje mayor: Es el segmento cuyos extremos son los vértices de la elipse, pasa por el centro y continen los focos.
Eje menor: Es el segmento que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor.

En una elipse con centro en el origen, la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una misma distancia c del origen donde se define que $c^2 = a^2 - b^2$



Demostración de la ecuación.
Para demostrar la ecuación de la elipse, se tomará el eje x como eje mayor.
Sea $m = 2a$ y los focos en x con coordenadas F_1 ($-c$, 0), F_2 (c, 0).
d_1 y d_2 son las distancias de F_1 a P y F_2 a P respectivamente.
P es un punto en la elipse, por definición: $d_1 + d_2 = m$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \text{Elevando ambas al cuadrado}$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$4cx = 4\left(a^2 - a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

La distancia entre dos puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2) es

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \qquad \text{Elevando al cuadrado}$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Se define que $c^2 = a^2 - b^2$, es decir $b^2 = a^2 - c^2$. Por lo tanto,

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \qquad \text{Ambos lados divididos entre } a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Se sustituye $b^2 = a^2 - c^2$ para obtener

$$a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$$

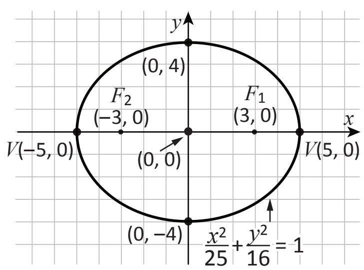
Ejemplo 3.1. Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son (3, 0) y (– 3, 0) y con vértices en (– 5, 0) y (5, 0). Dibuje la elipse.

Solución: Como los focos y los vértices están dados en el eje x, entonces el eje mayor está en x.
Los focos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ entonces como $c > 0$, $c = 3 \rightarrow c^2 = 9$
Los vértices V(a, 0), V($-a$, 0) entonces como $a > 0$, $a = 5 \rightarrow a^2 = 25$
Por (1), $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$$b^2 = 25 - 9 = 16; \quad \rightarrow b = \pm 4$$

La ecuación con la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

quedaría: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, su gráfica es:



[B]

Si el eje mayor está en x los focos están dados por (c, 0) y ($-c$, 0) y los vértices por (a, 0) y ($-a$, 0). Los extremos del eje menor son (0, b) y (0, $-b$).

Vértice: Son los extremos del eje mayor (Fig. 1).

Ejercicio 3.1. Encuentre la ecuación de la elipse y grafíquela si:

a) Vértice: V(±8, 0); Focos: F(±5, 0)

b) Vértice: V(±9, 0); Focos: F(±2, 0)

c) Vértice: V(±4, 0); Focos: F(±2$\sqrt{3}$, 0)

d) Vértice: V(±3, 0); Focos: F(±1, 0)

e) Vértice: V(±$\sqrt{15}$, 0); Focos: F(±$\sqrt{2}$, 0)

V(±8, 0) debe entenderse como: V(–8, 0) y V(8, 0).

Una elipse puede tener su eje mayor en el eje y por lo tanto la forma de la ecuación es:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \qquad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } c^2 = a^2 - b^2$$

Los focos están definidos por $F_1(0, -c)$; $F_2(0, c)$
sus vértices están dados por (0, a) y (0, $-a$)
y los extremos del eje menor son: (b, 0) y ($-b$, 0).

[C]

Se puede hacer un razonamiento similar a la demostración anterior para demostrar la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Ejemplo 3.2. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son F_1 (0, 3) F_2 (0, –3) y vértices son (0, –5) y (0, 5). Grafique la elipse.

Solución: Los focos y vértices están en el eje y, el eje mayor está en y. La forma de la ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Los focos están dados por:

$F(0, \pm c) = (0, \pm 3) \rightarrow$ como $c > 0$, $c = 3$
entonces $c^2 = 9$

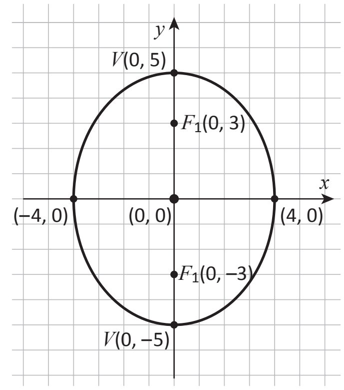
Los vértices están dados por:

$V(0, \pm a) = (0, \pm 5) \rightarrow$ como $a > 0$, $a = 5$
entonces $a^2 = 25$

como $c^2 = a^2 - b^2$ entonces

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

La ecuación es: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$;



En el Ejemplo 3.1 los valores a y b son los mismos que en el Ejemplo 3.2; pero la ecuación es distinta, porque en este caso su eje mayor está en y.

Ejercicio 3.2. Encuentre la ecuación de la elipse y grafique si:

a) Vértices: $V(0, \pm 7)$ y focos: $F(0, \pm 3)$

b) Vértices: $V(0, \pm 3)$ y focos: $F(0, \pm 1)$

c) Vértices: $V(0, \pm 12)$ y focos: $F(0, \pm 5)$

d) Vértices: $V(0, \pm 5)$ y focos: $F(0, \pm\sqrt{5})$

e) Vértices: $V(0, \pm 7)$ y focos: $F(0, \pm 2)$

Clase 3. Ecuación de la elipse

[A]

Ejemplo 3.3. Determine los vértices y los focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 = 144$. Grafique la elipse.

Solución: La ecuación de una elipse puede tener una de las siguientes formas:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$; por lo que la ecuación dada debe escribirse como una de ellas:

$$\frac{9x^2 + 16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$ lo que resulta al simplificar: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

La ecuación resultante determina el eje mayor en x; por lo que:

$a^2 = 16 \rightarrow$ como $a > 0$, $a = 4$

$b^2 = 9 \rightarrow$ como $b > 0$, $b = 3$

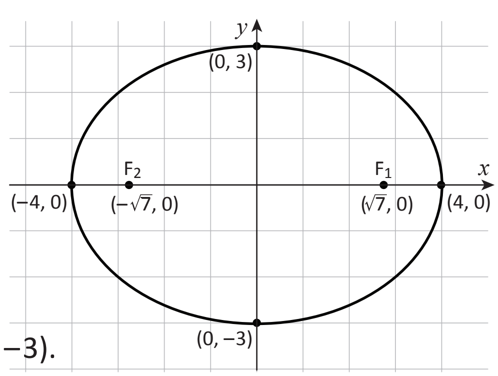
$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

como $c > 0$, $c = \sqrt{7}$

Focos: $F_1(\sqrt{7}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{7}, 0)$

Vértices: $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$

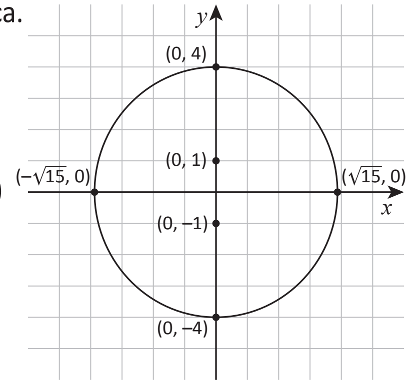
Extremos del eje menor: (0, 3) y (0, –3).



$a > b$
$16 > 9$

Ejemplo 3.4. Encuentre los focos y los vértices de la elipse y trace su gráfica.

$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$



Solución: La ecuación dada muestra que el eje mayor es en "y"

$a^2 = 16$, como $a > 0$, $a = 4$, vértices (0, 4) y (0, –4)

$b^2 = 15$, como $b > 0$, $b = \sqrt{15}$ extremos del eje menor ($\sqrt{15}$, 0) y ($-\sqrt{15}$, 0)

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 15 = 1$

como $c > 0$, $c = 1$, foco (0, 1) y (0, –1)

Ejercicio 3.3. Determine los focos, vértices y extremos del eje menor y grafique la elipse:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ b) $x^2 + 4y^2 = 16$ c) $3x^2 + 2y^2 = 6$

d) $6x^2 + y^2 = 18$ e) $25x^2 + 9y^2 = 225$

Ejemplo 3.5. Encuentre la ecuación de la elipse que tiene vértices: V(0, ±6) y que pasa por (3, 2). **[B]**

Solución: Los vértices dados tienen la forma (0, $\pm a$), $a = 6 \rightarrow a^2 = 36$;

entonces el eje mayor está en y:

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, parcialmente es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{36} = 1$ la cual pasa por (3, 2).

Sustituyendo: $\frac{3^2}{b^2} + \frac{2^2}{36} = 1 \rightarrow \frac{9}{b^2} + \frac{4}{36} = 1$ despejando

$\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{4}{36} \Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow 9\left(\frac{9}{8}\right) = b^2 \qquad 9\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{8} = b^2$

Por lo tanto, la ecuación es: $\frac{x^2}{\frac{81}{8}} + \frac{y^2}{36} = 1$ ó $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

Ejercicio 3.4. Encuentre la ecuación de la elipse y haga su gráfica.

a) Vértice en (0, $\pm\sqrt{5}$) y pasa por (–1, $\sqrt{2}$). b) Vértice en (±5, 0) y pasa por ($\sqrt{5}$, 4).

c) Vértices: V(±4, 0). Longitud del eje menor es 4. d) Focos: F(±1, 0) y $a = 3$.

e) Vértices: (0, ±3) y $b = 1$.

Clase 4 y 5. Desplazamiento paralelo de la elipse

Si se desplaza paralelamente la elipse, **[A]**

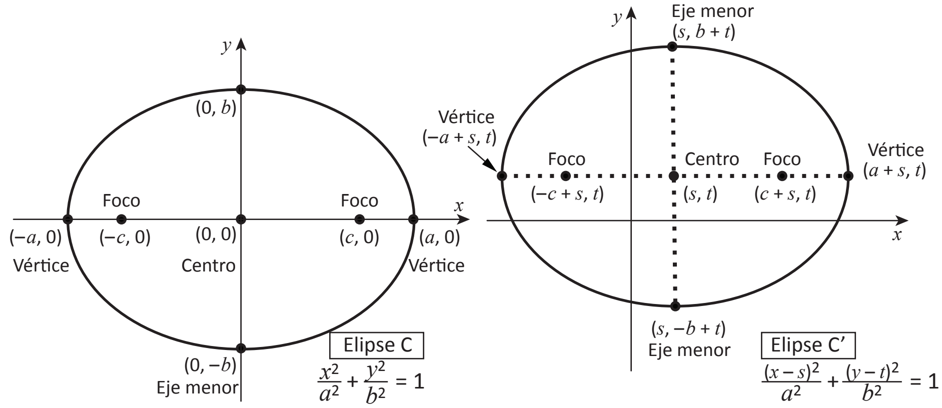
C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, s hacia el eje x y t hacia el eje y, se obtiene la elipse: C'.

$$P(x, y) \in C' \Leftrightarrow (x - s, y - t) \in C$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

Desplazamiento cuando el eje mayor está en x

C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y} \rightarrow$ C': $\frac{(x-s)^2}{a^2} + \frac{(y-t)^2}{b^2} = 1$



El desplazamiento se puede dar independientemente si el eje mayor es en x o en y.

Desplazamiento cuando el eje mayor está en y

C: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $\frac{s \text{ hacia el eje } x}{t \text{ hacia el eje } y}$ $\rightarrow$ C’: $\frac{(x-s)^2}{b^2}+\frac{(y-t)^2}{a^2}=1$

Ejemplo 3.6. Encuentre la ecuación de la elipse obtenida después de desplazar la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, 3 hacia el eje x y –2 hacia el eje y.

Solución: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-(-2))^2}{16}=1$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

Al desarrollar la ecuación se obtiene: $16x^2+25y^2-96x+100y-156=0$.

Ejercicio 3.5. Encuentre la ecuación de la elipse obtenida después del desplazamiento indicado.

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; 2 hacia el eje x, 1 hacia el eje y.

b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; –3 hacia el eje x, –2 hacia el eje y.

c) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$; 4 hacia el eje x, 5 hacia el eje y.

d) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$; 1 hacia el eje x, 3 hacia el eje y.

e) $x^2+\frac{y^2}{16}=1$; –1 hacia el eje x, 2 hacia el eje y.

Ejemplo 3.7. Grafique la elipse del Ejemplo 3.6.

[B]

Solución: La elipse está definida por la ecuación:

$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$ por lo que se sabe que el centro es (3, –2).

Su gráfica resulta de trasladar paralelamente $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3 unidades hacia la derecha, luego 2 unidades hacia abajo.

Vértices: como $a^2=25 \rightarrow$ como $a>0$, $a=5$ significa 5 unidades del centro a los vértices.

Traslado a la derecha es paralelo al eje y y hacia abajo es paralelo al eje x.

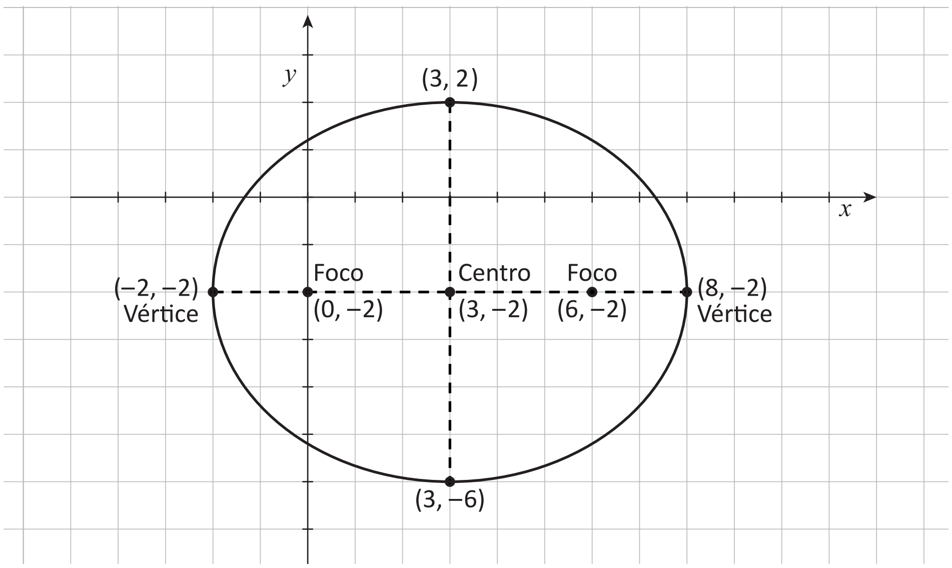
Por lo que, $V(5 + 3, 0 - 2) \rightarrow V(8, -2)$
$V(-5 + 3, 0 - 2) \rightarrow V(-2, -2)$.

Extremos del eje menor: Como $b^2 = 16 \rightarrow$ como $b > 0$, $b = 4$, significa 4 unidades del centro al eje menor.

