República de Honduras
Secretaría de Educación

# MATEMÁTICA III

## Guía del Docente

### Undécimo grado

11

Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

**Nota:** Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

# Presentación

La Secretaría de Educación presenta la **"Guía del Docente"** de Matemática para Educación Media, que tiene su fundamento en el Plan de Estudio y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, misma que fue elaborada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con esta Guía se pretende apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido y las formas de aprendizaje. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos que impacten en la motivación de los jóvenes y como consecuencia, se incremente la retención y aprobación, y se mejore el rendimiento académico de los estudiantes en los centros educativos.

En la búsqueda del cambio hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes realicen una labor educativa con calidad y pertinencia y la Secretaría de Educación a su vez, se compromete para que la población tenga acceso a una educación, que mejore en cada generación.

Secretaría de Estado
en el Despacho de Educación

# Instructivo de uso
# “Guía del Docente”

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar los contenidos para cada grado, prescritos en el Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, usando como parte del proceso el Libro del Estudiante.

Hay un plan de estudio para todas las clases y se espera que el docente lo ajuste según el rendimiento y el entorno de sus estudiantes.

En el Libro del Estudiante hay una diversidad de ejercicios para garantizar el trabajo individual. Muchos de éstos podrán ser utilizados como tareas para resolver en casa y deben ser revisados individualmente o en forma colectiva, siempre dirigida por el docente para afianzar el conocimiento.

Para mayor información véase la “Estructura y Aplicación de la Guía del Docente”.

# Índice

## Estructura y aplicación de la Guía del Docente



## Desarrollo de Clases de cada Unidad

# ESTRUCTURA Y APLICACIÓN DE LA GUÍA DEL DOCENTE

## 1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas. Si el Docente aprovecha esta Guía, le ayudará a desarrollar su clase de manera efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

## 2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura Global: Está formada por dos partes: la "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía y la forma como se utiliza y el "Desarrollo de Clases de cada Unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la Unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales tomados del Plan de Estudios y Programas Curriculares (PEPC). La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

## 3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el PEPC, utilizando eficazmente el Libro del Estudiante (LE), para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar la clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo, se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la Programación Semestral y Desarrollo de Clases de cada Unidad.

## 4. Programa Semestral

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el PEPC, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan semestral de modo que se cumplan todos los temas.

### Desarrollo de Clases de cada Unidad

Está divida en cinco secciones:

1) Competencias de la unidad: Presenta las competencias que se pretenden desarrollar en el estudiante en el desarrollo de la unidad.
2) Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado por semestre, relacionándolos con contenidos de grados anteriores y con las matemáticas siguientes.
3) Plan de estudio de la unidad: Presenta la distribución de las clases en cada lección.
4) Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.
5) Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, la evaluación y el proceso de enseñanza.

## 1) Competencias de la unidad

Se presentan las competencias para cada unidad, tal y como están descritas en el PEPC Área de Matemáticas.

## 2) Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase. Para el menor manejo del contenido, es mejor darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que lo necesiten.

## 3) Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la Guía.

## 4) Puntos de lección

Como cada unidad está dividida en lecciones, en esta parte se explican los puntos en que se deben prestar mayor atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por lo cual se desarrolla el plan de clase.

## 5) Desarrollo de clase

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, la evaluación y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

### a. Objetivo

Se representa el objetivo de la clase (hay casos donde un sólo aplica a dos o más clases seguidas). Es necesario tener éste claro para cada clase.

### b. Evaluación

Se indican los ejercicios que el estudiante debe realizar en forma independiente o grupal considerando la estrategia que decida el docente con el propósito de verificar el logro del objetivo.

En caso de que existan dificultades en la mayoría de los estudiantes el docente debe reforzar esa parte.

### c. Proceso de enseñanza

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes concluir en la regla, definición, principio, etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en algunas clase se utiliza la simbología M, RP y *.

**M:** Significa preguntas o indicaciones de los docentes a los estudiantes.

No es recomendable hace preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como “si” y “no”. Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los concentre en el tema de la clase.

**RP:** Significa reacciones previsibles de los estudiantes.

Hay que preveer las reacciones de los estudiantes, incluyendo las respuestas equivocadas. Para corregir las respuestas equivocadas, no es bueno decir solamente <<esta mala>> y enseñar la respuesta correcta o hacer que contesten otros niños.

Hay que dar tiempo para que piensen porque está equivocada, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

***:** Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

En algunos casos en el LE aparecen ciertas clase utilizando asterisco (*) esto significa que son clases o ejemplos, ejercicios opcionales que el docente puede desarrollar dependiendo el nivel de entendimiento de los estudiantes.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

- La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo, propone como se puede evaluar éste, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
- No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
- Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
- Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores cada 5 ejercicios, o una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
- Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
- La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible. Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:
  - Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
  - En el receso después de la clase.
  - En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo fila para que el docente corrija)

En la Guía del Docente se indica en la página del Libro del Estudiante las partes punteadas que se sugieren que el docente debe tener en la pizarra, sin embargo cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra.

## La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, clases, ejercicios de la lección (algunas unidades no tienen ejercicios de lección). Cada clase tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la clase. En la orientación de estos ejemplos es importante hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de resolverlo.

Para resaltar los puntos importantes de la clase estos se remarcan.

En el LE se proponen ejercicios de lección esto con el objetivo de suministrar suficientes ejercicios para que el estudiante pueda resolver en el aula o como tarea en casa. El docente deberá utilizarlos de acuerdo a conveniencia ya que no se tiene tiempo estipulado para esta sección.

La página del LE tiene dos columnas. Una columna de contenidos y otra columna de recordatorios, sugerencias o notas. En el desarrollo de cada clase se encuentran varios iconos, que a continuación se explica cada uno.

Cada ícono representa:

| Icono | Explicación |
|---|---|
|  | El desarrollo de un ejemplo. |
|  | La propuesta de ejercicios o problemas. |
|  | Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro a la vez algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema. |
|  | Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores. |
|  | Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos. |
|  | Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema. |

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

A continuación se explica el significado y simbología de la página del desarrollo de clases.

## Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases.

Número de unidad, lección y clase.

Objetivo de cada clase.

Actividades.

**Unidad I. Lección 1.**
**Clase 3**
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** **[A]** Verificar el teorema de los dos puntos a partir de una construcción.
**[B]** Demostrar y aplicar el teorema de los dos puntos.

**Evaluación:** [A] Realizar la construcción del ejercicio 1.8
[B] Resolver los ejercicios 1.9, 1.10, 1.11

**Materiales:** Regla y escuadras.

Indicador de evaluación por objetivo.

**[A]** (10 min)

**Ejercicio 1.8**

- Para realizar ésta construcción se debe verificar que los estudiantes tengan sus instrumentos de medición y si es necesario, recordarles como se verifica el paralelismo.

Orientaciones Metodológicas.

- Puede presentar al menos dos resultados en la pizarra, para que los estudiantes lleguen a generalizar los resultados y deducir el teorema.

Se omite solución.

Tiempo indicado por actividad.

**[B]** (20 min)

**Ejemplo 1.2**

- Realizar en clase la demostración del teorema, al menos la parte 1), ésto les servirá de guía para las demostraciones propuestas en los ejercicios.

Puntos y sugerencias de la enseñanza.

**Ejercicio 1.9**

- Asignar el ejercicio 1.9 en clase, éste permite aplicar el teorema directamente, utilizando medidas específicas.

Solución en pág 26.

Soluciones de los ejercicios propuestos.

Página del LE.

**Clase 3. Teorema de los dos puntos**

**Ejercicio 1.8.**
Construya:
- Dibuje un $\Delta ABC$
- Marque los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, nombrándolos como D y E respectivamente
- Trace $\overline{DE}$

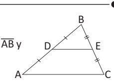
Verifique:
- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- Compare DE con respecto a AC.

**[A]**

En el Ejercicio 1.8, utilice regla para las mediciones y escuadras para verificar el paralelismo.

El resultado anterior se cumple por el siguiente teorema.

**Teorema 1.4**
**Teorema de los dos puntos**
En el $\Delta ABC$, D y E son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $DE = \frac{1}{2} AC$.




**[B]**

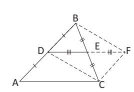
**Ejemplo 1.2. Demostración de Teorema 3.4.** Utilice la siguiente construcción auxiliar: Sea F el punto que pertenece a la prolongación de $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, tal como se muestra en la figura.

1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{BD} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ | Hipótesis |
| 4. E es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$ | Por 2 y 3 |
| 5. BDCF es un paralelogramo | Por 4 y condición de suficiencia de paralelogramos |
| 6. $\overline{BD} \cong \overline{FC}$ | Por 5 |
| 7. $\overline{DA} \cong \overline{FC}$ | Por 1 y 6 |
| 8. ADFC es un paralelogramo | Por 5, 7 y condición de suficiencia de paralelogramos |
| 9. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ | Por 8 y definición de paralelogramo |

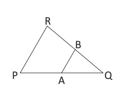
2) $DE = \frac{1}{2} AC$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. DF = 2DE | E es punto medio |
| 2. DF = AC | ADFC es un paralelogramo |
| 3. 2DE = AC | Por 1 y 2 |
| 4. $DE = \frac{1}{2} AC$ | Por 3 |




Para realizar las demostraciones, debe analizar los teoremas de la lección anterior sobre congruencia de triángulos y sobre cuadriláteros.

**Ejercicio 1.9.** En el $\Delta PQR$, A y B son los puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ respectivamente. Si RP = 16, $m\angle P = 58°$ y $m\angle Q = 38°$, obtenga AB y $m\angle BAQ$.




6 | Unidad I • Lección 1 • Clase 3. Teorema de los dos puntos

**Nota:** Para la demostración del teorema, se debe partir de una construcción auxiliar, los estudiantes deben utilizar el siguiente concepto:
- Condiciones suficientes para los paralelogramos.