Por lo que, $(0 + 3, 4 - 2) \rightarrow (3, 2)$ Los extremos del eje menor están en y.
$(0 + 3, -4 - 2) \rightarrow (3, -6)$

Focos: como $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow$ como $c > 0$, $c = 3$, significa 3 unidades del centro a los focos.
$(3 + 3, 0 - 2) \rightarrow F(6, -2)$
$(-3 + 3, 0 - 2) \rightarrow F(0, -2)$

La gráfica es:



No es necesario memorizar las fórmulas para obtener los vértices, focos y extremos del eje menor, basta con tener en cuenta el significado de a, b y c y el eje mayor de la elipse.

En la elipse original el centro era (0, 0) se movió 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo.
Los focos eran (3, 0) y (−3, 0) y se corren 3 unidades a la derecha y dos unidades hacia abajo. De igual manera se corren los vértices y los extremos del eje menor.

Ejercicio 3.6. Hacer las gráficas de las ecuaciones resultantes de las elipses después del desplazamiento indicado en el Ejercicio 3.5.

Clase 6. Encontrar el desplazamiento

Ejemplo 3.8. Ubicar los vértices, los focos y los extremos del eje menor de la elipse $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$.

Solución: $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$ para encontrar la forma estándar, se debe completar los cuadrados en x y y.
Agrupando términos en x y y de $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$ resulta:

$9(x^2 + 2x) + 5(y^2 - 2y) = 31$ → Por factor común (9 en las x y 5 en las y)

$9(x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 2y + 1) = 31 + 9 + 5$ … Completación al cuadrado

$9(x + 1)^2 + 5(y - 1)^2 = 45$ … Factorización.

$$\frac{9(x+1)^2}{45} + \frac{5(y-1)^2}{45} = \frac{45}{45}$$ … Dividir ambos miembros por 45

$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$ … Forma estándar.

Clase 3 Lección 1.
Forma estándar de la elipse:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

El segundo miembro de la igualdad debe ser 1.

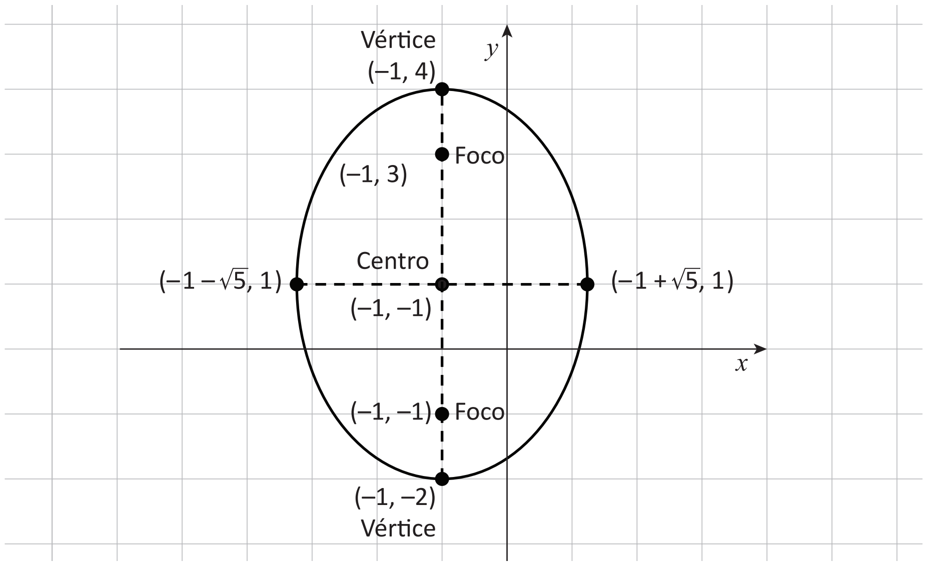
Centro: $(-1, 1)$

Vértices: $a^2 = 9 \rightarrow$ como $a > 0$, $a = 3$; V:$(-1, 1 \pm 3) \rightarrow$ V $(-1, -2)$ y V $(-1, 4)$

Extremos del eje menor: $b^2 = 5 \rightarrow$ como $b > 0$, $b = \sqrt{5}$. V $(-1 \pm \sqrt{5}, 1)$
$\rightarrow (-1 + \sqrt{5}, 1), (-1 - \sqrt{5}, 1)$

Focos: $c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow$ como $c > 0$, $c = 2 \rightarrow$ F$(-1, 1 + 2) \rightarrow$ F$(-1, 3)$
F$(-1, 1 - 2) \rightarrow$ F$(-1, -1)$

La gráfica:



La ecuación general de una elipse $Ax^2 + By^2 + C = 0$, luego cuando hay desplazamiento la ecuación es

$$Ax^2 + Dx + By^2 + Ey + C' = 0$$

Para encontrar el desplazamiento se aplica completación al cuadrado en x y en y.

Ejercicio 3.7. Encuentre los vértices, focos, centro, extremos del eje menor y la gráfica de los siguientes elipses:

a) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

c) $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$

e) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

Ejercicio 3.8. Escriba la ecuación de la elipse utilizando la información dada.

a) El centro de la elipse está en $(-3, 5)$ y los ejes tienen longitudes 1 y 6, el eje mayor es vertical.

b) Vértices de la elipse: $(3 + 2\sqrt{3}, -1)$ y $(3 - 2\sqrt{3}, -1)$
Focos: $(3 + 2\sqrt{2}, -1)$ y $(3 - 2\sqrt{2}, -1)$

c) Centro: $(4, 0)$, vértices $(4, 3)$ y $(4, -3)$ y focos $(4, -1)$ y $(4, 1)$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la ecuación de la elipse conociendo: Clase 1
   a) C (0, 0), Focos: $F(\pm 2, 0)$, Vértices: $V(\pm 3, 0)$
   b) C (0, 0), Focos: $F(0, \pm 4)$, Vértices: $V(0, \pm 5)$
   c) C (0, 0), Focos: $F(\pm\sqrt{3}, 0)$, Vértices: $V(\pm\sqrt{5}, 0)$
   d) C (0, 0), Focos: $F(0, \pm 2\sqrt{3})$, Vértices: $V(0, \pm 4)$

2. Encuentre los focos y vértices de una elipse dada su ecuación y haga su gráfica. Clase 2
   a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1$ b) $9x^2 + 4y^2 = 36$
   c) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ d) $4x^2 + y^2 = 16$

3. Encuentre la ecuación de la elipse y haga su gráfica. Clase 3
   a) Pasa por el punto (2, 1), la longitud de su eje menor es 4 y centro es (0, 0).
   b) Tiene vértices (±2, 0) y pasa por los puntos (–1, 1).
   c) La longitud de su eje menor es 4 y pasa por el punto (–2, 1) y centro es (0, 0).

4. Encuentre la ecuación de la elipse después del desplazamiento y haga la gráfica. Clase 4 y 5
   a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$; 1 hacia el eje x y –2 hacia el eje y.
   b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; –2 hacia el eje x y 3 hacia el eje y.
   c) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{7} = 1$; 0 hacia el eje x y 2 hacia el eje y.
   d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; –2 hacia el eje x y –3 hacia el eje y.

5. Encontrar los vértices, los focos y los extremos del eje menor de: Clase 6
   a) $9x^2 + 2y^2 + 36x + 4y + 20 = 0$
   b) $6x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 22 = 0$
   c) $x^2 + 2y^2 - 16y - 12x + 52 = 0$
   d) $8x^2 + 12y^2 + 32x + 72y + 92 = 0$
   e) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$

6. Escriba la ecuación de la elipse utilizando la información dada. Clase 3
   a) Tiene vértices (3, 1) y (3, 9) y la longitud del eje menor es 6.
   b) Centro en (1, –1), un foco en (1, 1) y $a = 5$.
   c) Centro en (1, 3), un foco en (1, 0) y un vértice en (1, –1).

Lección 4. La hipérbola

Clase 1. Ecuación de la hipérbola

Se define la hipérbola de manera similar a como se definió la elipse.

Definición 4.1
Una hipérbola, es el conjunto de puntos P(x, y) en un plano, tales que la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos (F_1 y F_2) es constante. Los dos puntos fijos son llamados focos de la hipérbola.

En la elipse se suman las distancias y en la hipérbola se restan las distancias.

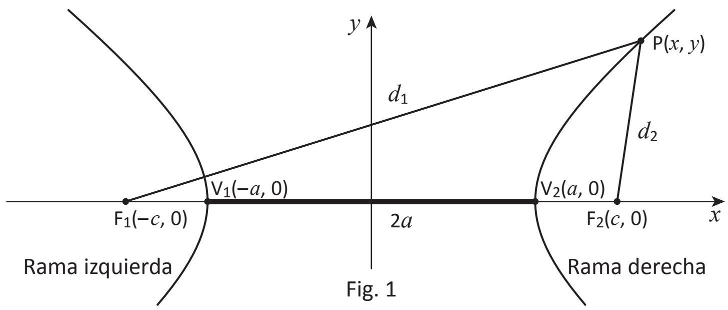


Fig. 1

En la Figura 1, se muestra la gráfica de la hipérbola con focos F_1 $(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ en el eje x, con centro en el origen (0, 0) y con vértices V_1 $(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$. La gráfica tiene dos partes distintas llamadas ramas.

La distancia entre los vértices es $2a$.

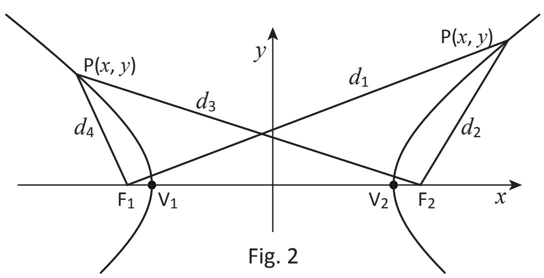


Fig. 2

Por definición de hipérbola, el punto P(x, y) puede estar en la rama izquierda o en la rama derecha, y la diferencia de las distancias de cualquier punto P a los focos es constante, es decir,

$$d_1 - d_2 = d_3 - d_4 = 2a,$$

tal como se muestra en la Figura 2.

La definición de hipérbola dice que es el conjunto de puntos en el plano tales que la diferencia de las distancias a los focos es constante. En la Figura 1, el punto P (x, y), está en la rama derecha, entonces:

$$d(\text{P}, \text{F}_1) > d(\text{P}, \text{F}_2) \text{ por lo que } d(\text{P}, \text{F}_1) - d(\text{P}, \text{F}_2) > 0.$$

d(P, F_1) significa la distancia del punto P al Foco F_1.

Como esta diferencia es constante, se confirma que:

$$d(\text{P}, \text{F}_1) - d(\text{P}, \text{F}_2) = 2a$$

Se deduce la ecuación de la hipérbola de la siguiente manera:

$$d(\text{P}, \text{F}_1) - d(\text{P}, \text{F}_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a \quad \text{... por fórmula de la distancia}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad \text{... aislando un radical}$$

$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x - c)^2 + y^2$ … elevando al cuadrado

$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - 4a^2 - \cancel{x^2} + 2cx - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ … dividiendo entre 4

$$\frac{4cx-4a^2}{4} = cx - a^2$$

$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$ … elevando al cuadrado

$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2[(x^2 - 2cx + c^2) + y^2]$

$c^2x^2 - \cancel{2ca^2x} - a^2x^2 + \cancel{2ca^2x} - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ … $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ … dividiendo entre a^2b^2

A $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, se le llama forma estándar de la ecuación de la hipérbola.

De igual manera llega misma fórmula para el punto P está en la rama izquierda.

Ecuación de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola con centro en el origen (0, 0), Focos $(\pm c, 0)$ en el eje x y vértices $(\pm a, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ donde } c > a > 0;\ c^2 = a^2 + b^2$$

Clase 2. Asíntotas de la hipérbola

Ejemplo 4.1. En la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, encontrar los focos y los vértices de la hipérbola. Haga la gráfica.

Solución:
La ecuación tiene la forma estándar de la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con centro en el origen y los focos en el eje x.

La ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ se puede escribir de la forma: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, por consiguiente:

$$a = 4,\ b = 3 \text{ y } c = 5 \text{ ya que } a^2 + b^2 = c^2.$$

Los vértices de la hipérbola son $V_1(4, 0)$ y $V_2(-4, 0)$.

Los focos de la hipérbola son $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$.

Haciendo $x = 0$ en la ecuación, obtenemos los puntos (0, 3) y (0, –3).

Con los puntos (0, 3) y (0, –3) en el eje y y los vértices (4, 0) y (–4, 0) se forma **un rectángulo**, como se muestra en la Figura 3.

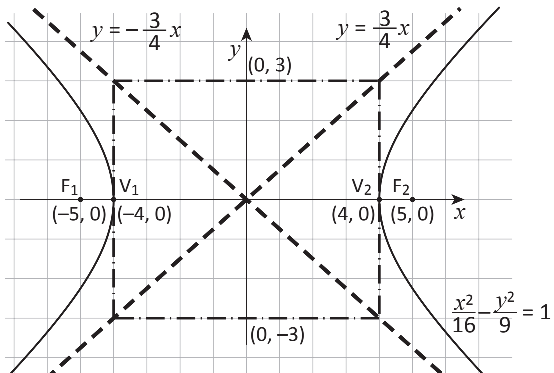


Fig. 3

Luego se trazan las rectas $y = \frac{3}{4}x$; $y = -\frac{3}{4}x$ que pasan por el origen y por los vértices del rectángulo formado y se convierten en **las asíntotas** de la hipérbola. Se trazan las dos ramas de la hipérbola pasando por los vértices y aproximándose a las asíntotas, pero sin tocarlas.

Las asíntotas no son parte de la gráfica de la hipérbola, sólo sirven de referencia para trazar la gráfica.

El segmento de recta con extremos en los vértices de la hipérbola se llama **eje transverso**. El segmento con extremos (0, b) y (0, $-b$) se llama **eje conjugado**.

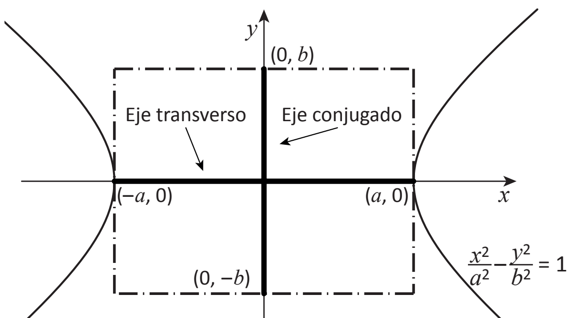


Fig. 4

Los extremos de los ejes transverso y conjugado, sirven de referencia para trazar el rectángulo auxiliar y luego las asíntotas de la hipérbola, como en la Figura 4.

Al rectángulo formado se le llama rectángulo auxiliar y sirve de referencia para trazar las asíntotas de la hipérbola.

Ejemplo 4.2. Trace la gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. Identifique sus focos, vértices, extremos del eje conjugado y las asíntotas.

Solución: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ se puede escribir como $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$; por lo que:

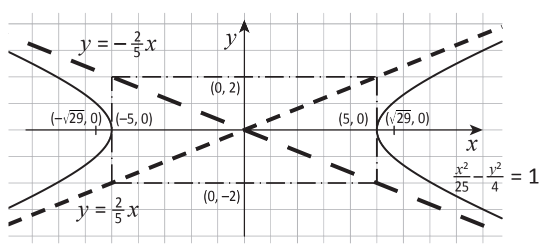
$$a = 5,\ b = 2 \text{ y } c = \sqrt{29},\ \text{ya que } c^2 = a^2 + b^2.$$

Los vértices son V_1 (5, 0) y V_2 (–5, 0).