8 | Unidad I • Lección 3 • Clase 3. Teorema de los dos puntos

## 4. Programación Semestral:

| Unidad (horas) | Contenido | Pág. de GD<br>(Pág. de LE) |
|---|---|---|
| I. Geometría elemental (13 horas) | Congruencia de triángulos | 2 – 36<br>(2 – 18) |
| | Semejanza de triángulos | 37 – 41<br>(19 – 23) |
| II. Limite y continuidad (3 y *10 horas) | Límite de funciones | 43 – 60<br>(26 – 38) |
| | Continuidad de funciones | 61 – 64<br>(39 – 42) |
| | Asíntotas | 64 – 65<br>(42 – 43) |
| III. Diferenciación e integrales de funciones polinómicas (22 horas) | Derivada de funciones polinómicas | 66 – 74<br>(46 – 50) |
| | Aplicación de las derivadas | 75 – 85<br>(51 – 57) |
| | Integrales | 86 – 99<br>(58 – 67) |

# Desarrollo de Clases

Matemáticas III
Unidad I

# Geometría elemental

**1. Competencias de la Unidad**

1. Demostrar la congruencia y semejanza de triángulos aplicando las propiedades y postulados.
2. Utilizar los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.
3. Demuestran propiedades de los cuadriláteros.

**2. Relación y Desarrollo**

**Matemáticas 8º**

Congruencia de triángulos
Cuadriláteros
- Paralelogramos
- Rectángulos, rombos y cuadrados
- Trapecios

**Matemáticas 9º**

Semejanza de triángulos
Polígonos regulares y el círculo

**Matemáticas III**

Unidad I
- Lección 1: Congruencia de triángulos
- Lección 2: Semejanza de triángulos

**3. Plan de Estudio de la Unidad** (13 horas)

| Lección | Clase/hora | Contenidos | Términos y signos |
|---|---|---|---|
| 1. Congruencia de triángulos | 1 | Criterios de congruencia de triángulos | LLL, LAL, ALA<br>Congruencia (≅) |
| | 2 | Características de los cuadriláteros | Paralelogramo |
| | 3 | Teorema de los dos puntos | Paralelismo (∥) |
| | 4, 5 y 6 | Propiedad de la mediatriz | Circuncentro |
| | 7, 8 | Bisectriz | Incentro |
| | 9, 10 | Baricentro | Medianas |
| | | Ejercicios de la lección | |
| 2. Semejanza de triángulos | 1 | Definición de semejanza, criterios de semejanza de triángulos | |
| | 2 | Semejanza y razón de área | |
| | 3 | Semejanza y razón de volumen y área de superficie | |
| | | Ejercicios de la lección | |

# Puntos de lección

## Lección 1: Congruencia de triángulos

En octavo grado se estudió la congruencia de triángulos y los criterios que determinan cuando dos triángulos son congruentes haciendo demostraciones sencillas de manera intuitiva, en esta lección se trata de demostrar las teoremas y corolarios sobre congruencia de triángulos y cuadriláteros aprendidos en años anteriores, considerando que los estudiantes tienen dominio al momento de establecer correspondencias entre lados y ángulos de figuras congruentes.

La demostración de teoremas utilizando la congruencia de triángulos puede resultar difícil para los estudiantes, ya que exige un nivel de razonamiento más elevado, por lo que en el libro se proponen ejemplos y ejercicios donde las demostraciones son guiadas para luego dar paso a resolver ejercicios no guiados, además se tratan los puntos notables de los triángulos incluyendo construcciones con regla y compás para verificación de propiedades.

## Lección 2: Semejanza de triángulos

La definición de semejanza es un poco difícil de comprender por parte de los estudiantes. La de la Clase 1 es una forma de enseñarla y aprenderla. La igualdad entre la razón de semejanza y entre los lados correspondientes no está demostrada en el libro, por su complejidad. Tampoco los criterios de semejanza de triángulos.

# Unidad I. Lección 1.
## Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** **[A]** Demostrar aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

**Evaluación:** [A] Resolver Ejercicio 1.2.
[B] Resolver Ejercicio 1.4.

## Desarrollo de Clases

**[A] Establecer los criterios de congruencia de triángulos** (10 min)

**Ejercicio 1.1**
Observa la figura ¿Cuáles son las parejas de triángulos congruentes y que criterio lo determina?

**Solución:**
Pareja 1: a y c (LAL)
Pareja 2: b y g (ALA)
Pareja3: d y e (LLL)
M: ¿Qué puede concluir del triángulo b y h? Concluir.
RP: No son congruentes porque el lado que mide 4 no está comprendido entre los ángulos de 30° y 70° en el triángulo h.

- Hacer la misma pregunta para el caso del triángulo a y f.
- Es importante hacer que los estudiantes establezcan la correspondencia entre vértices, ángulos y lados entre triángulos congruentes.
- Concluir con los criterios de congruencia para cada caso.

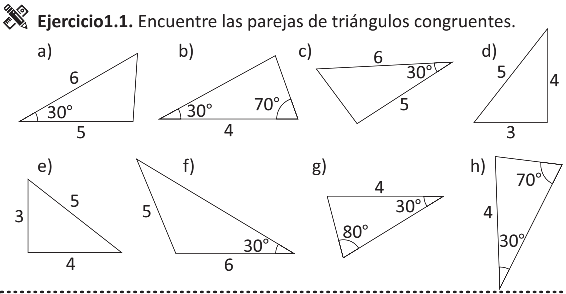
**Ejercicio 1.2**
(12 min)
En clase pueden resolver el Ejercicio a), b) y c); el resto para tarea en casa. Solución en pág. 21.

**Lección 1. Congruencia de Triángulos**

**Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos**

**Congruencia de triángulo**

**Ejercicio1.1.** Encuentre las parejas de triángulos congruentes.



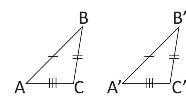

Pareja 1: _________ Pareja 2: _________ Pareja 3: _________
Criterio: __________ Criterio: __________ Criterio: __________

Dos triángulos son congruentes si satisfacen uno de los siguientes criterios:
a) Los tres lados son respectivamente congruentes (LLL).
b) Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (LAL).
c) Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes (ALA).

**[A]**

En una congruencia de triángulos se da una correspondencia entre vértices, lados y ángulos.

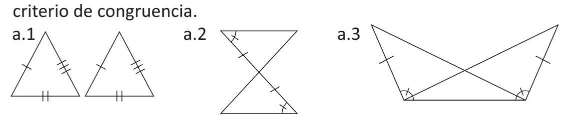
En la congruencia



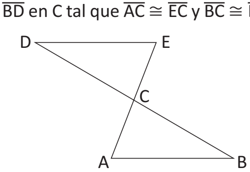

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ Se da:
*Correspondencia entre vértices
$A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$
*Lados correspondientes de triángulos congruentes son congruentes
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

*Los ángulos correspondientes son congruentes
$\angle A \cong \angle A'$
$\angle B \cong \angle B'$
$\angle C \cong \angle C'$

**Ejercicio 1.2**.
a) Para cada par de triángulos dibujados a continuación diga cuál es el criterio de congruencia.




b) En la figura $\overline{AE}$ interseca a $\overline{BD}$ en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demuestre que el $\angle A \cong \angle E$.




2 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos

- Discutir en la pizarra las soluciones presentadas por los estudiantes.
- Es posible que algunos estudiantes tengan dificultades con las demostraciones por lo que se sugiere que el maestro apoye haciendo el esquema de la misma para indicar el camino a seguir y de esa manera desarrollar en los estudiantes el razonamiento deductivo.

**Objetivo:** **[B]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos a cuadriláteros

## Clase 1
(Continuación)

**Evaluación:** [B] Resolver ejercicio 1.4

**[B] Aplicación de congruencia a cuadriláteros.** (10 min.)

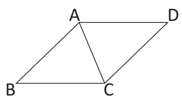
### Ejercicio 1.3
Demostrar que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

- Dibujar el paralelogramo en la pizarra ¿Qué nos piden demostrar?
  RP: que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
  M: Justifique cada uno de los pasos de la demostración en el Ejercicio 1.3 soluciones
  RP: 1) alternos internos y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ respectivamente.
  2) congruencias del mismo segmento
  3) ALA
  4) $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.
- Pasar estudiantes a la pizarra para completar la demostración.
- Concluir que en un paralelogramo sus lados opuestos son congruentes.

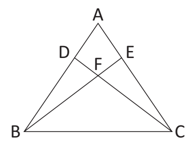
### Ejercicio 1.4
(13 min)
Solución en pág. 23

Concluir que los criterios de congruencia de triángulos se pueden utilizar para demostrar teoremas de los cuadriláteros.

c) La figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.
Demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

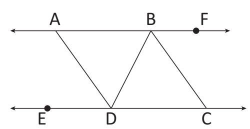



d) En el triángulo isósceles $\Delta ABC$, hay dos puntos D y E en los lados congruentes AB y AC respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Demuestre que:
d1. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.
d2. Si F es el punto donde se cortan $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$



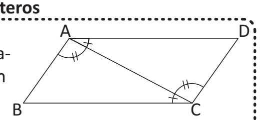

En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y viceversa.

e) En la figura las rectas AB y DC son paralelas, $\overline{DA}$ biseca el $\angle BDE$ y $\overline{BC}$ biseca el $\angle DBF$. Demuestre:
e1. $\Delta DAB \cong \Delta BCD$
e2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$




**Aplicación de congruencia a los cuadriláteros**

**Ejercicio 1.3.** Demuestre que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Llene las casillas en blanco.



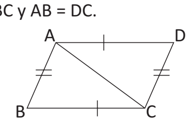

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. En el $\Delta ABC$ y $\Delta CDA$, el $\angle BAC \cong \angle DCA$ y $\angle BCA \cong \angle DAC$ | |
| 2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$ | |
| 3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ | Por 1, 2 y criterio de congruencia |
| 4. $\overline{AB} \cong$ <br> $\overline{BC} \cong$ | Por 3 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes. |

**[B]**

La relación de los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas paralelas y una transversal.

**Teorema 1.1**
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

**Ejercicio 1.4.** En el cuadrilátero ABCD, AD = BC y AB = DC.
Demuestre lo siguiente:
a) Los $\Delta ABC$ y $\Delta CDA$ son congruentes
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$




Unidad I • Lección 1 • Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos | 3

**Nota:** Puede dejar más ejercicios complementarios para la casa de la sección de ejercicios de la unidad que le permitan al estudiante desarrollar habilidades en la demostración de teoremas.
Esta clase se puede desarrollar en una hora o en dos dependerá del desempeño y los conocimientos previos que tengan los estudiantes.