Los focos son F_1 ($\sqrt{29}$, 0) y F_2 ($-\sqrt{29}$, 0).

Las asíntotas son y = $\frac{2}{5}x$ y $y = -\frac{2}{5}$x.

Los extremos del eje conjugado son: (0, 2) y (0, – 2).

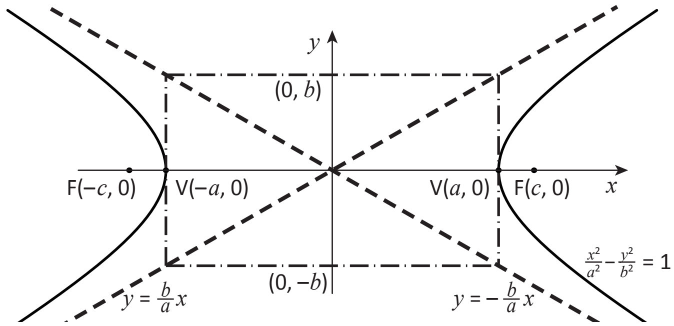


Ejercicio 4.1. Trace la gráfica de las siguientes hipérbolas. Identifique los vértices, los focos, los extremos del eje conjugado y las asíntotas.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ d) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

Hipérbola con focos en el eje x y centro en el origen



La ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (0, 0), vértices $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$; focos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. La longitud del eje transversal es $2a$ y sus extremos son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$; la longitud del eje conjugado es $2b$ y sus extremos son $(0, b)$ y $(0, -b)$. Sus asíntotas están definidas por las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$.

Clase 3. Expresiones que son ecuaciones de la hipérbola

Ejemplo 4.3. La ecuación $25x^2 - 4y^2 = 100$ ¿corresponde a una hipérbola?

Solución: A simple vista la ecuación no tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pero si se divide entre 100 cada término se obtiene:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$$

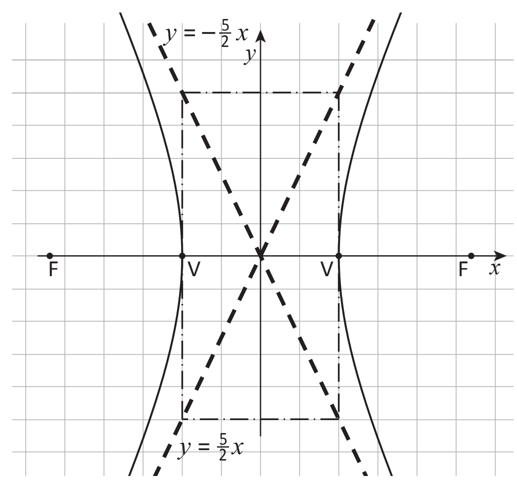
y ésta sí corresponde a la ecuación de una hipérbola con focos en el eje x.

Los vértices son (2, 0) y (–2, 0);

los focos son $(\sqrt{29}, 0)$ y $(-\sqrt{29}, 0)$;

las asíntotas son: $y = \pm\frac{5}{2}x$;

y los extremos del eje conjugado son: (0, 5) y (0, –5).



Ejercicio 4.2. Determine si las siguientes ecuaciones corresponden a hipérbolas. Si lo son, grafique e identifique los elementos importantes.

a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $x^2 - 4y^2 = 100$ c) $36x^2 - 4y^2 = 144$

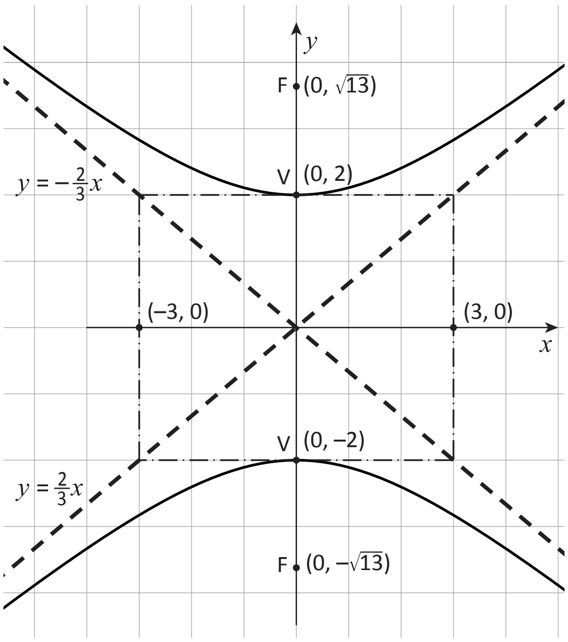
Ejemplo 4.4. ¿La ecuación $-4x^2 + 9y^2 = 36$, corresponde a una hipérbola?

Solución: Al dividir todos los términos por 36, queda la ecuación: $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

¿Corresponde esta ecuación a una hipérbola?
¿En qué se diferencia de las ecuaciones de las hipérbolas planteadas anteriormente?
¿Qué sucederá con la gráfica de esta ecuación en relación con las trazadas anteriormente?
¿Qué pasará con los focos?

La ecuación $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, se puede escribir como $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ y corresponde a una hipérbola con focos en el eje y.

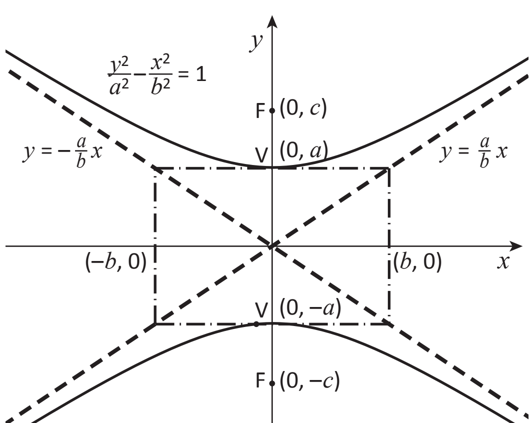
En la ecuación de una hipérbola, si y es negativa entonces los focos están en el eje x; y si la x es negativa, entonces los focos están en el eje y.



Se deduce que $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$ ya que $a^2 + b^2 = c^2$.
Los vértices son: (0, 2) y (0, –2);
Los focos son $(0, \sqrt{13})$ y $(0, -\sqrt{13})$.
El eje conjugado está en el eje x y sus extremos son (3, 0) y (– 3, 0).
Las asíntotas son $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$.

De forma análoga a las anteriores se dibuja el rectángulo auxiliar y las asíntotas y luego se traza la gráfica de la hipérbola.

Hipérbola con focos en el eje y y centro en el origen



La ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (0, 0), vértices $V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$; focos $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$.
La longitud del eje transversal es $2a$ y sus extremos son: $(0, a)$ y $(0, -a)$, la longitud del eje conjugado es $2b$ y sus extremos son: $(b, 0)$ y $(-b, 0)$.

La ecuación de las asíntotas es: $y = \pm \frac{a}{b}x$.

Ejercicio 4.3. Grafique las siguientes hipérbolas con focos en el eje y.

a) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$ b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

c) $4y^2 - 16x^2 = 64$ d) $25y^2 - 4x^2 = 100$

Clase 4 y 5. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje horizontal

[A]

Imaginemos que la hipérbola con centro en el origen y con focos en el eje x, se desplaza h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente. En la Figura 5 se ilustra esta situación.

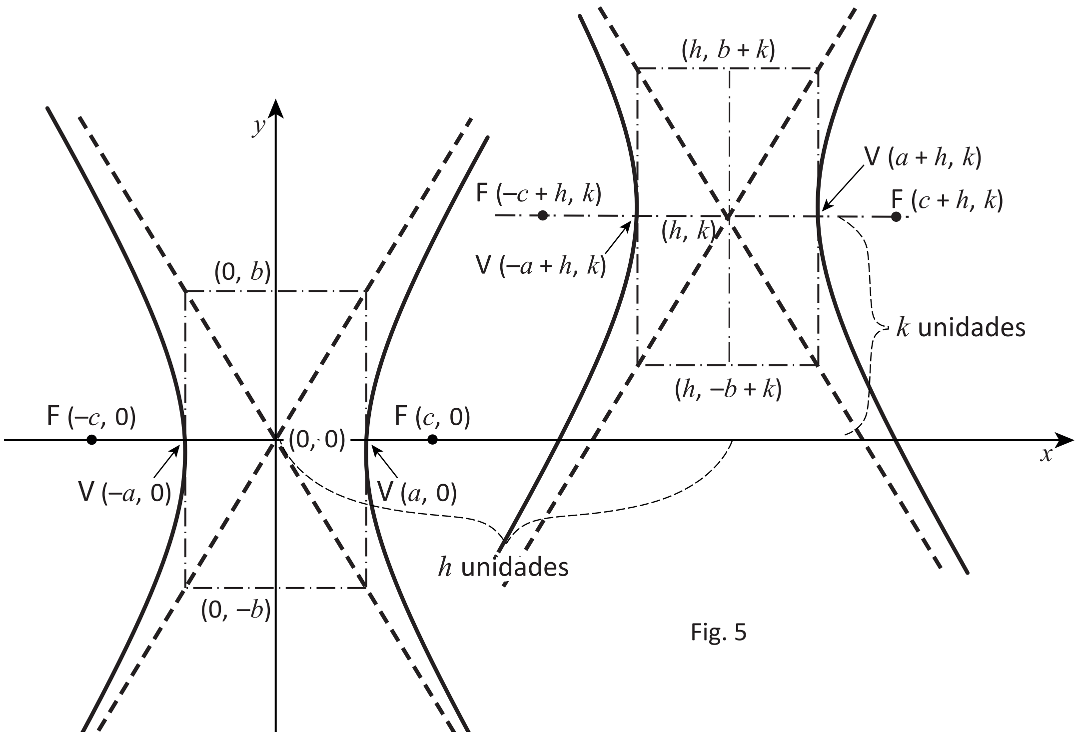


Fig. 5

Si la hipérbola con centro en el origen y focos en el eje x, se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, sus nuevos vértices son: $V_1(a + h, k)$, $V_2(-a + h, k)$; sus nuevos focos son: $F_1(c + h, k)$, $F_2(-c + h, k)$ y los extremos del eje conjugado son: $(h, b + k)$, $(h, -b + k)$.

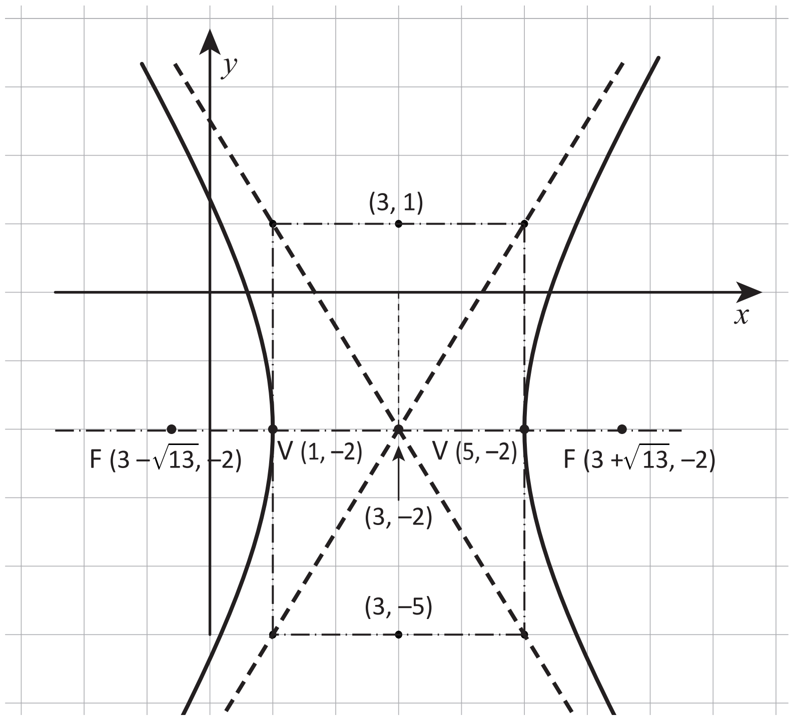
Hipérbola con centro (h, k) y focos en el eje horizontal

La ecuación $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (h, k).

Los focos $F_1(c + h, k)$ y $F_2(-c + h, k)$ están en un eje horizontal a c unidades a la derecha y a la izquierda del centro (h, k) y los vértices: $V_1(a + h, k)$ y $V_2(-a + h, k)$ están situados en el mismo eje horizontal a a unidades a la derecha y a la izquierda del centro (h, k).

Ejemplo 4.5. Grafique la hipérbola $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

Solución: De forma similar como se graficó la elipse con centros distinto al origen, así se grafica la hipérbola con centro (h, k).



Según la ecuación, la hipérbola tiene centro $(h, k) = (3, -2)$, con los valores $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$ ya que $c^2 = a^2 + b^2$. Con estos valores se grafica la hipérbola tomando como referencia el centro (3, –2). Como $a = 2$ desplazamos 2 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia la derecha y se obtienen los vértices: $V_1(3 + 2, -2) = (5, -2)$ y $V_2(3 - 2, -2) = (1, -2)$.

Como $c = \sqrt{13}$ desplazamos $\sqrt{13}$ unidades hacia la izquierda y $\sqrt{13}$ unidades hacia la derecha y se obtienen los focos: $F_1(3 + \sqrt{13}, -2)$ y $F_2(3 - \sqrt{13}, -2)$. Como $b = 3$ nos desplazamos 3 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia abajo y se obtienen los extremos del eje conjugado: $(3, -2 + 3) = (3, 1)$ y $(3, -2 - 3) = (3, -5)$.

Con estos valores se traza el rectángulo auxiliar, las asíntotas y se dibuja la gráfica.

En conclusión: para graficar una hipérbola con centro distinto del origen, se grafica el centro (h, k) y luego, con los valores a y b, se dibuja el rectángulo auxiliar partiendo del centro (h, k), se trazan las asíntotas, se ubican los focos y se esboza la gráfica.

En la ecuación, en la parte del numerador, se tomó el opuesto de –3 y el opuesto de +2 por eso el centro es (3, –2).

Para trazar las asíntotas, basta tener el rectángulo auxiliar y con una regla trazamos una línea que pase por los vértices y el centro.

Ejercicio 4.4. Grafique las siguientes hipérbolas.

a) $\dfrac{(x+4)^2}{9} - \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$ b) $\dfrac{(x-2)^2}{25} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Ejemplo 4.6. Grafique la hipérbola cuya ecuación es

[B]

$$x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 11.$$

Solución: Como la ecuación no tiene la forma estándar de la hipérbola, aplicamos la completación al cuadrado para obtenerla.

$$x^2 - 4y^2 - 6x + 8y = 11$$
$$(x^2 - 6x) + (-4y^2 + 8y) = 11$$
$$(x^2 - 6x + k_1) - 4(y^2 - 2y + k_2) = 11 + k_1 - 4k_2$$
$$(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = 11 + 9 - 4(1)$$
$$(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = 16$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \qquad \text{… dividiendo por 16.}$$

Observe (−4) es factor común.