# Unidad I. Lección 1.
## Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** **[A]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos y demostrar las condiciones de suficiencia para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

**Evaluación:** [A] Resolver Ejercicio 1.5

**[A] Condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea paralelogramo**.

### Ejemplo 1.1.
(15 min)

M: Escribir el enunciado y dibujar el paralelogramo en la pizarra. ¿Cuál es la hipótesis y cuál es la tesis?
RP: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{CB} \cong \overline{AD}$ La tesis es ABCD es un paralelogramo.
M: ¿ Qué criterio determina la congruencia de los $\Delta ABC$ y $\Delta CDA$.
RP: LLL.
M: ¿Cómo son los $\angle CAB$ y $\angle ACD$; $\angle BCA$ y $\angle DAC$?
RP: Son congruentes y alternos internos.
M: ¿Qué se puede concluir de los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$?
RP: Son paralelos.
Concluir que ABCD es un paralelogramo por la definición.

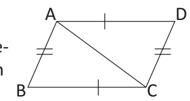
**Teorema 1.2**
Concluir que cualquier cuadrilátero que reúna una de las condiciones del recuadro es un paralelogramo.

### Ejercicio 1.5
(12 min)
Solución en pág. 23.
En clase puede resolver a) y dejar como tarea en casa b) y c) y el resto desarrollarlo en casa como tarea. En el caso de que el tiempo finalice asigne como tarea.

**Clase 2. Características de los cuadriláteros**

**Condiciones para ser paralelogramo**

**Ejemplo 1.1.** Demuestre que un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.

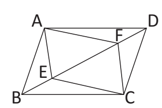



| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. En el $\Delta ABC$ y $\Delta CDA$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 3. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ | Por 1, 2 y criterio de congruencia LLL |
| 4. $\angle CAB \cong \angle ACD$ $\angle BCA \cong \angle DAC$ | Por 3 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 5. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ | Por 4 y condición de paralelismo (ángulos alternos internos) |
| 6. ABCD es un paralelogramo. | Por 5 y definición de paralelogramo. |

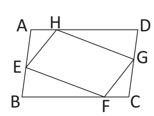
**Teorema 1.2**
**Condiciones para ser un paralelogramo**
Un cuadrilátero es un paralelogramo si cumple una de las siguientes condiciones:
a) Dos pares de lados opuestos son paralelos. (Definición)
b) Dos pares de lados opuestos son congruentes.
c) Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
d) Las diagonales se cortan en el punto medio.
e) Un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.

**Ejercicio 1.5.**
a) Demuestre las condiciones c, d y e para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

b) En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.




c) Se toman 4 puntos E, F, G y H en los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestre que EFGH es un paralelogramo.






[A]

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

Otra condición para ser un paralelogramo: Los ángulos consecutivos son suplementarios.

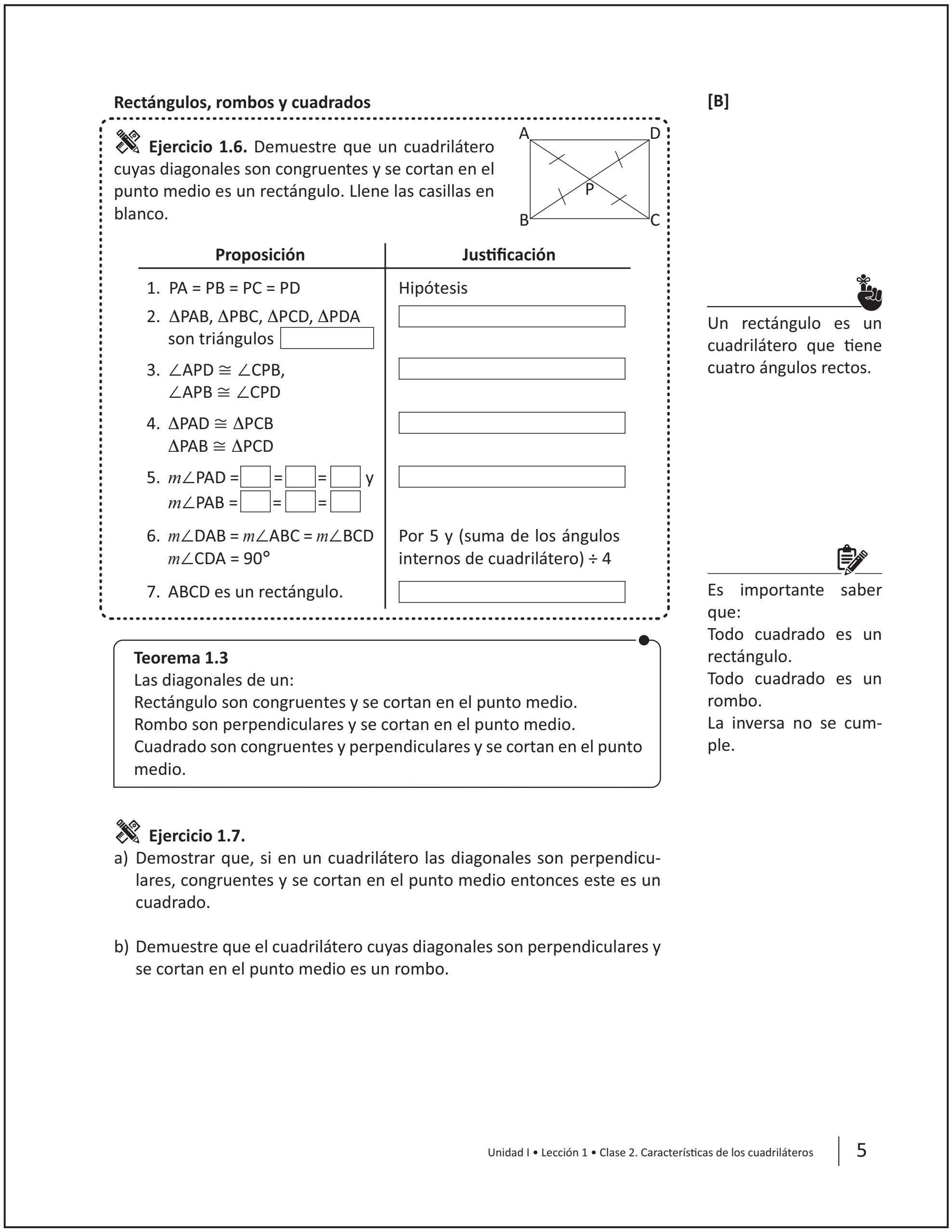
Tenga en cuenta las condiciones para ser un paralelogramo al demostrar b y c.

**Nota:** En el I y II ciclo se estudió las propiedades y las condiciones para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, en el III ciclo se continua estudiando pero se le da mayor énfasis a las construcciones y algunas demostraciones sencillas, por lo que es importante que en este grado el estudiante demuestre estos teoremas que le servirán como base para demostrar otros que involucran cuadriláteros.

**Objetivo:** **[B]** Aplicar los criterios de congruencia de triángulos y demostrar las condiciones de suficiencia para que un paralelogramo sea un rectángulo, cuadrado o un rombo.

## Clase 2
(Continuación)

**Evaluación:** [B] Resolver ejercicio 1.6
Resolver ejercicio 1.7



**Rectángulos, rombos y cuadrados**

**Ejercicio 1.6.** Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio es un rectángulo. Llene las casillas en blanco.



| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. PA = PB = PC = PD | Hipótesis |
| 2. ΔPAB, ΔPBC, ΔPCD, ΔPDA son triángulos ☐ | ☐ |
| 3. ∠APD ≅ ∠CPB, ∠APB ≅ ∠CPD | ☐ |
| 4. ΔPAD ≅ ΔPCB, ΔPAB ≅ ΔPCD | ☐ |
| 5. $m\angle$PAD = ☐ = ☐ = ☐ y $m\angle$PAB = ☐ = ☐ = ☐ | ☐ |
| 6. $m\angle$DAB = $m\angle$ABC = $m\angle$BCD $m\angle$CDA = 90° | Por 5 y (suma de los ángulos internos de cuadrilátero) ÷ 4 |
| 7. ABCD es un rectángulo. | ☐ |

**Teorema 1.3**
Las diagonales de un:
Rectángulo son congruentes y se cortan en el punto medio.
Rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
Cuadrado son congruentes y perpendiculares y se cortan en el punto medio.

**Ejercicio 1.7.**

a) Demostrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio entonces este es un cuadrado.

b) Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

[B]

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.

Es importante saber que:
Todo cuadrado es un rectángulo.
Todo cuadrado es un rombo.
La inversa no se cumple.

Unidad I • Lección 1 • Clase 2. Características de los cuadriláteros | 5

### [B] Rectángulos rombos y cuadrados

**Ejercicio 1.6** (10 min)

M: Escriba el enunciado en la pizarra y dibuje el paralelogramo.
Antes de que los estudiantes abran el libro puede hacer preguntas como las siguientes: ¿Cuál es la hipótesis? ¿Qué datos nos dan en el teorema? ¿Qué nos piden demostrar?

Permitir que los estudiantes sugieran una estrategia para demostrar este ejercicio en el caso de que no hayan ideas entonces que completen las casillas en blanco de la demostración dada.

Solución en pág. 25.

- Concluir que la figura es un rectángulo cuando las diagonales cumplen ciertas características.

**Ejercicio 1.7.** (8 min). Solución en pág. 26.
Si el tiempo no ajusta resolver como tarea.

# Unidad I. Lección 1.
## Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** **[A]** Verificar el teorema de los dos puntos a partir de una construcción.
**[B]** Demostrar y aplicar el teorema de los dos puntos.

**Evaluación:** [A] Realizar la construcción del ejercicio 1.8
[B] Resolver los ejercicios 1.9, 1.10, 1.11

**Materiales:** Regla y escuadras.

**[A]** (10 min)

### Ejercicio 1.8
- Para realizar ésta construcción se debe verificar que los estudiantes tengan sus instrumentos de medición y si es necesario, recordarles como se verifica el paralelismo.

- Puede presentar al menos dos resultados en la pizarra, para que los estudiantes lleguen a generalizar los resultados y deducir el teorema.