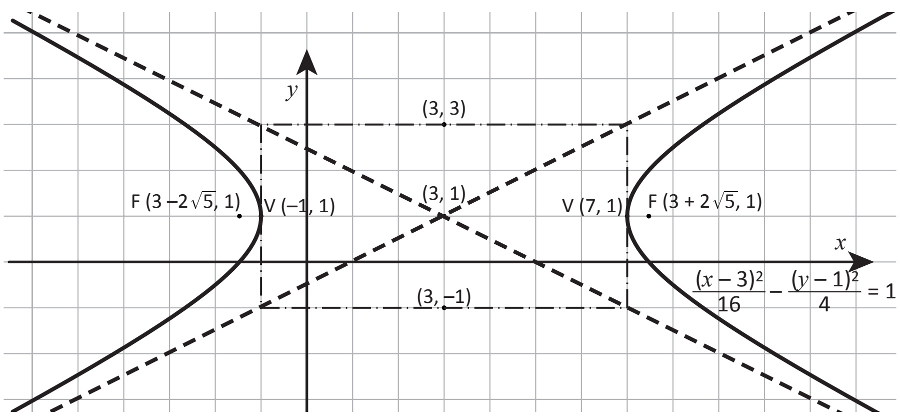
$k_1 = \left(\dfrac{-6}{2}\right)^2 = 9$

$k_2 = \left(\dfrac{-2}{2}\right)^2 = 1$

Se tiene la hipérbola con centro (3, 1), los valores:

$$a = 4,\ b = 2,\ c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ ya que } c^2 = a^2 + b^2$$

Con estos datos se grafica la hipérbola.



Ejercicio 4.5. Grafique las siguientes hipérbolas, encuentre sus focos, vértices, asíntotas, extremos del eje conjugado.

a) $x^2 - 2y^2 - 2x - 12y = 35$

b) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y = 4$

c) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y = 49$

Clase 6 y 7. Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical

Igual que en la clase anterior, imaginemos que la hipérbola con centro en el origen y con focos en el eje y, se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente. En la Figura 6 se ilustra esta situación.

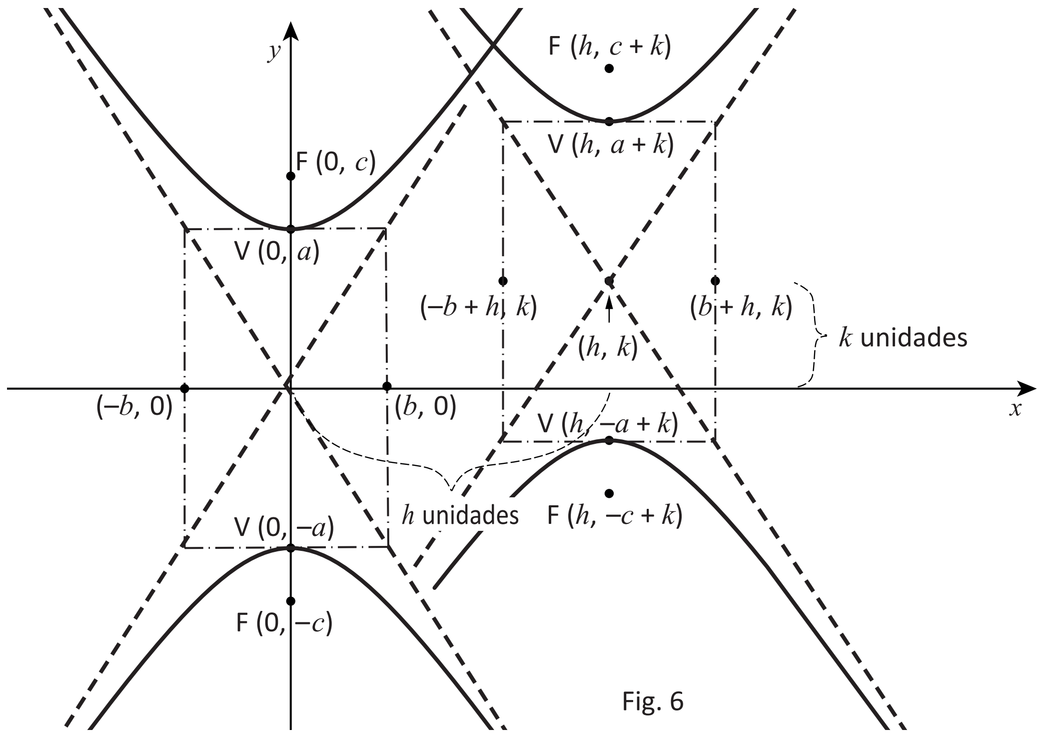


Fig. 6

Si la hipérbola con focos en el eje y y con centro en el origen, se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente; su nuevo centro es (h, k), los nuevos focos son: F(h, $c + k$) y F(h, $-c + k$); los nuevos vértices son: V(h, $a + k$) y V(h, $-a + k$); y los extremos del eje conjugado son: ($b + h$, k) y ($-b + h$, k).

Hipérbola con centro (h, k) y focos en un eje vertical

La ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, corresponde a la hipérbola con centro (h, k).
Los focos $F_1(h, c + k)$ y $F_2(h, -c + k)$ están en un eje vertical a c unidades hacia arriba y hacia abajo del centro (h, k) y los vértices V_1 (h, $a + k$) y V_2 (h, $-a + k$) están situados en el mismo eje vertical a a unidades hacia arriba y hacia abajo del centro (h, k).

Ejemplo 4.7. Grafique la hipérbola cuya ecuación es $16y^2 + 32y - 9x^2 + 36x = 164$.

Solución: Como la ecuación no tiene la forma estándar, se aplica la completación al cuadrado:

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 36x = 164$$

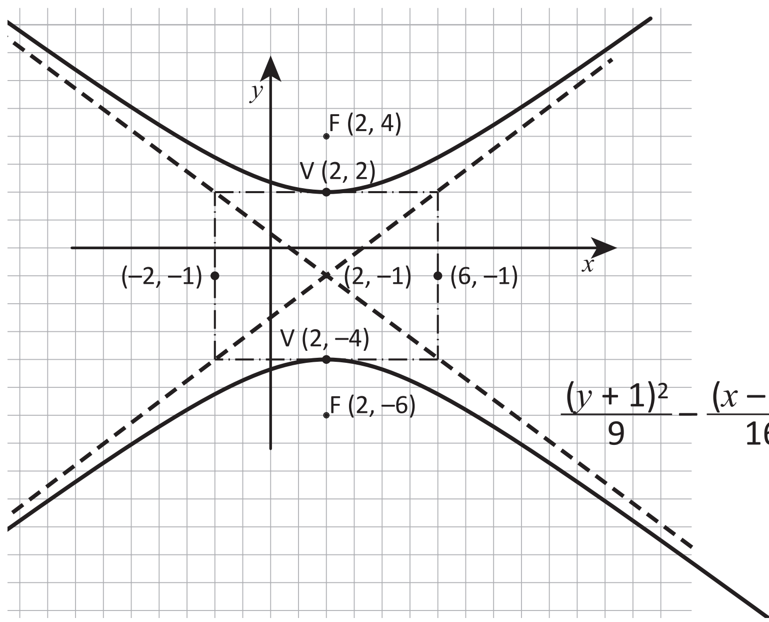
$$16(y^2 + 2y) - 9(x^2 - 4x) = 164$$

$$16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 - 4x + 4) = 164 + 16(1) - 9(4)$$

$$16(y + 1)^2 - 9(x - 2)^2 = 144$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1 \quad \text{… dividiendo entre 144}$$

De esta última ecuación, se tiene la hipérbola con centro (2, –1), con $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$ ya que $c^2 = a^2 + b^2$. Las ramas de la hipérbola abren hacia abajo y hacia arriba.



Ejercicios 4.6. Grafique las siguientes hipérbolas, encuentre sus focos, vértices, asíntotas, extremos del eje y conjugado.

a) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$

c) $(y-5)^2 - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

d) $25y^2 - 4x^2 - 250y + 24x = -489$

e) $25y^2 - 9x^2 + 100y - 54x - 206 = 0$

f) $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x = 113$

Matemáticas III

Unidad III

Probabilidad

- Lección 1: Conteo
- Lección 2: Probabilidad

Algo de historia

Pierre Simon Laplace
(1749 – 1827)

Laplace fue un astrónomo físico y matemático francés, nació el 28 de marzo de 1749, procedía de una familia de granjeros, estudió en una escuela para ser sacerdote ya que era el deseo de su padre, sin embargo descubrió que a él le gustaba la matemática por lo que al cumplir los 19 años se fue a París donde ingresó a la Academia de las Ciencias, era un hábil político en consecuencia tenía pocas amistades. En 1785 fue elegido miembro de la Academia Francesa de Ciencias en la cual fungió como presidente en varias ocasiones.

En el transcurso de los años Laplace estudió e investigó muchos temas entre ellos la probabilidad, destacándose por proporcionar una definición de probabilidad la cual fue llamada posteriormente como la regla de Bayes, asimismo descubrió métodos para calcular la probabilidad de sucesos compuestos conociendo la probabilidad de cada evento simple. Son muchas las contribuciones que Laplace hizo a la ciencia en diferentes campos, a él se le atribuye la Teoría del Movimiento y la forma elíptica de los planetas, sus trabajos matemáticos fueron de mucha ayuda para la astronomía, física, y química.

Laplace es recordado como uno de los máximos científicos de esos tiempos el cual poseía facultades matemáticas impresionantes que ninguno de sus contemporáneos tenía.

Pierre Simon Laplace murió en Paris a los 77 años el 5 de marzo de 1827.

Fuente: http://sauce.pntic.mec.es/rmarti9/laplace1.html

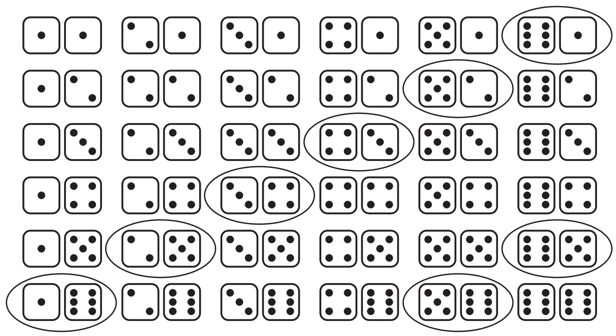
Lección 1. Conteo

Clase 1. Principios de conteo

Ejemplo 1.1. Determine el número de casos posibles de obtener un total de 7 puntos o 11 puntos en el lanzamiento de dos dados.

[A]

Solución: Se hará una lista de todos los posibles casos que se pueden obtener al lanzar dos dados y luego se cuentan cuántos de ellos son 7 ó 11.



Se determinan dos conjuntos:

Sea A conjunto de casos que dan 7

Sea B el conjunto de casos que dan 11

El total de casos de A o B se denota como (AUB) y se obtiene:

n(AUB) $= n(\text{A}) + n(\text{B})$

$= n(7) + n(11)$

$= 6 + 2$

$= 8$

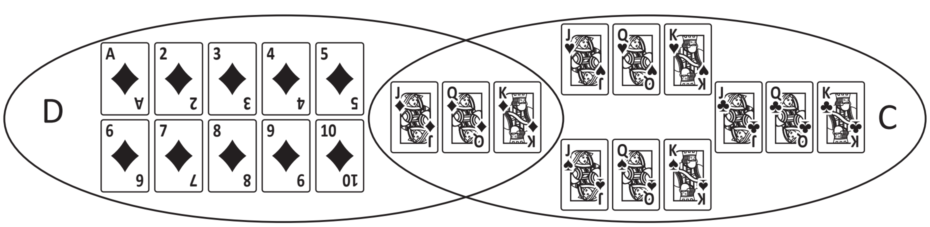
R: 8 casos.

Se utiliza n(A) para determinar el total de casos que hay en el conjunto.

AUB se lee A unión B, y representa la suma de casos de A y de B.

Ejemplo 1.2. Determine el número de casos posibles de obtener diamantes o caras en una baraja de cartas.

Solución: Sea D el conjunto de cartas que son diamantes y C el conjunto da cartas que son caras.



El número de casos posibles para obtener cara o diamante se obtiene de la siguiente manera:

n(DUC) $= n(\text{D}) + n(\text{C}) - n(\text{D}\cap\text{C})$

$= 13 + 12 - 3$

$= 22$

R: 22 casos.

Una baraja normal tiene 52 cartas, cuatro tipos: diamantes, trébol, corazones, espadas y dos colores rojo y negro.

D∩C se lee D intersección C

Hay cartas que tienen cara y a la vez diamante, se denota: n(D∩C) al total de casos que se repiten.

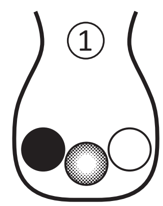
Nota que en el Ejemplo 1.1 no hay casos repetidos por lo que n(A∩B) = 0.

Teorema 1.1. Principio de conteo de la suma
Si A y B son dos conjuntos finitos entonces. El número de casos en que pueden ocurrir los elementos de A ó B se denota como:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Ejercicio 1.1

a) Un repuesto de automóvil se vende en 6 tiendas de Tegucigalpa y 8 tiendas en San Pedro Sula. ¿De cuántas maneras se puede obtener el repuesto?
b) En el lanzamiento de dos monedas, encuentre el número de casos posibles en el que caiga la primera un escudo o la segunda un escudo.
c) Dos dados son lanzados, determine el número de maneras de obtener un puntaje de 4 ó 6.
d) Una caja de chocolates contiene 14 de crema 16 de caramelo y 10 cubierto de nueces. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar uno de crema o uno de caramelo?
e) En un vuelo de Honduras a Estados Unidos todas las personas hablan español o inglés. Si 71 personas hablan español, 85 hablan inglés y 29 hablan los dos idiomas. ¿Cuántas personas hay en el avión?

Ejemplo 1.3. Un frasco contiene tres mables de color negro, gris y blanco. Se extraen dos mables del frasco, primero uno y luego otro, sin reemplazo. Encuentre las diferentes maneras en que se puede combinar los colores.

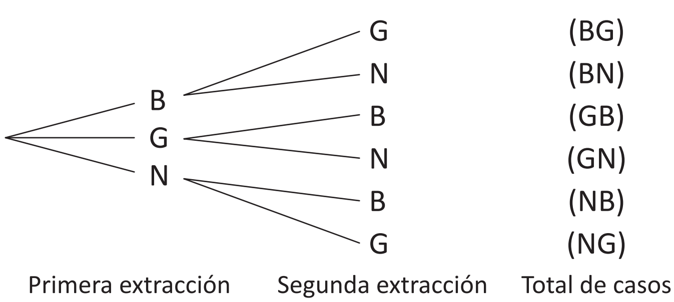


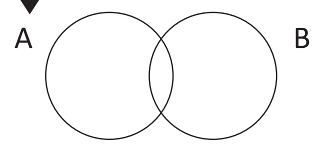
Solución: Se puede utilizar dos formas de encontrar todas las maneras diferentes de combinar los colores.
1) Tabla

Extracción 1ª \ Extracción 2ª	B	G	N
B		BG	BN
G	GB		GN
N	NB	NG	

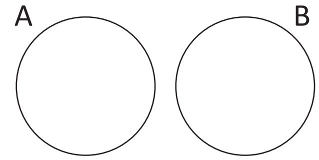
Hay 6 maneras diferentes de obtener los dos Mables BG, BN, GB, GN, NB y NG.