Se omite solución.

**[B]** (20 min)

### Ejemplo 1.2
- Realizar en clase la demostración del teorema, al menos la parte 1), ésto les servirá de guía para las demostraciones propuestas en los ejercicios.

### Ejercicio 1.9
- Asignar el ejercicio 1.9 en clase, éste permite aplicar el teorema directamente, utilizando medidas específicas.

Solución en pág 26.

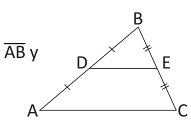
**Clase 3. Teorema de los dos puntos**

**Ejercicio 1.8.**
Construya:
- Dibuje un $\Delta ABC$
- Marque los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, nombrándolos como D y E respectivamente
- Trace $\overline{DE}$

Verifique:
- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- Compare DE con respecto a AC.

El resultado anterior se cumple por el siguiente teorema.

**Teorema 1.4**
**Teorema de los dos puntos**
En el $\Delta ABC$, D y E son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $DE = \frac{1}{2}AC$.




**Ejemplo 1.2. Demostración de Teorema de los dos puntos.** Utilice la siguiente construcción auxiliar: Sea F el punto que pertenece a la prolongación de $\overline{DE}$ tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, tal como se muestra en la figura.

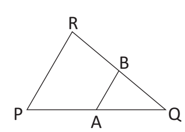
1) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{BD} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ | Hipótesis |
| 4. E es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{DF}$ | Por 2 y 3 |
| 5. BDCF es un paralelogramo | Por 4 y condición de paralelogramo |
| 6. $\overline{BD} \cong \overline{FC}$ | Por 5 |
| 7. $\overline{DA} \cong \overline{FC}$ | Por 1 y 6 |
| 8. $\overline{DA} \parallel \overline{FC}$ | Por 5 y ser A, D, B colineales |
| 9. ADFC es un paralelogramo | Por 5, 8 y condición de paralelogramo |
| 10. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ | Por 9 y definición de paralelogramo |

2) $DE = \frac{1}{2}AC$

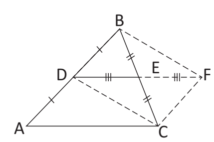
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. DF = 2DE | E es punto medio del $\overline{DF}$. |
| 2. DF = AC | ADFC es un paralelogramo |
| 3. 2DE = AC | Por 1 y 2 |
| 4. $DE = \frac{1}{2}AC$ | Por 3 |

**Ejercicio 1.9.** En el $\Delta PQR$, A y B son los puntos medios de $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ respectivamente. Si RP = 16, $m\angle P = 58°$ y $m\angle Q = 38°$, obtenga AB y $m\angle BAQ$.




**[A]**
En el Ejercicio 1.8, utilice regla para las mediciones y escuadras para verificar el paralelismo.

**[B]**
Teorema de los dos puntos también se llama "Teorema del segmento medio de un triángulo" y "Teorema del conector de puntos medios".

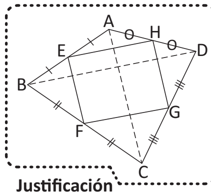



Para realizar las demostraciones, debe analizar los teoremas de la lección anterior sobre congruencia de triángulos y sobre cuadriláteros.

6 | Unidad I • Lección 1 • Clase 3. Teorema de los dos puntos

**Nota:** Para la demostración del teorema, se debe partir de una construcción auxiliar, los estudiantes deben utilizar el siguiente concepto:
- Condiciones suficientes para los paralelogramos.

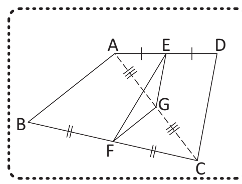
**Ejercicio 1.10.** Demuestre que el cuadrilátero EFGH que se obtiene uniendo los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Llene las casillas en blanco.




| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. E, F, G y H son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ respectivamente | Hipótesis |
| 2. En el ΔABD, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ | |
| 3. En el ΔBCD, | Teorema de los dos puntos |
| 4. $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ | Igualando 2 y 3 |
| 5. En ΔACD, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ | |
| 6. | Teorema de los dos puntos |
| 7. $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ | Igualando 5 y 6 |
| 8. EFGH es un paralelogramo. | |

Para los ejercicios 1.10 y 1.11: Aplique el teorema del segmento medio de un triángulo a los triángulos que se forman con las diagonales.

**Ejercicio 1.11.**
En el dibujo $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y los puntos E y F son los puntos medios de los lados AD y BC respectivamente. El punto G es el punto medio de la diagonal AC, ¿Qué tipo de triángulo es ΔEFG?




### Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

**Propiedad de la mediatriz**

**[A]**

Construcción

**Ejercicio 1.12.**
Construya:
- Trace un segmento, $\overline{AB}$
- Trace la mediatriz de $\overline{AB}$
- Coloque un punto P sobre la mediatriz, no colineal con A y B

Verifique:
- Compare PA con PB

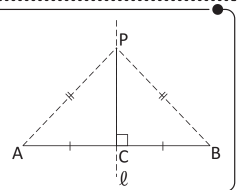
Lo anterior es una propiedad.

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

**Teorema 1.5 Propiedad de la mediatriz**
La recta $\ell$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

1) Si P está en $\ell$, entonces PA = PB

2) Si PA = PB, entonces P está en $\ell$.




Unidad I • Lección 1 • Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz | 7

**[B] Continuación**
(15 min)

**Ejercicio 1.10**
- Para el Ejercicio 1.10 hacer énfasis en la sugerencia dada.
  Si los estudiantes pueden seguir el esquema del ejercicio 1.10, podrán desarrollar de manera similar la demostración del Ejercicio 1.11.

Solución en pág. 27.

**Ejercicio 1.11**
- Si no queda tiempo de desarrollar los últimos ejercicios puede asignarlos de tarea.

Solución en pág. 27.

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

**[A]**

**Ejercicio 1.12**
(25 min)
Los estudiantes deben concluir que PA = PB.

Demostración parte 2)
Se debe considerar la sugerencia y sólo el caso que el punto P sea distinto al punto C.

Solución:
1. PA = PB… Hipótesis.
2. PC = PC… Congruencia del mismo segmento.
3. CA = CB… C es el punto medio del $\overline{AB}$.
4. ΔPAC ≅ ΔPBC… Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LLL.
5. $m\angle$ACP = $m\angle$BCP = 90°… Por 4 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes y ser ángulos adyacentes.
6. $\overline{PC} \perp \overline{AB}$… Por 5.
7. P está en $\ell$ y es la mediatriz. Por 3 y 6.

## Clase 4, 5 y 6
(Continuación)

**Ejercicio 1.13**
(20 min)
Para los ejercicios a) y b) Hacer énfasis en que apliquen la propiedad de la mediatriz.

Solución en pág. 27.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

**[B]** (45 min)

**Ejercicio 1.14**
Los estudiantes deben concluir que las mediatrices coinciden en un punto. Sería interesante comparar que no importa el tipo de triángulo que construyan, esto siempre se cumple.

**Ejercicio 1.15.** Demostración

Solución en pág. 28.

---

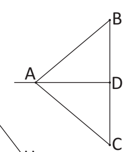
**Demostración:**
1) Si P está en ℓ, PA = PB

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ | C es punto medio del $\overline{AC}$. |
| 2. $\angle ACP \cong \angle BCP$ | Perpendicularidad (ángulos rectos). |
| 3. $\overline{PC} \cong \overline{PC}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 4. $\Delta PAC \cong \Delta PBC$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL |
| 5. $PA \cong PB$ | Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes. |

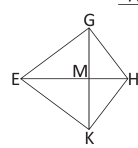
2) Demuestre que sí PA = PB, entonces P está $\ell$.

Para la parte 2), debe llegar a demostrar que C es punto medio y que $m\angle ACP = m\angle BCP = 90°$

**Ejercicio 1.13.**
a) Si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el $\Delta ABC$ es isósceles.




b) En la figura, M está en el $\overline{GK}$, GE = KE, GM = KM y H está en la recta EM. Demostrar que GH = KH.




En el ejercicio a), no utilice congruencia de triángulos en la demostración, emplee la propiedad de la mediatriz.

**Circuncentro de un triángulo**

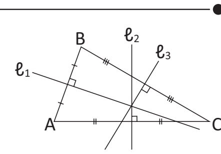
**[B]**

**Ejercicio 1.14.**
a) Construya el $\Delta ABC$
b) Trace las mediatrices de los lados del $\Delta ABC$.
c) ¿Qué observa respecto a las mediatrices? ¿Coinciden en un punto?

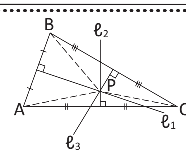
Construcción

Dos o más rectas son **concurrentes** si hay un solo punto que está en todas ellas.

**Teorema 1.6. Concurrencia de las mediatrices.**
Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.




**Ejercicio 1.15.** Demuestre el teorema anterior considerando a P como punto de intersección de las rectas $\ell_1$ y $\ell_2$, aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P también está en la recta $\ell_3$ y que PA = PB = PC.

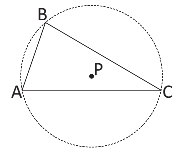



8 | Unidad I • Lección 1 • Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

**Ejercicio 1.16.**
Utilice la construcción del Ejercicio 1.14 y nombre con P el punto de intersección de las mediatrices y trace una circunferencia con centro en P y con radio PA.
1) ¿Qué observa con respecto a la circunferencia y los vértices del triángulo?
2) ¿Cómo se llama este tipo de circunferencia?

Al punto P se le llama **circuncentro**.

**Circunferencia circunscrita.**




Es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo

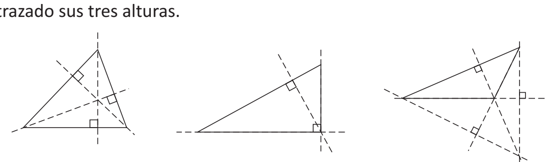
**Definición 1.1**
El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama circuncentro del triángulo.

**Ejercicio 1.17.**
a) Construya un triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo; y la circunferencia circunscrita a cada uno. Compare la ubicación del circuncentro en cada caso.
b) ¿Cómo ha de ser el triángulo para que el circuncentro se sitúe en uno de sus lados? Cuando eso sucede, ¿con qué punto coincide el circuncentro? ¿Por qué?

**Ortocentro**

[C]

**Ejercicio 1.18**. Para cada uno de los siguientes triángulos se han trazado sus tres alturas.



Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

a) ¿Qué tienen en común los tres triángulos?
b) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en un vértice?
c) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en el interior del triángulo?
d) ¿En cuál se intersecan en el exterior?

Ese punto se llama **ortocentro**.

**Teorema 1.7. Concurrencia de las alturas.**
Las tres alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro del triángulo.

Unidad I • Lección 1 • Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz | 9

**Ejercicio 1.18.** Solución
a) Las tres alturas se intersectan en un punto.
b) Triángulo rectángulo.
c) Triángulo acutángulo.
d) Triángulo obtusángulo.

**Ejercicio 1.16**
Para el ejercicio 1.16 deben hacer uso de la construcción realizada y deben concluir que la circunferencia pasa por los tres vértices y se llama circunferencia circunscrita.
(Se omite solución)

**Ejercicio 1.17**
En el ejercicio 1.17 deben concluir sobre la relación de los tipos de triángulos y la ubicación del circuncentro.

a) • Triángulo acutángulo: El circuncentro está en el interior del triángulo.
 • Triángulo obtusángulo: El circuncentro está en el exterior del triángulo.
 • Triángulo rectángulo: El circuncentro es el punto medio de la hipotenusa del triángulo.

(Se omite la construcción).

b) Triángulo rectángulo y coincide con el punto medio de la hipotenusa.

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

**[C]** (45 min)

# Unidad I. Lección 1.

## Clase 4, 5 y 6
(Continuación)

## Clase 7 y 8
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** **[A]** Demostrar el teorema de la bisectriz de un ángulo.

**Evaluación:** [A] Resolver el ejercicio 1.21

### Ejercicio 1.19
Solución. Véase la pág. 29

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

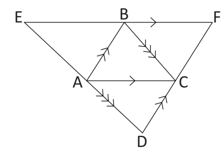
**[A] Construir la bisectriz de un ángulo** (10 min)

### Ejercicio 1.20.
M: ¿Qué es la bisectriz de un ángulo?
Concluir: Es el rayo que divide el ángulo en dos ángulos congruentes.
Hacer la construcción de la bisectriz del ∠ABC y ubicar P en la bisectriz.

* Al trazar las perpendiculares a los lados del ángulo desde P, haga que el alumno note que se formaron dos triángulos rectángulos.
M: ¿Cómo son los triángulos que se formaron?
Concluir: Congruentes.
M: ¿Qué criterio define la congruencia de los triángulos?
Concluir: Criterio de congruencia de los triángulos rectángulos.

*__Concluye:__ los puntos en la bisectriz de un ángulo están a la misma distancia desde sus dos lados.

**Ejercicio 1.19.**
Demuestre el teorema anterior.
Considere la siguiente construcción auxiliar:
En el ΔABC, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el ΔDEF. Demuestre que las mediatrices de los lados del ΔDEF son las tres alturas del ΔABC.
Utilice las condiciones para ser paralelogramo.




Los símbolos >, >> en los segmentos están indicando paralelismo.

### Clase 7 y 8. Bisectriz

**Ejercicio 1.20.**
Construya:
a) Dibuje el ∠ABC y trace su bisectriz.
b) Marque un punto P en la bisectriz.
c) Desde P, trace segmentos que sean perpendiculares a los lados BA y BC.
d) Nombre los puntos de intersección como K y L respectivamente.

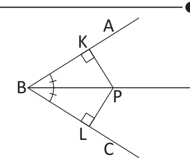
Verifique:
Compare la longitud de $\overline{KP}$ con respecto a la de $\overline{LP}$.

**[A]** Construcción

Puede trazar la bisectriz utilizando regla y compás, o haciendo uso del transportador.

El resultado anterior se cumple en el siguiente teorema:

**Teorema 1.8. Propiedad de la bisectriz de un ángulo.**
El punto P está en el interior del ∠ABC.
P equidista de los rayos BA y BC si y sólo si el rayo BP es la bisectriz del ∠ABC.




La bisectriz de un ángulo lo divide en dos ángulos congruentes.

Equidista:
P equidista de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ entonces $\overline{PK} \perp \overline{BA}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$,
Además, PK = PL.

**Demostración:**
Si K y L equidistan de P, entonces el rayo BP es la bisectriz del ∠ABC.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. PK = PL | Hipótesis |
| 2. $\overline{PK} \perp \overline{BA}$; $\overline{PL} \perp \overline{BC}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ | Congruencia del mismo segemento. |
| 4. ΔBKP ≅ ΔBLP | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia hipotenusa-cateto de triángulos rectángulos. |
| 5. ∠KBP ≅ ∠LBP | Por 4 y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes. |
| 6. Rayo BP es la bisectriz del ∠ABC | Por 5 y definición de bisectriz. |

Para demostrar un teorema que involucre un "si y sólo si" deben demostrarse ambos sentidos.

Considere:
$\overline{PK} \perp \overline{BA}$,
$\overline{PL} \perp \overline{BC}$ y los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.

**Ejercicio 1.21.** Demuestre el otro sentido del teorema.
Si rayo BP es la bisectriz del ∠ABC entonces K y L equidistan de P.

10 | Unidad I • Lección 1 • Clase 7 y 8. Bisectriz

### Demuestre el teorema 1.8 (7 min)
M: Escribir el enunciado y dibujar la construcción en la pizarra. ¿Cuál es la hipótesis y cuál es la tesis?
RP: K y L equidistan de P
La tesis es $\overrightarrow{BP}$ es la bisectriz de ∠ABC.

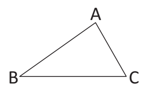
**Objetivo:** **[B]** Construir un triángulo y una circunferencia circunscrita al mismo.

## Clase 7 y 8
(Continuación)

**Evaluación:** [B] Realizar la construcción del Ejercicio 1.22

**Materiales:** Regla y escuadras

**Ejercicio 1.22.**
En el $\Delta ABC$,
a) Trace las bisectrices de sus ángulos.
b) ¿Coinciden las bisectrices en un punto?, si es así ¿el punto está en el interior o exterior del triángulo? Nombre el punto de intersección como I.
c) Trace desde éste, segmentos perpendiculares a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$.(Nombre esos puntos P, Q y R respectivamente).
d) Compare la medida de estos segmentos ($\overline{IP}$, $\overline{IQ}$ y $\overline{IR}$).

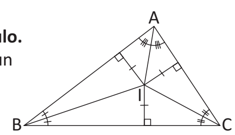



[B]

La construcción del Ejercicio 1.22 se utiliza posteriormente.

Esto nos lleva al siguiente teorema:

**Teorema 1.9. Concurrencia de las bisectrices de un triángulo.**
Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.



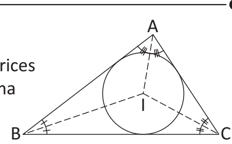

**Ejercicio 1.23.** Complete la demostración del teorema 1.9.
En el $\Delta ABC$, sea I el punto de intersección de las bisectrices de $\angle BAC$ y $\angle BCA$.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AI}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ | Hipótesis |
| 2. ☐ es la bisectriz del $\angle BCA$ | Hipótesis |
| 3. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ | Por 1 y propiedad de bisectriz. |
| 4. I equidista de $\overline{AC}$ y ☐ | Por 2 y ☐ |
| 5. I equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ | Por 3, 4 y propiedad transitiva. |
| 6. ☐ es la bisectriz de ☐ | Por 5 y propiedad de la bisectriz. |

**Ejercicio 1.24.** Utilizando la construcción empleada en el Ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. ¿Por qué la circunferencia es tangente a los tres lados?

**Circunferencia inscrita:** Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo entonces se dice que la circunferencia está inscrita en el triángulo y el triángulo está circunscrito en la circunferencia.

**Definición de Incentro**
El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama Incentro.




Unidad I • Lección 1 • Clase 7 y 8. Bisectriz | 11

M: ¿Qué estrategia se puede seguir para demostrar este teorema?
RP: Demostrar que los triángulos $\Delta BKP$ y $\Delta BLP$ son congruentes.
Hacer la demostración del teorema.

**Ejercicio 1.23.** (3 min)
*Pedir opiniones a los estudiantes acerca de que camino pueden seguir para demostrar este teorema, si no surgen ideas pueden completar la demostración que está en LE.
Solución en pág. 29.

### Ejercicio 1.21
(5 min) *Es importante que el estudiante note que el teorema 1.8 debe ser demostrado en ambas direcciones ya que consta de un si y sólo si.
Solución en pág. 29.

**[B] Construir la bisectriz de los ángulos de $\Delta$ABC** (10 min)

### Ejercicio 1.22
a) Se omite la construcción.
b) Coinciden / interior
c) Se omite la construcción.
d) Son congruentes.

**Concluye:** Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.

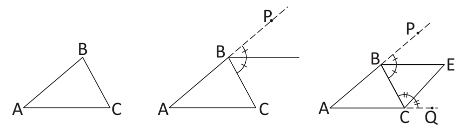
# Clase 7 y 8
(Continuación)

**Objetivo:** **[C]** Trazar las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo.
- Demostrar que dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior se intersecan en un punto y este equidista de los lados del triángulo.
- Definir excentro.

**Evaluación:** [C] Resolver los ejercicio 1.27

**Ejercicio 1.25.** Realice la siguiente construcción:
Construya un triángulo equilátero y luego construya su circunferencia inscrita.

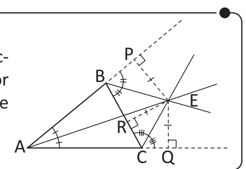
**Ejercicio 1.26.** Explique las construcciones realizadas en cada paso.




Conteste:
a) ¿Cómo se llaman los ángulos PBC y QCB?
b) ¿Qué son los rayos BE y CE?
c) Verifique si la bisectriz del ángulo interior ∠BAC es también concurrente en el punto E.

El punto E se llama **Excentro**.

**Teorema 1.10**
El punto donde se intersecan dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior en un triángulo, se llama excentro y éste equidista de los lados del triángulo.