2) Diagrama de árbol





$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Principio de la suma: cuando hay dos casos que no ocurren al mismo tiempo, el número de maneras de la ocurrencia de alguna de ellas es la suma del número de casos de éstas.

[B]

Nota que se tacha BB, GG y NN. Debido a que no hay reemplazo de los mables y no se podrá obtener dos mables del mismo color.

El diagrama de árbol tiene la ventaja de que se pueden usar muchas más combinaciones.

Ejercicio 1.2

En el Ejemplo 1.3 encuentre mediante un diagrama de árbol todas las diferentes maneras que se pueden obtener dos mables, si después de la primera extracción el mable se devuelve al frasco.

a) ¿Cuál es la diferencia entre las dos situaciones?

b) ¿Resultó el mismo número de maneras diferentes de obtener los dos mables? Explique.

Teorema 1.2. Principio de conteo de la multiplicación
Si una operación se puede efectuar de m maneras y para cada una de ellas se puede efectuar una segunda operación de n maneras, entonces el número de maneras en que se pueden realizar estas operaciones , está dado por el producto m x n.

Principio de la multiplicación:
El número total de casos es el producto de los números de casos para cada parte.

Ejercicio 1.3

a) ¿Cuántas maneras hay de escribir un código de 5 letras si la repetición de letras es permitida.

b) Una bolsa contiene 3 mables rojos, r_1, r_2, r_3 y dos verdes v_1, v_2. Dos mables son extraídos uno después del otro sin reemplazo del mable que se sacó primero. Construya un diagrama de árbol.

c) Si 4 monedas son lanzadas construya un diagrama de árbol que determine de cuántas maneras se puede obtener dos caras y dos escudos

d) Un equipo de futbol tiene 4 camisetas de color: azul, verde, roja y amarilla también 4 calzonetas de color: café, blanca, negra y anaranjada. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar uniformes para jugar?

Clase 2. Permutación 1

Ejemplo 1.4. Se tienen las letras S, O, L. Encuentre todas las formas diferentes de colocarlas para formar una palabra de 3 letras.

[A]

Solución
Diagrama de árbol

Primera posición	Segunda posición	Tercera posición	Palabras de 3 letras
S	O	L	SOL
	L	O	SLO
O	S	L	OSL
	L	S	OLS
L	S	O	LSO
	O	S	LOS
3 x	2 x	1 =	6

Hay 6 formas diferentes de ubicar las letras sin repetir.

Al formar la palabra de tres letras tenemos

hay 3 posibles letras	hay 2 posibles letras	hay 1 posible letra

El proceso anterior se le llama Permutación.

Definición 1.1
Una permutación es una secuencia ordenada de objetos en un conjunto, donde el orden sí importa.

Ejercicio 1.4.
En el ejemplo 1.4 se agrega la letra E ¿de cuántas maneras diferentes se puede formar una palabra de 4 letras?

Definición 1.2
Sea n un número entero, n factorial se define por $n! = n(n-1)(n-2)\ldots(1)$ para $n \geq 1$.

Para $n = 0$, se defina $0! = 1$.

Ejercicio 1.5
Evalué las siguientes expresiones:
a) $4!$ b) $10!$ c) $\frac{7!}{5!}$ d) $4 \cdot 3!$ e) $\frac{8!}{0!}$

Si se tiene n objetos con los que se pueden formar permutaciones se cuenta con: n opciones para el primer objeto.
$n - 1$ opciones para el segundo objeto.
$n - 2$ opciones para el tercer objeto y así sucesivamente hasta llegar al último objeto, por lo tanto, aplicando el principio del producto se tiene:
$n(n - 1)(n - 2)\ldots(1)$ Permutaciones para n objetos, y se denota con $n!$ y
Se lee: n factorial.

> **Teorema 1.3.** El número de permutaciones de n objetos distintos está dado por $n!$

Ejercicio 1.6

a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra INMERSA?

b) Una profesora tiene que sentar 15 de sus estudiantes en fila para la clase de arte. ¿De cuántas maneras diferentes puede sentar a los estudiantes?

c) Se quiere formar un código de 26 letras de un alfabeto de 26 letras ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar dicho código?

d) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 sin repetición?

*e) En un aula de clase hay 7 estudiantes que son mujeres y 5 varones ¿De cuántas maneras se pueden sentar las mujeres juntas a la derecha y los varones juntos a la izquierda?

El resultado puede quedar expresaro como $n!$

En e) obtener las permutaciones de las mujeres y las permutaciones de los varones, luego aplique el principio de multiplicación.

[B]

Ejemplo 1.5.

Se quiere formar un código de 4 números utilizando los dígitos del 0 al 9 sin repetición. ¿De cuántas formas diferentes se puede escribir el código?

Solución:
Hay 10 dígitos y 4 opciones para el código, por lo tanto, para el primer dígito hay 10 opciones, para el segundo hay 9 opciones, para el tercero hay 8 opciones y para el cuarto digito hay 7 opciones.
Por lo tanto:
Aplicamos el principio del producto: 10 x 9 x 8 x 7 = 5040 (Respuesta)
Si utilizamos factorial ¿Cómo podemos expresar este producto?

$$\frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

De lo anterior se deriva el siguiente teorema.

Al expresar como factorial se necesita el factor 6, 5, 4, 3, 2, 1; por lo que se divide entre 6!.
$6! = (10 - 4)!$

¿Cuál es la diferencia entre el Ejemplo 1.4 y 1.5?

> **Teorema 1.4.** El número de permutaciones de r objetos elegidos de n objetos de un conjunto, donde $0 \leq r \leq n$, es:
> $$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

Ejercicio 1.7

a) Usando los dígitos 1, 3, 5, 7, y 9 sin repetición ¿De cuántas maneras se puede formar un número de 1, 2, 3, 4, y 5 dígitos?

b) Un equipo de tenis consta de 12 jugadores ¿De cuántas maneras pueden ser elegidos 5 jugadores para un partido donde los jugadores deben ser clasificados?

c) Un club de ajedrez tiene 6 miembros.
   c1) ¿De cuántas maneras podría ubicarse todos los 6 miembros para una fotografía?
   c2) ¿De cuántas maneras puede el club elegir un presidente y un secretario?

Clase 3 y 4. Permutación 2

[A]

Al aplicar permutaciones para resolver problemas se deben considerar diferentes situaciones particulares.
En el Ejemplo 1.4 y 1.5 aplicamos:
* Permutaciones sin repetición de n elementos tomados a la vez.
  $P(n, n) = n!$

Se denota: $P(n, n) = P(n)$

* Permutaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r

donde $r \leq n$ $\qquad P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo 1.6. ¿De cuantas formas distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa redonda?

Otra forma de aplicar permutaciones

Solución:
Es una permutación circular por lo que se considera una persona fija, es decir 7 personas serán permutadas.

$P_{circ}(8) = (8 - 1)! = 7! = 5040$ Formas distintas

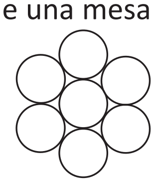
Una permutación circular se aplica a un conjunto ordenado de permutaciones, es decir que no hay principio ni final. Para trabajar con ellas se fija arbitrariamente un elemento como el primero.

Teorema 1.5. El número de permutaciones circulares de n objetos está dada por: $P_{circular}(n) = (n - 1)!$

Ejercicio 1.8

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar alrededor de una mesa redonda una madre y sus cinco hijos?

*b) ¿De cuántos modos diferentes se pueden ubicar las cifras del 1 al 7 en la figura siguiente?



c) En un club forman una mesa redonda presidencial por 8 personas ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

d) ¿De cuántas formas se puede sentar 3 parejas de casados alrededor de una mesa circular si no debe haber dos mujeres juntas ni dos hombres juntos?

Ejemplo 1.7. Para formar la combinación de un candado se eligen 4 dígitos de 10. ¿De cuántas maneras se pueden elegir los dígitos?

[B]

Solución
En una combinación de un candado los dígitos se pueden repetir por lo que cada dígito tiene igual número de posibilidades de ser elegido.
En la primera posición hay 10 opciones
En la segunda posición hay 10 opciones
En la tercera posición hay 10 opciones
y en la cuarta posición hay 10 opciones

Código

____	____	____	____
1	2	3	4

Por lo tanto
El número de maneras que se pueden elegir los dígitos: 10 x 10 x 10 x 10 = 10^4 = 10000 (Respuesta).

Teorema 1.6. Permutaciones con repetición
Para encontrar el total de permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r utilizamos $P_{\text{repetición}}(n, r) = n^r$

Ejercicio 1.9
a) ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con las cifras 1, 2, 3…9 si se permite repetición?
b) Se lanzar 4 monedas distintas de forma simultánea. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?
*c) En un hospital se utilizan 5 símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes de manera que las primeras son letras y las tres últimas son dígitos. Suponiendo que hay 25 letras. ¿Cuántas historias clínicas pueden hacerse si:
c1) No hay restricciones sobre letras y números.
c2) Las dos letras no pueden ser iguales.

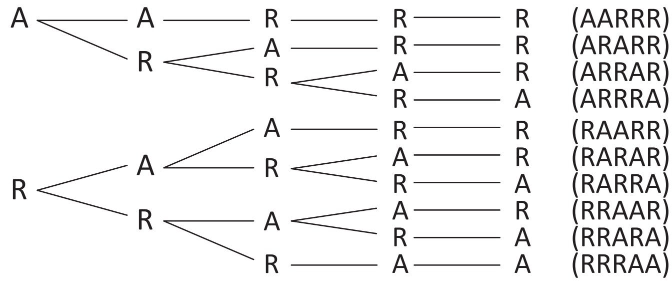
En c2) calcula la P(25, 2) para las letras y luego P con repetición de los números después aplica el principio del producto para obtener le resultados.

Ejemplo 1.8
Un barco manda señales utilizando banderas de colores. Si el barco tiene tres banderas azules y dos rojas. ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer?

Solución: Si las 5 banderas fueran diferentes entre sí se tendría 5! = 120 señales distintas, pero como 2 son de un color y 3 son de otro, entonces se tiene un número x de permutaciones que es menor que 5!.
Si las 2 banderas rojas fueran distintos entonces se tiene 2! Formas de colocarlas y por el principio de multiplicación tendríamos $x(2!)$ de la misma manera con las 3 banderas azules, si estas fueran diferentes se tiene 3! formas de colocarlas y tendríamos $x(2!)(3!)$ y esto debería ser igual a 5! Despejando se tiene:

$$x(2!)(3!) = 5! \qquad x = \frac{5!}{2!3!} \qquad x = 10$$

Otra forma de obtener las señales que se pueden hacer es utilizando el diagrama de árbol.



Hay 10 formas diferentes de obtener señales.

Nota que el diagrama de árbol se vuelve más complicado cuando la cantidad de elementos involucrados es mayor

Por lo tanto, surge

Teorema 1.7. Permutaciones con repetición de elementos distintos. Las permutaciones de n elementos de los cuales p_1 son de un tipo, p_2 son de otro tipo, p_k de otro tipo, donde $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$ se denota por:

$$P_{rep}(n, (p_1, p_2, \ldots p_k)) = \frac{n!}{(p_1)!(p_2)! \ldots (p_k)!}$$

Ejercicio 1.10 **[C]**

a) Calcule
   a1) $P_{rep}(10, (5, 3, 2))$ a2) $P_{rep}(12, (6, 6))$
   a3) $P_{rep}(6, (2, 2, 2))$ a4) $P_{rep}(9, (4, 3, 2))$
b) Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4 ¿Cuántos números de 9 cifras se pueden formar?
c) Se ordenan en fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí. ¿De cuantas formas posibles pueden ser ordenadas?
d) Una persona intenta recordar una clave de 6 letras que ha olvidado, sin embargo, recuerda que esta clave, estaba formada utilizando 2 veces cada una de las iniciales de su nombre (a, b, c) ¿Cuántas posibles claves puede formar?

Ejemplo 1.9. Cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de química serán colocados en un librero. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar si

a) Los libros de cada materia deben estar juntos.
b) Solo los de matemáticas tienen que estar juntos.

Solución

Como los libros de cada materia son diferentes, se tiene tres conjuntos

a) Considerar cada conjunto de libros de una materia como una unidad por lo tanto hay P(3) = 3! = 6 maneras de ordenar los libros por materia. Además, se debe considerar también las permutaciones entre cada materia por lo que tenemos.

Otra forma de aplicar permutaciones

P(3) = P(3, 3)

P(4) = 4! = 24 para matemáticas
P(6) = 6! = 720 para física
P(2) = 2! = 2 para química

Por el principio de la multiplicación se tendría:
Total de Permutaciones = P(3)(4! x 6! x 2!)
= 6 · 24 · 720 · 2
= 207,360 Diferentes maneras de colocar los libros

Aplicando el principio del producto en permutaciones.

b) Se considera los libros de matemáticas como una unidad por lo que se tiene:
Una unidad correspondiente a matemáticas, 6 unidades distintas de física y 2 unidades distintas de química. Por lo tanto, hay:
P(9) = 9! maneras de ordenar 9 unidades y por cada una de ellas hay
P(4) = 4! maneras posibles de ordenar los 4 libros de matemáticas
En total hay
P(9) x P(4) = 9! x 4! = 8,709,120 maneras de colocar los libros.

Los libros de matemáticas se pueden combinar entre sí

Ejercicio 1.11. Hay que colocar a 5 hombres y a 4 mujeres en una fila, de manera que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Clase 5. Combinación 1

Ejemplo 1.10. Se tiene un grupo de 5 estudiantes Bairon, Henry, Lisa, Marcela y Tomás, tres estudiantes son seleccionados para hacer un grupo de estudio, ¿Cuántos equipos pueden formar?

[A]

Nota que el grupo será formado sin importar el orden de los integrantes.

Solución:
Si el orden importa se tiene la siguiente solución.

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Sin embargo se debe considerar que el orden no importa.
Si se hacen los grupos tenemos las siguientes posibilidades:

Equipos Posibilidades
(B, H, L)------------------------→ BHL, BLH, HBL, HLB, LBH, LHB.
(B, H, M)-----------------------→ BHM, BMH, HBM, HMB, MBH, MHB
(B, H, T)------------------------→ BHT, BTH, HBT, HTB, THB, TBH
.
.
.
(L, M, T) -----------------------→ LMT, LTM, MLT, MTL, TLM, TML

Total de grupos x 3! = Total de permutaciones

Se hizo una permutación de 3 personas de un grupo de 5, lo importante en este caso es que en cada grupo hay 6 permutaciones.