**Ejercicio 1.27.** Complete la demostración. Considere en el ΔABC las bisectrices BE y CE de los ángulos exteriores ∠PBC y ∠QCB respectivamente y tome tres puntos P, Q y R tal que, $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$. Demuestre que el rayo AE es la bisectriz del ∠BAC. (Vea la figura de Teorema 1.10).

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. Rayo BE es la bisectriz de ∠PBC | |
| 2. ___ es la bisectriz de ___ | Hipótesis |
| 3. $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$ | |
| 4. PE = RE | Por 1, 3 y propiedad de bisectriz. |
| 5. ___ | Por 2, 3 y propiedad de bisectriz. |
| 6. PE = QE | |
| 7. ___ es la bisectriz de ___ | |

[C]

Puede calcar las figuras y hacer las verificaciones con regla, transportador y compás.

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, se le llama bisectriz exterior.

Está es también una aplicación de la propiedad de la bisectriz.

La circunferencia inscrita en un triángulo es tangente a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos.

¿Cuántas de estas circunferencias se pueden construir en el ΔABC?

12 | Unidad I • Lección 1 • Clase 7 y 8. Bisectriz

### Ejercicio 1.24
(10 min) En la construcción del ejercicio 1.22 trace una circunferencia con centro en el punto I y de radio PI.
Solución en pág. 30.
*Hacer notar al estudiante que la circunferencia trazada está inscrita en el triángulo.
**Concluye:** que a ese punto se le llama incentro.

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

### Ejercicio 1.25
(10 min)
(Se omite la solución)

**[C]**

### Ejercicio 1.26
(20 min)
**Analizar la construcción**
M: ¿Cómo son los ángulos ∠PBC y ∠QCB?
RP: Ángulos externos
M: ¿Qué tipo de construcción se hizo en ΔABC?
RP: Bisecar ángulos externos
* Concluye que los rayos BE y CE son bisectrices de los ángulos exteriores del ΔABC y concurren en el punto E.
*Verificar si la bisectriz del ángulo interior ∠BAC concurre en el punto E.

**Definir excentro** (10 min)
Trace una circunferencia con centro en el excentro y radio EB. M: ¿Pasa la circunferencia por las extensiones de dos de los lados del triángulo? RP: Si

### Ejercicio 1.27. (15 min)
Solución en pág. 30

*Pedir opiniones a los estudiantes acerca de que camino pueden seguir para demostrar este teorema, si no surgen ideas pueden completar la demostración que está en LE.

**Objetivo:** **[A]** Demostrar que las medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

- Definir baricentro como el punto donde se encuentran las tres medianas de un triángulo.

# Unidad I. Lección 1.

## Clase 9 y 10

(Continúa en la siguiente página)

**Evaluación:** [A]Resolver ejercicio 1.28

### Clase 9 y 10. Baricentro

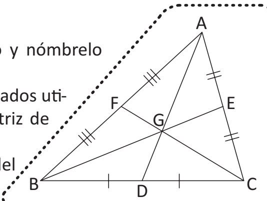
**Trazar las medianas de un triángulo**

**Ejemplo 1.3.**

a) Dibuje en el cuaderno un triángulo y nómbrelo $\Delta ABC$.

b) Encuentre los puntos medios de los lados utilizando la construcción de la mediatriz de un segmento.

c) Una los vértices con el punto medio del lado opuesto correspondiente.




**[A ]**

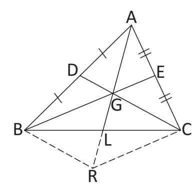
Los segmentos AD, CF y BE son medianas del $\Delta ABC$.
$\overline{AD}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto G.

Una **mediana** de un triángulo es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene 3 medianas.

**Teorema 1.11** Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

En esta demostración trazamos segmentos auxiliares como estrategia para su solución.




**Ejemplo 1.4**. Demuestre el Teorema 1.11.

Solución:

En el $\Delta ABC$, sean D y E los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente (Vea la figura de la derecha).

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. En el $\Delta ABC$, $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ son medianas y se cortan en G. | Construcción e hipótesis |
| 2. Rayo AG corta a $\overline{BC}$ en L y se extiende a R tal que $\overline{AG} \cong \overline{GR}$. | Construcción |
| 3. D es el punto medio de $\overline{AB}$. | Por 1 |
| 4. G es el punto medio de $\overline{AR}$. | Por 2 |
| 5. En el $\Delta ABR$, $\overline{DG} \parallel \overline{BR}$ | Teorema de los dos puntos |
| 6. $\overline{GC} \parallel \overline{BR}$ | Por 5 |
| 7. E es punto medio de $\overline{AC}$. | Hipótesis |
| 8. En el $\Delta ARC$, $\overline{GE} \parallel \overline{RC}$ | Teorema de los dos puntos |
| 9. $\overline{BG} \parallel \overline{RC}$ | Por 8 |
| 10. BGCR es paralelogramo. | Por 6, 9 y definición de paralelogramo |
| 11. $\overline{BL} \cong \overline{LC}$ | Por 10 y la propiedad de la diagonal del paralelogramo. |
| 12. L es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AL}$ es una mediana del $\Delta ABC$. | Por 11 |

El punto donde se intersecan las medianas de un triángulo se llama baricentro.

Unidad I • Lección 1 • Clase 9 y 10. Baricentro | 13

**[A] Construir las medianas de un triángulo**.

**Ejemplo 1.3**

(7 min)

Hacer la construcción.

**Concluye:** las medianas de un triángulo son los segmentos cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

M: ¿Cuántas medianas tiene un triángulo?

RP: 3

M: ¿Concurren en un punto?

RP: si

**Ejemplo 1.4**

(15 min)

* Hacer la demostración en forma similar a las anteriores. Puede intentar que los estudiantes den ideas de cómo podemos hacer esta demostración y luego consultar el LE.

* La estrategia de esta demostración consiste en trazar segmentos auxiliares de tal manera que formemos un paralelogramo y así poder demostrar que es punto medio de $\overline{BC}$ utilizando el criterio de que las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.

Nombrar el punto donde concurren las medianas como Baricentro.

## Clase 9 y 10
(Continuación)

**Objetivo:** **[B]** Demuestran que el baricentro está situado a dos tercios de la distancia de cada vértice del lado opuesto del triángulo

**Evaluación:** [B] Resolver ejercicio 1.30

### Ejemplo 1.5
(10 min)
*Es importante que el estudiante note que es suficiente con trazar dos medianas para encontrar el baricentro.
M: ¿Qué sucede cuando la punta del lápiz se coloca en el baricentro?
RP: El triángulo esta en equilibrio
**Concluye:** El baricentro es el centro de masa o de gravedad de un triángulo.

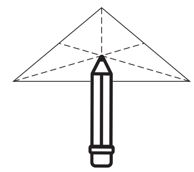
### Ejercicio 1.28
(13 min). Puede asignar de tarea en el caso de que el tiempo no sea suficiente.
Solución en pág. 30.

[Hasta aquí Clase 9]

[Desde aquí Clase 10]

### Ejercicio 1.29
(35 min).
* Al hacer esta construcción el estudiante podrá verificar el hecho de que la mediana se divide en tres partes exactamente iguales y a la vez debe notar que el baricentro está a dos tercios de los vértices.
M: ¿Qué sucede con las medianas del triángulo?

**Ejemplo 1.5.**
a) Dibuje un triángulo escaleno grande en una cartulina y recórtelo.
b) Trace dos medianas y encuentre el Baricentro.
c) Ubique la punta del lápiz en el baricentro.
d) Comente con sus compañeros que sucedió.



Note que el triángulo se equilibró.

El baricentro es el centro de masa o centro de gravedad de un triángulo.

**Ejercicio 1.28.**
a) Construya un triángulo escaleno, un equilátero y un isósceles y trace las medianas utilizando regla y compás.

b) Dado el $\Delta ABC$ con mediana AD perpendicular al lado BC. Demuestre que:
b1. $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$
b2. $\Delta ABC$ es isósceles.

c) Demuestre que la mediana correspondiente al lado no congruente de un triángulo isósceles es perpendicular al lado y biseca al ángulo opuesto a la base.

d) Demuestre que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

e) Dados dos triángulos congruentes, la mediana de uno de los triángulos es congruente con la mediana del lado correspondiente del otro.

**Ejercicio 1.29**.
En el $\Delta ABC$, demuestre que si $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro entonces AG : GD = 2 : 1, BG : GE = 2 : 1, CG : GF = 2 : 1.

**[B]**

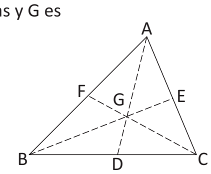
Puede utilizar como referencia la figura del Ejemplo 1.4.

En el $\Delta ABC$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas y G es el baricentro. Se cumple que:

$AG=\frac{2}{3}AD$ ó $AG = 2GD$

$BG=\frac{2}{3}BE$ ó $BG = 2GE$

$CG=\frac{2}{3}CF$ ó $CG = 2GF$



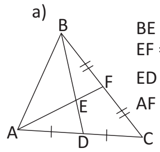

14 | Unidad I • Lección 1 • Clase 9 y 10. Baricentro

RP: Se dividen en tres partes.
M: ¿Cuánto mide cada una de las partes en que se dividió?
RP: 1/3
Solución en pág. 31.

***Concluye:** El baricentro está situado a 2/3 del vértice del lado opuesto del triángulo.

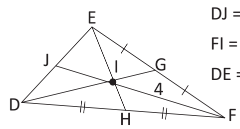
**Ejercicio 1.30.**
Encuentre las medidas.

a)




BE = 16
EF = 7
ED =
AF =

b)




DJ = 3, JE =
FI = 4, IJ =
DE = EH, EI =



**Nota:** es importante que los estudiantes hagan la construcción ya que les permitirá visualizar en mejor manera el teorema y luego poder pasar a la demostración formal.

**Ejercicio 1.30**
(10 min) *Pedir opiniones a los estudiantes se puede demostrar este teorema.

Dar tiempo suficiente.
Pasar a la pizarra un estudiante para que proponga su solución.

**Concluye:** Que el baricentro está situado a razón de 2/3 de los vértices del triángulo.

Solución:
a) ED = 8,
   AF = 21
b) JE = 3
   IJ = 2
   EI = 4

# Unidad I. Lección 1.
## Ejercicios de la lección
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

**Ejercicio 1**
Solución.
$x = 8$
$y = 4$

**Ejercicio 2**
Solución.
Véase la pág. 32.

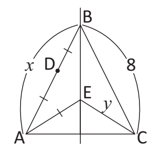
**Ejercicio 3**
Solución.
Véase la pág. 32.

**Ejercicio 4**
Solución.
Véase la pág. 33.

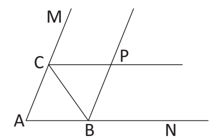
**Ejercicio 5**
Solución.
Véase la pág. 33.

### Ejercicios de la lección

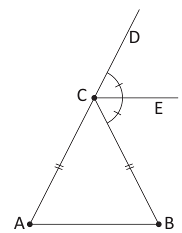
1) En la figura $\Delta ABC$ es isósceles donde BA = BC, $\overline{BE}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$. Si los segmentos tienen las longitudes indicadas, halle $x$, $y$.



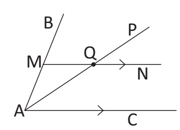

2) En el $\Delta ABC$, las bisectrices de dos ángulos externos de $\angle B$ y $\angle C$ se intersecan en P. Demuestre que la suma de la medida del ángulo BPC y la mitad de la medida del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).




3) Demuestre que en todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesta a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.

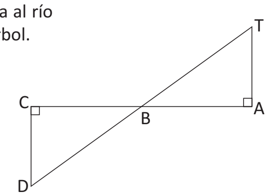



4) Demuestre que si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles. Demuestre que el triángulo MAQ es isósceles.




5) Dos exploradores Luis y María están parados a la orilla de un río en el punto A directamente enfrente de un árbol T que se encuentra al otro lado del rio. Ellos marcan cierta distancia a un punto B donde María permanece, sin embargo, Luis camina exactamente la misma distancia de A a B a un punto C, luego gira y camina en dirección opuesta al río hacia un punto D donde él puede ver a María alineada con el árbol. A, B y C son colineales.

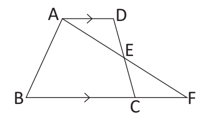
   a) Identifique la correspondencia de pares de lados y ángulos congruentes
   b) Demuestre que $\Delta ABT \cong \Delta CBD$
   c) ¿Cómo podrían ellos usar la información que se tiene para encontrar el ancho del río?



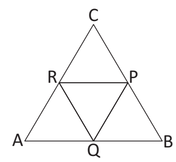
**Objetivo:** Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

# Ejercicios de la lección
(Continuación)

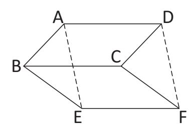
6) En la figura de la derecha $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y E es el punto medio de $\overline{CD}$. Demuestre que los triángulos $\Delta ADE$ y $\Delta FCE$ son congruentes.



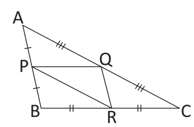

7) En la figura P, Q y R son puntos medios de los lados del triángulo equilátero $\Delta ABC$. Demuestre que el triángulo $\Delta PQR$ es equilátero.



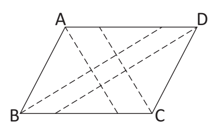

8) En la figura los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestre que el cuadrilátero AEFD también es paralelogramo.




9) Se da cualquier $\Delta ABC$ y los puntos medios de los lados, P, Q y R. Demuestre que el perímetro del $\Delta PQR$ es la mitad del perímetro del $\Delta ABC$.

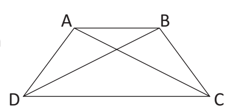



*10) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma con las bisectrices de los 4 ángulos de un paralelogramo? Demuéstrelo.




Primero demuestra que las bisectrices de ángulos opuestos del paralelogramo son paralelas entre sí.

11) Demuestre que las diagonales de un trapecio Isósceles son congruentes




Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección | 17

**Ejercicio 6**
Solución.
Véase la pág. 33.

**Ejercicio 7**
Solución.
Véase la pág. 33.

**Ejercicio 8**
Solución.
Véase la pág. 34.

**Ejercicio 9**
Solución.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. P es punto medio de $\overline{AB}$. Q es punto medio de $\overline{AC}$. R es punto medio de $\overline{BC}$. | Hipótesis |
| 2. $PQ = \frac{1}{2}BC$<br>$PR = \frac{1}{2}AC$<br>$QR = \frac{1}{2}AB$ | Teorema de los dos puntos |
| 3. Perimetro $\Delta ABC = AB + BC + CA$<br>Perimetro $\Delta RPQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ | Por 3 |

***Ejercicio 10**
Solución.
Véase la pág. 34.

**Ejercicio 11**
Solución.
Véase la pág. 35.

## Ejercicios de la lección
(Continuación)

**Objetivo:** Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

**Ejercicio 12**
Solución.
Véase la pág. 36.

**Ejercicio 13**
Solución.

$EF = EH + HF$

$= \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$

$= \frac{1}{2}(11) + \frac{1}{2}(5)$

$= \frac{16}{2}$

$= 8$

$EF = 8$

En $\Delta ABC$ y $\Delta ACD$,

$GH = EF - EG - HF$

$= 8 - \frac{1}{2}(5) - \frac{1}{2}(5)$

$= 8 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}$

$= 8 - \frac{10}{2}$

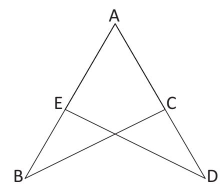
$= 8 - 5$

$= 3$

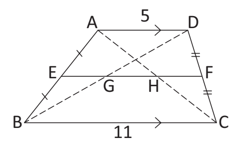
$GH = 3$

12) Para cada una de las siguientes opciones decide si la información dada es suficiente para concluir que $\Delta ABC \cong \Delta ADE$, si es así demuéstrelo.

a) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\angle B \cong \angle D$
b) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
c) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{AC}$
d) $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$




13) En la figura AD || BC, AE = EB y DF = FC. Encuentre la longitud de los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$.




Considere la siguiente propiedad, la mediana de un trapecio es paralela a sus bases y su longitud es igual a la mitad de la suma de ellas.

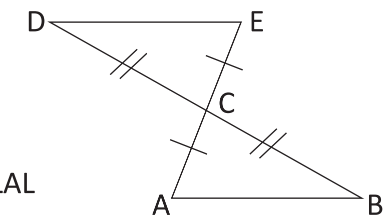
## Soluciones de Ejercicios Lección1

### Solución Ejercicio 1.2. Pág. 4

a1) LLL   a2 ) ALA   a3) LAL

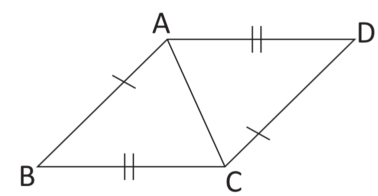
b) En la figura $\overline{AE}$ interseca a $\overline{BD}$ en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demostrar $\angle A \cong \angle E$

| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ | Hipótesis |
| 3. $\angle DCE \cong \angle BCA$ | Ángulos opuestos por el vértice |
| 4. $\Delta DCE \cong \Delta BCA$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL |
| 5. $\angle A \cong \angle E$ | Por 4 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |



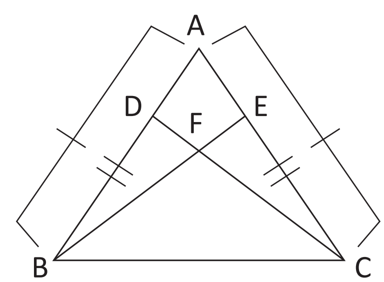

c) En la figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ , Demostrar $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 4. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LLL |




d) $\Delta ABC$ isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$), D y E en los lados AB y AC respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$ demostrar:
d1) $\overline{BE} \cong \overline{CD}$
Entre $\Delta BEC$ y $\Delta CDB$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{BD} \cong \overline{CE}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ | Hipótesis |
| 3. $\angle B \cong \angle C$ | Por 2 ($\Delta ABC$ es isósceles) |
| 4. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 5. $\Delta BEC \cong \Delta CDB$ | Por 1, 3, 4 y criterio de congruencia LAL |
| 6. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ | Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes. |



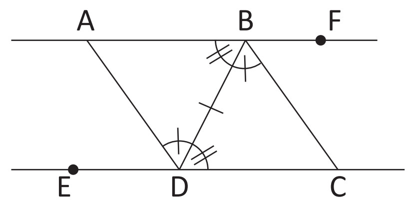

d2) F corta a $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$ entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\Delta BEC \cong \Delta CDB$ | Demostrado en proposición 5 d1) |
| 2. $\angle EBC \cong \angle DCB$ | Por 1 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 3. $\overline{BF} \cong \overline{CF}$ | Por 2 ($\Delta FBC$ es isósceles) |

(Continúa en la siguiente página)

e) En la figura las rectas AB y DC son paralelas, $\overline{DA}$ biseca el $\angle BDE$ y $\overline{BC}$ biseca el $\angle DBF$ demuestre:

e1) $\Delta DAB \cong \Delta BCD$




| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{DA}$ es bisectriz de $\angle BDE$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BC}$ es bisectriz de $\angle DBF$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ | Hipótesis |
| 4. $\angle EDA \cong \angle ADB$ | Por 1 |
| 5. $\angle DBC \cong \angle CBF$ | Por 2 |
| 6. $\angle EDB \cong \angle DBF$ | Por 3 (ángulos alternos internos) |
| 7. $2m\angle ADB = 2m\angle DBC$ | Por 4, 5 y 6 |
| 8. $m\angle ADB = m\angle DBC$ | Dividiendo en paso 7 entre 2 |
| 9. $\angle ADB \cong \angle DBC$ | Por 8 |
| 10. $\angle DBA \cong \angle CDB$ | Por 3 (ángulos alternos internos) |
| 11. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 12. $\Delta DAB \cong \Delta BCD$ | Por 9, 10, 11 y criterio de congruencia ALA |

e2) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

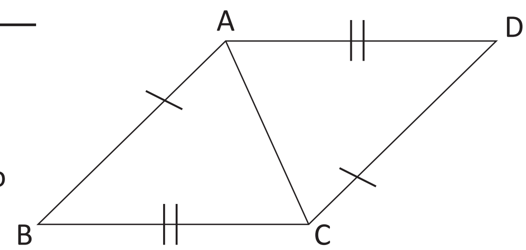
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | Por paso 9 de e1) y condición de paralelismo (ángulos alternos internos) |