Considerando lo anterior se debe dividir por el número de equipos extra que tienen, es decir: P(5, 3) ÷ 3!
Por lo tanto 60 ÷ 6 = 10 equipos
A este proceso se le llama combinación.

Definición 1.3
Una combinación es una colección de objetos donde el orden no importa.

El símbolo C(n, r) denota el número de combinaciones de r objetos elegidos de un conjunto de n objetos.
El total de combinaciones C(n, r) es igual al número de permutaciones P(n, r) dividido por r! (número de permutación dentro de cada combinación).
De lo cual surge el siguiente teorema:

[B]

Teorema 1.8. El número de combinaciones de r objetos elegidos de n objetos, donde $0 \le r \le n$ es:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Una combinación también puede ser expresada como nCr o $\binom{n}{r}$ y se lee "n elementos tomados en grupos de r"

Ejercicio 1.12. Evalué
a1) C(6, 2) a2) C(7, 4) a3) C(10, 10) a4) C(9, 3)

Ejemplo 1.11. Un grupo de 9 estudiantes forman un club de estudio y seleccionan un miembro como presidente. Se desea formar un grupo de 4 estudiantes

a) ¿Cuántas combinaciones se pueden formar en total?
b) ¿Cuantos grupos incluyen al presidente?
c) ¿Cuantos grupos no incluyen al presidente?

Solución
a) El total de combinaciones lo obtenemos aplicando el teorema 1.8

$$C\,(9,4) = \frac{9!}{(9-4)!4!} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = 126$$
(Respuesta)

b) El presidente está en el grupo, por lo que los otros 3 miembros deben ser seleccionados de los 8 estudiantes.

$$C(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = 56$$ (Respuesta)

c) Si el presidente no está en el grupo, tenemos.

$$\underbrace{C(9, 4)}_{\text{Total de combinaciones}} - \underbrace{C(8, 3)}_{\text{Combinaciones donde está el presidente}} = 126 - 56 = 70$$ (Respuesta)

Clase 6. Combinación 2

Ejercicio 1.13

a) ¿Cuántos grupos de 4 integrantes pueden ser formados de un grupo de 15 personas?

b) Una moneda se lanza 5 veces ¿De cuántas maneras se puede obtener 2 caras y 3 escudos?

c) En un examen hay 10 preguntas ¿De cuántas maneras se pueden obtener 7 o más respuestas correctas?

d) Se selecciona 6 cartas de una baraja de 52 cartas.
   - d1) ¿De cuántas maneras se pueden elegir un conjunto de 6 diamantes?
   - d2) ¿De cuántas maneras se pueden elegir un conjunto de 6 corazones ó 6 tréboles?

e) En un grupo de estudiantes hay 6 varones y 5 mujeres. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar un equipo de 4 personas donde haya 2 mujeres y 2 varones?

f) Una bolsa contiene 8 mables de diferentes colores de los cuales uno es azul.
   - f1) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 mables?
   - f2) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 mables donde no haya azul?
   - f3) ¿De cuántas maneras se puede elegir un grupo de 5 mables incluyendo el azul?
   - f4) Escriba la expresión que muestra que la respuesta de f1) es la suma de f2) y f3).

[A]

Aplique el principio de la multiplicación C(mujeres) x C(varones)

Ejercicio 1.14. Triángulo de Pascal

Utilizando la fórmula de combinaciones. Completa las primeras 6 filas del triángulo de Pascal (C(n, r) donde n es la fila y r es la posición n = 0, 1, 2,… r = 0, 1, 2,…, n)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \square & & 1 & & & & \\
 & & & \square & & 2 & & \square & & & \\
 & & 1 & & 3 & & \square & & 1 & & \\
 & \square & & \square & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & \square & & 10 & & 5 & & \square
\end{array}
$$

¿Qué puedes concluir de los extremos del triángulo?

¿Si se desea encontrar la fila 7, es necesario la fórmula? Explique.

[B]

Considere:

C(0,0)

C(1,0) C(1,1)

C(2,0) C (2,1) C(2,2)

C(3,0) C(3,1) C(3,2) C(3,3)

Ejercicios de la lección

a) En un aula de clases hay 26 estudiantes, todos los estudiantes hablan miskito o español y algunos hablan ambos. Si 18 de los estudiantes pueden hablar miskito y 14 pueden hablar español.
   a1) ¿Cuántos estudiantes pueden hablar español y miskito?
   a2) ¿Cuántos estudiantes pueden hablar miskito pero no español?

b) Se quiere usar un código de 4 letras usando el alfabeto de 28 letras. ¿De cuántas maneras diferentes se puede obtener el código?
   b1) Si se permite repetir   b2) Si no se permite la repetición

c) Si se lanzan dos dados, ¿Cuántas maneras hay para obtener dos números diferentes?

d) De cuántas maneras se puede seleccionar una carta con cara y roja o una carta As negro de una baraja de 52 cartas.

e) En un salón se tiene cierta cantidad de sillas acomodadas en fila y cierta cantidad de personas. De cuantas maneras distintas se puede acomodar las personas en las sillas si tenemos:
   e1) 5 sillas, 5 personas   e2) 5 sillas 8 personas   e3) 8 sillas y 5 personas

f) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar que no tienen dígitos 0 ni 1?

g) Evalué cada una de las siguientes expresiones:
   g1) 8!   g2) 9! ÷ 7!   g3) 7 · 7!   g4) 0!
   g5) P(13, 8)   g6) P(15, 2)   g7) P(15, 15)

h) En un aula de clase hay 14 estudiantes de los cuales 8 son mujeres y 6 varones.
   h1) ¿De cuántas maneras puede el grupo colocarse en línea para una foto?
   h2) ¿De cuántas maneras pueden tomarse una foto con las mujeres al frente y los varones en la fila de atrás?
   h3) ¿De cuántas maneras se puede elegir al azar un comité de tres miembros incluyendo: presidente, secretario y tesorero?

i) ¿De cuántas formas diferentes, puede un alumno contestar 8 preguntas de un examen de verdadero o falso?

j) Evalué cada una de las siguientes expresiones.
   j1) C(13,8)   j2)C(15,15)   j3) C(13,2)

k) Se seleccionaron 6 cartas de una baraja sin reemplazo.
   k1) ¿De cuántas maneras puede elegirse 6 corazones?
   k2) ¿De cuántas maneras puede seleccionar un grupo de tres corazones y tres espadas?
   k3) ¿De cuántas maneras puede elegir un grupo de seis corazones o seis espadas?

l) Un estudiante tiene que elegir 7 de 10 preguntas de un examen
   ¿De cuántas maneras puede elegirlas?
   Y, si las cuatro primeras son obligatorias, ¿de cuantas maneras puede elegirlas?

*m) Tres atletas toman parte en una competencia. ¿De cuántas maneras pueden llegar a la meta? (Pueden llegar todos juntos).

Clase 1 principios de conteo.

Dibuje un diagrama de Venn.

Clase 2, 3 y 4 Permutación

Puede dejar expresados resultados muy grandes como en h1.

Clase 5 y 6 Combinaciones

Lección 2. Probabilidad

Clase 1. Definición de probabilidad

Ejercicio 2.1. (Juego de oportunidades)
Para llevar a cabo este juego se necesitan un dado, una moneda, una baraja de 52 cartas.
Instrucciones:
a) En cada juego se debe predecir cuales podrían ser los posibles resultados y registrarlos en la tabla.
b) Realizar el experimento 10 veces y registrar los resultados.
c) Si los resultados coinciden con la predicción se debe escribir un cheque (✓) en la fila de la predicción.

Experimento 1
Lanzar una moneda y predecir los resultados más frecuentes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

Experimento 2
Lanzar un dado predecir qué número es más frecuente (1, 2, 3, 4, 5, ó 6)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

Experimento 3
Sacar una carta y predecir qué color es más frecuente (Roja o negra)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

Experimento 4
sacar una carta y predecir qué carta es más frecuente (Trébol, Diamante, Espada o Corazón)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Predicción										

*Responder las siguientes preguntas.
a) ¿En cuál de los experimentos las predicciones fueron mayormente coincidentes?

[A]

Experimento: Es el acto de hacer una observación o realizar una medición que proporcione datos numéricos o no numéricos.

Experimento Aleatorio: Conjunto de pruebas cuyos resultados están determinados únicamente al azar.

Resultado: Es uno de los posibles datos que pueden obtener en un experimento.

Para realizar una predicción de un resultado en los experimentos anteriores se hace uso de la probabilidad.

Definición 2.1. Probabilidad
Es la rama de la matemática que permite hacer predicciones de la ocurrencia de los resultados de un experimento, de los cuales no es posible tener certeza.

b) ¿Cuáles son las posibilidades o posibles resultados que se tiene cuándo?
   b1) Se lanza la moneda.
   b2) Se lanza el dado.
   b3) Se saca una carta de color.
   b4) Se saca un tipo de carta

A estos resultados se les llama: Espacio Muestral.

Definición 2.2. Espacio Muestral
Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se denota con la letra S.

c) ¿Cuántas veces obtuvo:
   c1) Cara?
   c2) el número 3?
   c3) color rojo?
   c4) Diamante?

A los enunciados anteriores se les llama Evento.

Definición 2.3. Evento
Es un sub conjunto de un especio muestral. Se denota con la letra E.

Si se quiere conocer la probabilidad de obtener un evento en particular se pueden utilizar dos tipos de probabilidad:
- Probabilidad experimental
- Probabilidad teórica

Definición 2.4. Probabilidad Experimental
Es la probabilidad que un evento ocurra basado en los resultados de un experimento. Se denota por $P_e(E)$ y se calcula:

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

La probabilidad experimental es el límite de la frecuencia relativa.

[B]

En este curso estudiamos con más detalle la probabilidad teórica.

$P_e(E)$ Se lee: Probabilidad experimental de que el evento E ocurra.

Definición 2.5. Probabilidad Teórica
Es la probabilidad que un evento ocurra basado en todos los posibles resultados del espacio muestral. Se denota por P(E) y se calcula:

$$P(E) = \frac{\text{número de elementos en E}}{\text{número de elementos en S}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Cuando todos los eventos de S tienen la misma probabilidad.

n(E) Número de elementos en el evento E.
n(S) Número de elementos en el espacio muestral S.

Ejercicio 2.2. Con los resultados obtenidos en los experimentos 1, 2, 3, y 4 del Ejercicio 2.1 complete la siguiente tabla.

Experimento	Evento	Probabilidad Experimental	Probabilidad Teórica
Lanzar una moneda	Cara		
Lanzar un dado	5		
Sacar una carta (color)	Rojo		
Sacar una carta (tipo)	Trébol		

La probabilidad teórica es la misma para todos los eventos de un mismo experimento.

¿Qué se puede concluir de la probabilidad Experimental?
¿Qué se puede concluir de la probabilidad Teórica?
¿Son iguales?

De aquí en adelante, se considera que todos los eventos de un mismo experimento tienen la misma probabilidad de que ocurran.

Clase 2. Definición de probabilidad (Ejemplos simples)

Ejemplo 2.1. Calcular la probabilidad teórica

[A]

a) En un aula de clase hay 20 mujeres y 15 varones, si se escoge una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de escoger mujer?
   Solución
   S: Son todos los estudiantes del aula
   $n(S) = 15 + 20 = 35$
   A: Es el evento de que la persona escogida sea mujer.
   $n(A) = 20$
   $P(A) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

b) Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos números cuya suma es 7?
   Solución
   $n(S) = 6^2 = 36$
   A: evento de sacar dos números cuya suma es 7; $n(A) = 6$
   $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Consultar el ejemplo 1.1 Lección 1 clase1.

c) En una bolsa hay 5 pelotas, 2 blancas y 3 rojas se extrae una pelota al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea roja?
Solución

$n(\text{S}) = 5$

A: es el evento de sacar una pelota roja, $n(\text{A}) = 3$

$\text{P(A)} = \frac{3}{5}$

Ejercicio 2.3 **[B]**

a) Si se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea un As?

b) Se lanza al aire una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un escudo en el primer lanzamiento?

c) Se lanza un dado, calcule la probabilidad de:

c1) Obtener un número menor que 5.

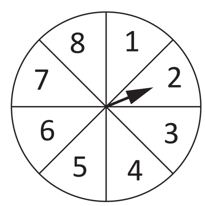
c2) Un número par múltiplo de 3.

c3) Un número impar menor que 5.

c4) Un número primo.

d) De 25 televisores que se fabrican 1 sale defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de escoger un televisor defectuoso de 100 televisores?

e) Se gira una flecha en una ruleta, si la probabilidad de seleccionar alguna línea es nula ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3?



f) En una caja hay 90 tarjetas numeradas del 10 al 99, se saca una tarjeta al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 4?

Clase 3. Eventos

Ejemplo 2.2. Se lanzan dos dados, ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener donde la suma de los números obtenidos sea 5 ó 8?

Solución.
Es importante considerar que en este experimento se está pidiendo la ocurrencia de dos posibles eventos:

A: Obtener dos números cuya suma sea 5.

B: Obtener dos números cuya suma sea 8

n(A) = 4
n(B) = 5
n(A o B) = n(A) + n(B)   (Principio de conteo de la suma)
= 4 + 5 = 9

La expresión anterior se puede escribir como:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ y se llama Unión de Eventos.

Definición 2.6. Unión de Eventos.
Sea A y B dos eventos cualesquiera de un espacio de eventos, la unión de los eventos A y B es el evento que consta de los elementos que pertenecen a A o B y se representa por $A \cup B$.

Ejercicio 2.4. Dados dos eventos, exprese la unión de los eventos pedidos, si:

A = {2, 4, 6, 8},   B = {1, 3, 5, 7, 9},   C = {cara, escudo},

D = {azul, rojo, negro, verde},   E = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17},
el espacio muestral está dado por $S = A \cup B \cup C \cup D \cup E$

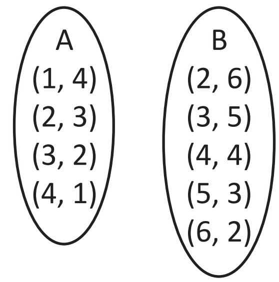
a) $A \cup B$ b) $A \cup C$ c) $C \cup D$

d) $A \cup E$ e) $A \cup B \cup E$

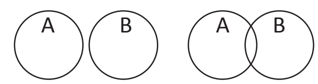
En el Ejercicio 2.4, los eventos B y E tienen elementos
en común {3, 5, 7}. Este evento resulta de la intersección de B y E.

Definición 2.7. Intersección de Eventos.
Sea A y B dos eventos cualesquiera de un espacio de eventos.
La intersección de los eventos A y B es el evento que contiene los elementos que simultáneamente pertenecen a A y a B y se representa por $A \cap B$.

[A]



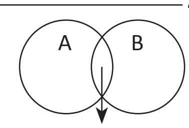
La unión de dos eventos se puede dar cuando no tengan nada en común o compartan elementos en común



$A \cup B$ $A \cup B$

Los elementos que se repiten se cuentan solo una vez.

[B]



$A \cap B$

Si los eventos no tienen elementos en común la intersección es vacía.

Ejercicio 2.5. Se lanzan tres dados y se registra la suma de los puntos en el siguiente subconjunto del espacio muestral:

{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}

Considerar los eventos siguientes:

A: Salir un número múltiplo de 3.

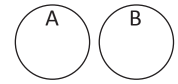
B: Salir un número primo.

C: Salir un número mayor o igual que 12.

Determinar:

a) $n(A \cap B)$ b) $n(A \cap C)$

c) $n(A \cap B \cap C)$ d) $n(B \cap C)$



$A \cap B = \varnothing$

Definición 2.8. Eventos Mutuamente Excluyentes
Sean A y B dos eventos, se dice que A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si no tienen elementos en común, es decir, si: $A \cap B = \varnothing$

[C]

En el Ejemplo 2.3, A y B son mutuamente excluyentes. En el Ejercicio 2.4, B y E no son mutuamente excluyentes.

Ejemplo 2.3. En el lanzamiento de un dado se establecen los eventos:

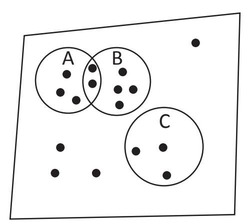
A: Obtener número par, A = {2, 4, 6}

B: Obtener número impar, B = {1, 3, 5}

$$A \cap B = \varnothing$$

Ejercicio 2.6.

a) La siguiente figura, muestra un diagrama de un espacio muestral S de un experimento. Se indican los eventos A, B, y C y sus resultados representados por puntos. Encuentre:

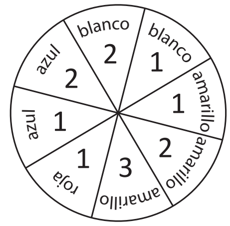


a.1) $n(S)$
a.2) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$
a.3) $n(A \cup B)$
a.4) $n(A \cap B)$
a.5) $n(A \cup C)$
a.6) ¿Qué eventos son mutuamente excluyentes?

b) Dados los siguientes eventos identifique, ¿Cuáles de ellos son mutuamente excluyentes y cuáles no?
Experimento: En una bolsa hay 4 bolas azules numeradas del 1 al 4 y se extrae una bola.
b1) Sacar una bola con el número 1 ó 4.
b2) Sacar una bola con un número par o mayor que 2.
b3) Sacar una bola con un número impar o número primo.
b4) Sacar una bola con número múltiplo de 2 o con el número 5.

Clase 4. Propiedades de la probabilidad

Ejemplo 2.4. Se gira una ruleta de 4 colores dividido en 8 partes iguales de las cuales 2 son blancas, 3 son amarillas, 1 es roja y 2 azules.



[A]

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color amarillo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color azul?

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un color?

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener el color verde?

Note que en la ruleta no hay color verde, por lo que el número de elementos en el evento D es cero.

Solución:
El espacio muestral está dado por los colores de la ruleta: S = {blanco 1, blanco 2, amarillo 1, amarillo 2, amarillo 3, azul 1, azul 2, rojo}; n(S) = 8.
Sean los siguientes eventos:

A: Salir el color amarillo; n(A) = 3 $\quad P(A) = \frac{3}{8}$

B: Salir el color azul; n(B) = 2 $\quad P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

C: Salir un color; n(C) = 8 $\quad P(C) = \frac{8}{8} = 1$

D: Salir el color verde; n(D) = 0 $\quad P(D) = 0$

En c) la probabilidad que salga un color siempre será posible.

De lo anterior se puede concluir las propiedades de la probabilidad:

Propiedades de la probabilidad:
1) Para cualquier evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$
2) $P(\varnothing) = 0$
3) P(S) = 1; S es el espacio muestral.

En a) y b) se aplicó propiedad 1
En c) se aplicó propiedad 3
En d) se aplicó propiedad 2

Ejemplo 2.5. En el Ejemplo 2.2, determine la probabilidad de obtener una suma de 5 ó 8.
Solución:
n(S) = 36
n(A) = 4
n(B) = 5

$$P(A \cup B) = \frac{4+5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

[B]

En el Ejemplo 2.2, los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

Regla de la adición para eventos mutuamente excluyentes:
Para todo evento A y B mutuamente excluyentes se da:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejercicio 2.7.

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un Rey (negro o rojo) o una Reyna roja en una sola extracción de una baraja de 52 cartas?

b) En una urna hay 10 pelotas numeradas del 1 al 10. Calcule la probabilidad de:
b1) Sacar un número múltiplo de 5.
b2) Sacar un número múltiplo de 5 o divisor de 4.

c) Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes y la probabilidad de A es 0.2 y la probabilidad de B es 0.7. Calcule la probabilidad de que ocurran ambos eventos.

d) Una empresa rentadora de carros tiene disponibles de la marca X, 3 carros rojos, 4 blancos y 2 negros; de la marca Y, 6 rojos, 2 blancos y 5 negros. Si se selecciona un carro al azar para rentarlo a un cliente, ¿cuál es la probabilidad de:
d1) Sea X y de color blanco.
d2) Sea de la marca Y.
d3) Sea de color blanco o de color rojo
d4) Sea Y y de color negro o sea X de color blanco

e) Una bolsa contiene 6 caramelos rojos, 3 caramelos verdes y 2 caramelos amarillos; si se saca un caramelo al azar, calcule la probabilidad de que éste sea:
e1) Verde.
e2) Amarillo.
e3) Rojo o amarillo.
e4) Verde o rojo.

Clase 5. Regla de adición

Ejemplo 2.6. Se lanzan dos dados, calcule la probabilidad de que la suma sea 8 o los sumandos sean pares.

[A]

Solución:

$n(S) = 36.$

A: La suma sea 8; $n(A) = 5$

B: Los sumandos sean pares; $n(B) = 9$

La probabilidad de que la suma sea 8 o los sumandos sean pares está dada por la regla de la adición:
Pero hay elementos en común que se deben restar:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

Los eventos no son mutuamente excluyentes

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

De lo anterior se concluye en:

Regla de la adición:
Sean A y B dos eventos, la probabilidad de la ocurrencia de los eventos A o B está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el Ejemplo 2.5.
$P(A \cap B) = 0$

Ejercicio 2.8.

a) En una baraja de 52 cartas calcule la probabilidad de sacar un As o un Corazón rojo en una sola extracción.
b) En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Calcule la probabilidad de sacar un número par o un número primo.
c) En un grupo de 85 pacientes se tienen los datos siguientes:

Tipo de sangre	Hombres	Mujeres	Total
O	12	15	27
A	21	25	46
B	5	2	7
AB	2	3	5
Total	40	45	85

Calcular la probabilidad de que al seleccionar un paciente al azar se de:

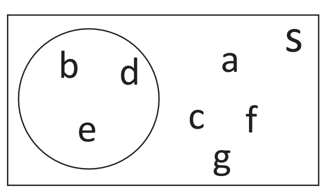
c1) Tipo sanguíneo A.
c2) Tipo sanguíneo A o sea mujer.
c3) Tipo sanguíneo B.
c4) Sea hombre.
c5) Sea mujer.
c6) Tipo sanguíneo A o B.
c7) Tipo sanguíneo A o AB.
c8) Tipo sanguíneo B o sea hombre.

Clase 6. Propiedades del complemento de un evento

Ejemplo 2.7. Se tiene espacio muestral S = {a, b, c, d, e, f, g}

[A]

Sea A = {b, d, e}
¿Qué elementos no están en A?
R: a, c, f, g.
A estos elementos se les llama el complemento de A ya que no están en el evento A, pero pertenecen al espacio muestral S.



Ejemplo 2.8. Se lanza un dado y se dan los siguientes eventos:
A: Obtener un 6.
B: Obtener un número diferente de 6.
Las posibilidades para A es una, {6}; sin embargo, para B es {1, 2, 3, 4, 5}
A y B son eventos complementarios ya que al unirlos conforman el espacio muestral.

Definición 2.9. Complemento de un evento.
Sea A un evento de un espacio muestral, el complemento de A es todos aquellos elementos que están en el espacio muestral pero que no pertenecen a A.
El complemento de A se denota por $\overline{A}$ o A^c; $A \cup \overline{A} = S$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

$$n(S) = n(A) + n(\overline{A})$$

En este libro se usa con frecuencia $\overline{A}$ para complemento de A.

Ejercicio 2.9. Determine los elementos del complemento de los siguientes eventos:

a) Si se extrae un mable blanco de una caja que contiene: 1 mable blanco, 1 rojo y 2 azules. A es el evento de sacar un mable blanco

b) Si se tiene como espacio muestral S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. A es el evento de obtener un número par.

c) Se lanza una moneda. A es el evento de obtener cara.

Ejemplo 2.9. Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas y A es el evento de sacar una carta de diamante. Calcule la probabilidad de que A ocurra.

[B]

Solución:

$n(S) = 52$ $\quad$ $n(A) = 13$; hay 13 cartas de diamante

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ (Respuesta)

Si se aplica la regla de adición, tenemos:
P(sea trébol) + P(sea corazón) + P(sea espada)

$$\frac{13}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$$

Si obtenemos el complemento de A

$n(\overline{A}) = 52 - 13 = 39$ $\quad$ Por tanto, $\quad$ $P(\overline{A}) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$

En este caso se pide conocer la probabilidad de sacar una carta que sea trébol o espada o corazón.

De lo anterior se deduce:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Teorema 2.1
Si A y $\overline{A}$ son dos eventos complementarios entonces $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
La probabilidad de que un evento ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que el evento no ocurra.

Si A y $\overline{A}$ son dos eventos complementarios recuerde que:
$A \cup \overline{A} = S$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Ejercicio 2.10.
De un grupo de 40 estudiantes se le aplicó una prueba de matemáticas, y se obtuvieron los resultados siguientes:

Nota	Hasta (%) 2	Entre (%) 3 y 6	Entre (%) 7 y 10
Cantidad de estudiantes	2	8	30

a) Se elige un alumno al azar. Calcule la probabilidad de:
   a1) Haya obtenido una nota entre 3 y 6.
   a2) Que no obtenga una nota entre 7 y 10.
   a3) Que no obtenga una nota hasta 2.

b) Si la probabilidad de que un futbolista logre el gol en un penal es de 0.89; ¿Cuál es la probabilidad de que no logre el gol?

c) En un contenedor hay 1,000 televisores, de los cuales $\frac{1}{40}$ son defectuosos, si se saca un televisor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un televisor no defectuoso?

Clase 7. Probabilidad condicional

Definición 2.10. Probabilidad Condicional.
Sea A y B dos eventos en un grupo muestral S, la probabilidad de que el evento B ocurra dado que el evento A ha ocurrido, es una probabilidad condicional y se denota por P (B/A) y se lee: "probabilidad de B dado A"

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Teorema 2.2
Sea A y B dos eventos de un espacio muestral la probabilidad de que B ocurra dado A está dada por:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Del Teorema 2.2 se puede deducir:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

[A]

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo 2.10. La siguiente muestra el número de estudiantes de un instituto, matriculados en cada una de los niveles de enseñanza desde 7mo a 10mo grado.

	7mo.	8vo.	9no.	10mo.	Total
Mujeres	50	82	86	82	300
Varones	73	99	103	125	400

a) ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar a un estudiante que sea de 7mo grado, dado que sea mujer?

Solución:

Los eventos son:

A: Es mujer. B: Es estudiante de 7mo. $n(A \cap B) = 50$

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$$ $n(A) = 300$

b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un estudiante de 9no dado que sea varón?

Solución:

Eventos: A: Es varón. B: Es de 9no grado $n(A \cap B) = 103$

$$P(B/A) = \frac{103}{400}$$ $n(A) = 400$

Leer los datos de la tabla para obtener la intersección de eventos,

Columna

	7mo.	
Mujeres	50	Fila
Varones	73	

La intersección de fila y columna es el dato

Ejercicio 2.11. Considerando la tabla del Ejemplo 2.10, calcule la probabilidad de:

a) El estudiante sea de 10mo grado dado que sea mujer.

b) El estudiante sea de 10mo grado dado que sea varón.

c) El estudiante es de 8vo grado dado que sea mujer

d) Sea varón dado que sea estudiante de 8vo grado.

e) Sea mujer dado que sea estudiante de 9no grado.

Clase 8. Aplicación de la probabilidad condicional

Ejemplo 2.11. Una urna contiene tres bolas rojas y dos bolas blancas idénticas. Se extraen dos bolas al azar, una después de la otra, sin reemplazo: **[A]**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera bola es roja?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?

Solución:

Los eventos son:

A: La primera bola es roja.
B: La segunda bola es roja.
$n(S) = 5$

a) $P(A) = \frac{3}{5}$, son 3 bolas rojas de 5 que hay en la urna

b) $P(B/A) = \frac{2}{4}$, en este caso en la urna quedan 4 bolas de las cuales 2 son rojas.
$= \frac{1}{2}$

c) Como $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ y se pide encontrar $P(A \cap B)$

se tiene: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$
$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Ejercicio 2.12.

a) En una bolsa se introducen unas tarjetas con los nombres de los estudiantes de una clase con 16 mujeres y 12 varones; se extraen dos tarjetas al azar una después de la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos tarjetas con el nombre de dos mujeres?
a1) Con devolución de la primera tarjeta.
a2) Sin devolución de la primera tarjeta.

b) Una caja contiene 15 caramelos de limón y 15 caramelos de menta. Se extraen 2 caramelos al azar, hallar la probabilidad de que el primero sea de menta y el segundo de limón.
b1) Con devolución del primer caramelo.
b2) Sin devolución del primer caramelo.

c) La siguiente tabla muestra la cantidad de estudiantes matriculados por sección de matemáticas.

Sección	Mujeres	Varones	Total
A	30	24	54
B	40	60	100
C	30	48	78
Total	**100**	**132**	**232**

Se escoge un estudiante al azar, calcule la probabilidad de:
c1) Pertenezca a la sección A.
c2) Sea mujer.
c3) Sea mujer que pertenezca a la sección B.
c4) Pertenezca a la sección C sabiendo que es mujer.
c5) Sea un varón sabiendo que pertenece a la sección A.

*d) En una urna hay 5 letras E, I, O, T, X. Se extraen sucesivamente las 5 letras. Calcule la probabilidad que se forme la palabra ÉXITO en los siguientes casos:
d1) Con devolución.
d2) Sin devolución.

Clase 9. Eventos independientes

Ejemplo 2.12. Un dado rojo y un dado verde son lanzados. **[A]**
Sean los eventos:
A: Obtener un número par en el dado rojo.
B: Obtener un número múltiplo de 3 en el dado verde.

Los elementos de A son A = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

Los elementos de B son B = {(1,3), (1,6), (2,3), (2,6), (3,3), (3,6), (4,3), (4,6), (5,3), (5,6), (6,3), (6,6)}

¿Cuál es la probabilidad de que se dé A?

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra B?

¿La ocurrencia del evento A afecta al evento B y viceversa?

Solución:

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

No afecta la ocurrencia

Los eventos A y B se les llama eventos independientes.

La ocurrencia de A no afecta la de B.

A y B son independientes y, si A y B no son independientes se dice que son dependientes.

Definición 2.11. Eventos Independientes.
Sean A y B dos eventos, se dice que A y B son eventos independientes, si la ocurrencia o la no ocurrencia de A no afecta la ocurrencia o la no ocurrencia de B y viceversa. Se denota por:

$$P(A/B) = P(A) \quad o \quad P(B/A) = P(B)$$

Ejercicio 2.13. Calcule la probabilidad de que A ocurra, dado que ocurre B y la probabilidad de que B ocurra dado que ocurre A. En el Ejemplo 2.12. **[B]**

Teorema 2.3. Probabilidad de eventos independientes.
Sean A y B dos eventos independientes en un espacio muestral, la probabilidad de que A y B ocurran están dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejercicio 2.14.

a) Si se lanza una moneda normal tres veces, calcule la probabilidad de obtener tres caras.

b) Se extrae una carta de una baraja de 52 cartas, se devuelve y se extrae una segunda carta, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean Reyes?

c) Se lanza un dado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo lanzamiento resulte un número impar?

d) Un estudiante responde al azar 5 preguntas de verdadero o falso en una prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que las acierte todas?

e) Una persona ha olvidado el código de un candado de combinaciones de 4 dígitos, que se puede formar con las cifras del 0 al 9 y estas pueden repetirse. La persona recuerda dos cifras intermedias; además se sabe que el primer número es par distinto de cero y que la última cifra es impar mayor que 4. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el código correcto?

Clase 10. Experimentos independientes

Ejemplo 2.13. Ejemplos de experimentos: **[A]**

a) Lanzar un dado y lanzar una moneda.
b) Extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5 y lanzar un dado.
c) Extraer una carta 5 veces de una baraja con devolución.
d) Lanzar una moneda 10 veces.
e) Lanzar un dado 5 veces.

¿Qué características tienen entre sí los experimentos?
¿Qué puedes concluir de los resultados que se obtendrán en cada caso?

A los experimentos anteriores se les conoce como experimentos Independientes.

> **Definición 2.12.** Experimentos Independientes.
> Dos experimentos son independientes si el resultado que se obtiene en uno de ellos, no afecta en los resultados que se obtenga de otro.

Ejemplo 2.14. Se lanza un dado y se gira una ruleta que tiene 4 colores (rojo, azul, amarillo y verde). ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 5 y el color azul? **[B]**

Solución:
Sea A: El evento de obtener el número 5, en el experimento del dado.
Sea B: El evento de obtener el color azul al girar la ruleta.

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

A y B son eventos de dos experimentos independientes.
Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15. Se toma una moneda y un dado.
Calcular la probabilidad de obtener cara y el número 2.

Solución:
Sea A: El evento de obtener cara en el experimento de lanzar la moneda.
Sea B: El evento de obtener el número 2 en el experimento de lanzar un dado.
A y B son eventos de dos experimentos independientes

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Los experimentos independientes tienen su propio espacio muestral; al lanzar el dado
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; al lanzar la moneda
S = {cara, escudo}

Teorema 2.4. Si dos experimentos T_1 y T_2 son independientes, entonces la probabilidad P de obtener eventos A_1 en T_1 y evento A_2 en T_2 es:

$$P = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

Cada lanzamiento es un experimento independiente ya que los resultados de una no influyen en los resultados del otro.

Ejemplo 2.16. Se lanza una moneda 3 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 veces escudo?

Solución:
A: evento de obtener escudo en cada lanzamiento

$P(A) = \frac{1}{2}$ Como son tres lanzamientos

$$P(\text{sacar 3 veces escudo}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

¡INTENTE!: Calcule la probabilidad, si son 5 lanzamientos y se desea obtener 3 escudos

Ejemplo 2.17. Se lanza un dado 5 veces, calcule la probabilidad de obtener tres veces el número 1.

Solución:
A: Es el evento de obtener el número 1
Primera lanzada,

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Segunda lanzada,

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Tercera lanzada,

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Cada lanzamiento es un experimento independiente ya que los resultados que se obtienen en cada lanzada no se afectan entre sí.

Aplicando el Teorema 2.3, vemos algunos casos:

$$C(5,3) = \left\{ \begin{array}{cccccl} \multicolumn{5}{c}{\text{Lanzamientos}} & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ O & O & O & X & X & \dots ① \\ O & X & O & X & O & \dots ② \\ X & O & X & O & O & \dots ③ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right.$$

O representa 1
X representa un número diferente de 1

Probabilidad

$$①: \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$②: \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$③: \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Es necesario conocer de cuantas maneras se puede obtener 3 veces uno y para ello utilizamos combinaciones.

$C(5, 3) = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$, por lo tanto en los 5 lanzamientos la probabilidad de obtener 3 veces 1 es:

$$10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888}$$

10 representa las maneras que podemos obtener 1 con los 5 lanzamientos.

Ejercicio 2.15

a) Un examen consta de 5 preguntas de verdadero y falso. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante acierte 3?

*b) En una urna hay 5 pelotas rojas, 6 azules y 1 blanca. Se extraen, al azar, 6 pelotas con reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de:

b1) 3 pelota sean rojas?

b2) 6 pelotas sean azules?

b3) 3 pelotas sean azules, 2 sean rojas y 1 sea blanca?

Clase 11. Probabilidad de experimentos repetidos

La probabilidad de experimentos repetidos se refiere, a la probabilidad de x éxitos en n intentos repetidos en un experimento. Del Ejemplo 2.17, se sabe que:

Si la probabilidad de éxito en un intento individual es P, entonces la probabilidad es:

[A]

> **Teorema 2.5.** Probabilidad de experimentos repetidos.
>
> $$C(n, x) \cdot P^x(1 - P)^{n-x}$$
>
> Se le conoce como probabilidad binomial

La probabilidad binomial, se aplica a experimentos que tienen dos resultados posibles.

*Si P es la probabilidad de éxito, (1 – P) es la probabilidad de fallo.

Ejercicio 2.16. Resuelva los Ejercicios 2.15, aplicando la probabilidad binomial.

Ejemplo 2.18. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda tres veces salgan dos veces cara y una vez escudo?

Solución:

- En cada experimento las posibilidades son dos: cara o escudo.
- Los eventos de cada experimento son independientes y los experimentos también son independientes.
- El valor de la probabilidad de cada experimento es el mismo.

Sea x la cantidad de caras que se obtienen en 3 lanzamientos. Cuando se lanza la moneda la probabilidad de obtener cara o escudo es $\frac{1}{2}$.

Cuando $x = 2$, se tiene:

$$P = \frac{1}{2}, \; n = 3 \text{ lanzamientos}$$

$$C(n, x) \cdot P^x(1 - P)^{n-x}$$

$$= C(3, 2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(3-2)}$$

$$= \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}$$

Ejercicio 2.17.

a) La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de Bachiller en Ciencias y Humanidad es de 0.3; hallar la probabilidad de que un grupo de siete estudiantes matriculados en 10mo grado, finalmente:

a1) Ninguno finalice la carrera.

a2) Finalicen todos, la carrera.

b) Una familia tiene 4 hijos, calcule la probabilidad de que tres de ellos sean niños.

c) En una empresa que hace computadoras, el 10% de sus productos salen defectuosos. Si se toma una muestra de 8 computadoras, determina la probabilidad de que:

c1) Ninguna de las computadoras salga defectuosa.

c2) Solo una de ellas salga defectuosa.

d) Una persona que participa en un concurso debe responder verdadero o falso una afirmación que se le hace, en cada una de seis etapas. Si la persona responde al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en:

d1) Seis etapas.

d2) Cinco etapas.

Ejercicios de la lección

Clase 1 y 2 Probabilidad

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al rodar un dado salga un número primo?

b) En una caja hay 6 bolas: 3 rojas, 2 azules y 1 verde. ¿Cuál es la probabilidad que, al sacar una bola al azar, sea:

b1) Verde.

b2) Azul.

b3) Roja.

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un guante, al azar, este sea derecho rojo de un total de 5 pares de guantes rojos y 5 pares de guantes negros?

d) En una bolsa se tienen 20 fichas numeradas del 1 al 20. Si se saca una al azar, ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número múltiplo de 4?

e) En la entrada a clases, 5 estudiantes guardaron su celular en 5 bolsas oscuras idénticas. Cuando finalizó la jornada, descubren que las bolsas han sido cambiadas de posición. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno escoja su celular en el primer intento?

Clase 4 y 5

f) Se extrae, al azar, una carta en la baraja de 52 cartas. Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

f1) Sacar un 7.

f2) Sacar una carta negra

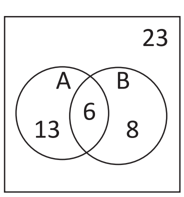
f3) Sacar un As ó un Rey

f4) Sacar un 2 (negro o rojo) ó un 4 negro

f5) Sacar un 3 (negro o rojo) ó un As negro

g) Los siguientes diagramas de Venn, indica el número de resultado de un experimento correspondiente a cada evento y el número de resultados que no corresponden a los eventos. Tomando en cuenta estos datos calcule la probabilidad que se pide.

g1)



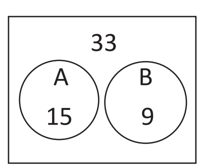
P(A) =

P(B) =

P(A ∪ B) =

P (A ∩ B) =

g2)



P(A) =

P(B) =

P(A ∪ B) =

P(A ∩ B) =

h) La siguiente tabla, muestra el resultado de 515 entrevistas durante una encuesta que se le hizo a estudiantes de diferentes áreas de estudio, respecto a la opinión que tienen sobre la modificación del plan de estudios.

Área	**A Favor (F)**	**En contra (C)**	**No opina (N)**	**Total**
A	110	15	7	132
B	100	10	5	115
D	40	70	30	140
E	38	40	50	128
Total	**288**	**135**	**92**	**515**

Si se elige al azar, una entrevista de las 515. Calcule la probabilidad que el estudiante:
h1) Esté a favor. h2) No opine.
h3) Sea de la carrera E. h4) Esté en contra y pertenezca a la carrera B.
h5) Esté a favor o que pertenezca a la carrera E.
h6) No opina o pertenezca a la carrera A.

i) Si la probabilidad de que un evento ocurra es de 0.35. Calcule la probabilidad de que el evento no ocurra.

Clase 6. Probabilidad del complemento de un evento.

j) En un curso de 50 estudiantes se hace una competencia de cultura general. Se obtienen los siguientes puntos:

PUNTOS	Hasta 2.9	Entre 3 y 3.9	Entre 4 y 7
Número de estudiantes	10	15	25

Si se escoge un estudiante al azar, cuál es la probabilidad de:
j1) No obtener una puntuación entre 3 y 3.9.
j2) No obtener una puntuación entre 4 y 7.
j3) No obtener una puntuación hasta 2.9.

k) La siguiente tabla, muestra la información del personal de una fábrica que ha sido o no capacitado y el servicio que brindan a los clientes de cierta ciudad.

Clase 7 y 8 Probabilidad condicional.

		B (Buen servicio)	**B´ (Servicio deficiente)**	**Total**
C	Capacitado	48	16	64
C´	No capacitado	24	62	86
	Total	**72**	**78**	**150**

Sea B: El evento de que el empleado brinda buen servicio.
B´: El evento de que el empleado no brinda buen Servicio.
C: El evento de que un empleado ha sido capacitado en la fábrica.
C´: El evento de que un empleado no ha sido capacitado en la fábrica.

Si se selecciona un empleado al azar, calcule la probabilidad de escoger:

k1) Un empleado que brinde buen servicio.
k2) Un empleado que ha sido capacitado en la fábrica.
k3) Un empleado que ofrezca buen servicio y ha sido capacitado en la Fábrica.
k4) Un empleado que brinde un buen servicio dado que ha sido capacitado en la fábrica.
k5) Un empleado que brinde un buen servicio dado que no ha sido capacitado en la fábrica.
k6) Un empleado que no brinde buen servicio dado que ha sido capacitado en la fábrica.
k7) Un empleado que no brinde buen servicio dado que no ha sido capacitado en la fábrica.

Clase 9 Eventos Independientes

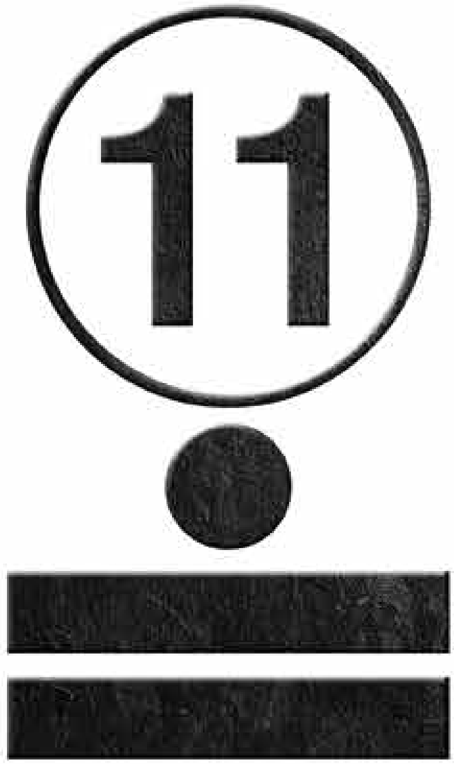
l) Cierta empresa ha recibido 25 solicitudes de empleo para una plaza disponible de gerente. De los aspirantes, 10 tienen más de 30 años y el resto menos de eso. 17 de los aspirantes tienen Licenciatura y 8 tienen Maestría. De los que son menores de 30 años, 6 tienen el grado de Maestría. Si se hace una selección al azar, calcule la probabilidad de que:

l1) Sea seleccionado un aspirante de más de 30 años o que tenga Maestría
l2) Sea seleccionado un aspirante menor de 30 años dado que tenga una Licenciatura.
l3) Sea seleccionado un aspirante menor de 30 años con Licenciatura.
l4) Sea seleccionado un aspirante menor de 30 años y con Maestría.

m) En un examen hay 15 preguntas de las cuales son 5 verdadero o falso y 10 tipo selección con cuatro opciones. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante al responder al azar, acierte 3 de verdadero o falso y 7 de tipo selección?

Clase 10 Experimentos Independientes

n) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda tres veces se obtengan dos caras?



MATEMÁTICA III
Libro del Estudiante

CAMPO DE PELOTA

El Juego de Pelota para el mundo mesoamericano fue la representación simbólica de las fuerzas del inframundo con el mundo terrenal. Al parecer no se trataba de un deporte, ya que el perdedor, normalmente era sacrificado y era a la vez un mensajero a los dioses. El Juego de Pelota de Copán, es uno de los juegos más grandes y mejor conservados del mundo maya.

Fotografía: © José Antonio Ramos Cartagena.

República de Honduras
Secretaría de Educación