## Solución Ejercicio 1.4. Pág. 5

En el cuadrilátero ABCD, AD = BC y AB = DC , Demostrar:

a) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. AD = BC; AB = CD | Hipótesis |
| 2. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ | Por 1 |
| 3. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ | Por 1 |
| 4. $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 5. $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ | Por 2, 3, 4 y criterio de congruencia LLL |




b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

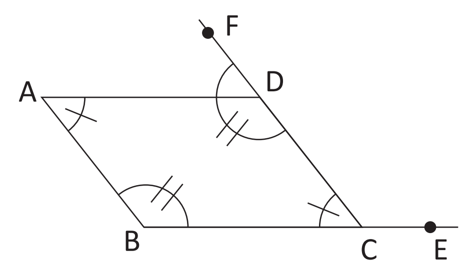
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\angle BAC \cong \angle DCA$ | Por a) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ | Por 1 y condición de paralelismo |
| 3. $\angle BCA \cong \angle DAC$ | Por a) y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 4. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | Por 3 y condición de paralelismo |

## Solución Ejercicio 1.5. Pág. 6

Demuestre las condiciones:

a1) Demostrar la condición c)

| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. $m\angle A + m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDA = 360°$ | Suma de los ángulos internos de un cuadrilátero |
| 2. $m\angle A = m\angle BCD$ y $m\angle B = m\angle CDA$ | Hipótesis |
| 3. $2m\angle B + 2m\angle BCD=360°$ | Por 1 y 2 |
| 4. $m\angle B + m\angle BCD=180°$ | Dividiendo en paso 3 entre 2 |
| 5. $m\angle BCD + m\angle DCE = 180°$ | Ángulos adyacentes |
| 6. $m\angle B = m\angle DCE$ | Por 4 y 5 |
| 7. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ | Por 6 y condición de paralelismo |
| 8. $2m\angle BCD + 2m\angle CDA = 360°$ | Por 1 y 2 |
| 9. $m\angle BCD + m\angle CDA = 180°$ | Dividiendo en paso 8 entre 2 |
| 10. $m\angle CDA + m\angle ADF = 180°$ | Ángulos adyacentes |
| 11. $m\angle BCD = m\angle ADF$ | Por 9 y 10 |
| 12. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ | Por 11 y condición de paralelismo |
| 13. ABCD es un paralelogramo | Por 7, 12 y definición de paralelogramo |



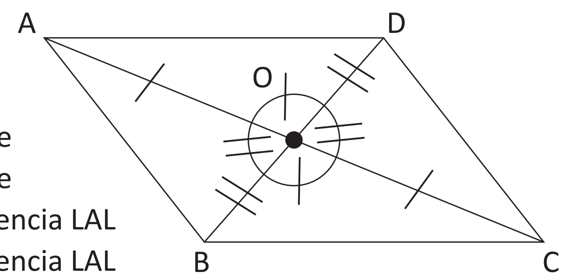

(Continúa en la siguiente página)

**Solución Ejercicio 1.5.** (Continuación)

a2) Demostrar la condición d)

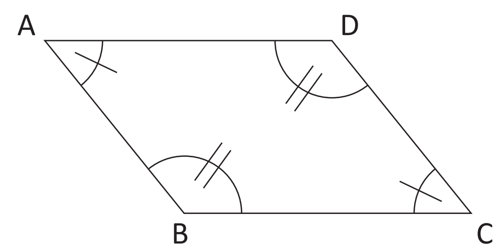
Sea O el punto medio de las diagonales AC y BD

| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. AO = CO | Hipótesis |
| 2. BO = DO | Hipótesis |
| 3. $\angle$AOD $\cong$ $\angle$COB | Ángulos opuestos por el vértice |
| 4. $\angle$AOB $\cong$ $\angle$COD | Ángulos opuestos por el vértice |
| 5. $\Delta$AOD $\cong$ $\Delta$COB | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL |
| 6. $\Delta$AOB $\cong$ $\Delta$COD | Por 1, 2, 4 y criterio de congruencia LAL |
| 7. $\angle$ADO $\cong$ $\angle$CBO | Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 8. $\angle$ABO $\cong$ $\angle$CDO | Por 6 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 9. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | Por 7 y condición de paralelismo |
| 10. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ | Por 8 y condición de paralelismo |
| 11. ABCD es un paralelogramo | Por 9, 10 y definición de paralelogramo |



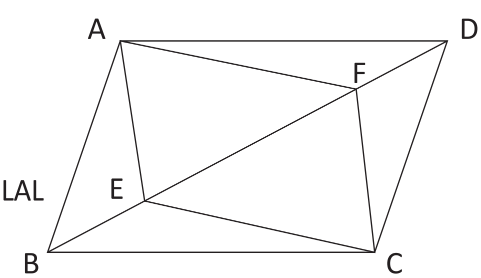

a3) Demostrando la condición e)

| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. $m\angle A + m\angle B = 180°$ | Hipótesis |
| 2. $m\angle B + m\angle C = 180°$ | Hipótesis |
| 3. $m\angle A = m\angle C$ | Igualando 1 y 2 |
| 4. $m\angle C + m\angle D = 180°$ | Hipótesis |
| 5. $m\angle B = m\angle D$ | Igualando 2 y 4 |
| 6. ABCD es un paralelogramo | Por 3, 5 y condición c) |




b) E y F en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo

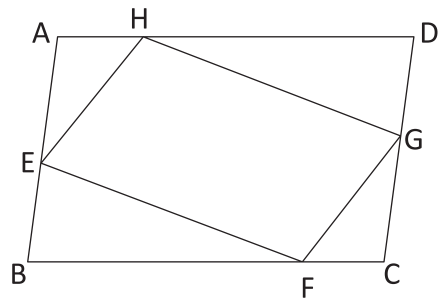
| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{EB} \cong \overline{FD}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | Hipótesis |
| En el $\Delta$ABE y $\Delta$CDF | |
| 3. $\angle$ABE $\cong$ $\angle$CDF | Por 2 (ángulos alternos internos) |
| 4. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ | Hipótesis |
| 5. $\Delta$ABE $\cong$ $\Delta$CDF | Por 1, 3, 4 y criterio de congruencia LAL |
| En el $\Delta$BEC y $\Delta$DFA | |
| 6. $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis |
| 7. $\angle$EBC $\cong$ $\angle$FDA | Por 2 (ángulos alternos internos) |
| 8. $\Delta$BEC $\cong$ $\Delta$DFA | Por 1, 6, 7 y criterio de congruencia LAL |
| 9. $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ | Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 10. $\overline{CE} \cong \overline{AF}$ | Por 8 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 11. AECF es un paralelogramo | Por 9, 10 y condiciópn de paralelogramo |




(Continúa en la siguiente página)

## Solución Ejercicio 1.5. (Continuación)

c) Los puntos E, F, G y H son puntos de los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD de modo que AE = CG y BF = DH. Demuestre que EFGH es un paralelogramo




| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. AE = CG | Hipótesis |
| 2. BF = DH | Hipótesis |
| En el $\Delta$EBF y $\Delta$GDH | |
| 3. $\angle B \cong \angle D$ | ABCD es un paralelogramo |
| 4. AB = CD | ABCD es un paralelogramo |
| 5. AB = AE + EB | Suma de longitudes |
| 6. DC = CG + GD | Suma de longitudes |
| 7. EB = GD | Por 1, 4, 5, 6 |
| 8. $\Delta EBF \cong \Delta GDH$ | Por 2, 3, 7 y criterio de congruencia LAL |
| 9. $\overline{EF} \cong \overline{GH}$ | Por 8 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| En el $\Delta$EAH y $\Delta$GCF | |
| 10. $\angle A \cong \angle C$ | ABCD es un paralelogramo |
| 11. DA = BC | ABCD es un paralelogramo |
| 12. DA = DH + HA | Suma de longitudes |
| 13. BC = BF + FC | Suma de longitudes |
| 14. HA = FC | Por 2, 11, 12, 13 |
| 15. $\Delta EAH \cong \Delta GCF$ | Por 1, 10,14 y criterio de congruencia LAL |
| 16. $\overline{EH} \cong \overline{GF}$ | Por 15 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 17. EFGH es un | Por 9, 16 y condición de paralelogramo |

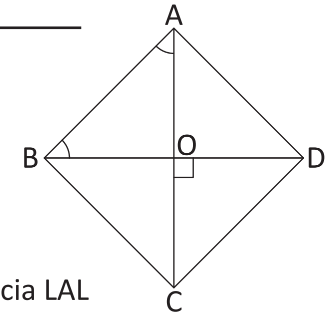
## Solución Ejercicio 1.6. Pág. 7

Demuestre que un cuadrilátero cuya diagonal son congruentes y se cortan en el punto medio, es un rectángulo.

| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. PA = PB = PC = PD | Hipótesis |
| 2. $\Delta$PAB, $\Delta$PBC, $\Delta$PCD, $\Delta$PDA son triángulos $\boxed{\text{isósceles}}$ | $\boxed{\text{Por 1}}$ |
| 3. $\angle APD \cong \angle CPB$, $\angle APB \cong \angle CPD$ | $\boxed{\text{Ángulos opuestos por el vértice}}$ |
| 4. $\Delta PAD \cong \Delta PCB$, $\Delta PAB \cong \Delta PCD$ | $\boxed{\text{Por 1, 3 y criterio de congruencia LAL}}$ |
| 5. $m\angle PAD = \boxed{m\angle PDA} = \boxed{m\angle PCB} = \boxed{m\angle PBC}$ y $m\angle PAB = \boxed{m\angle PBA} = \boxed{m\angle PCD} = \boxed{m\angle PDC}$ | $\boxed{\text{Por 2, 4}}$ |
| 6. $m\angle DAB = m\angle ABC = m\angle BCD = m\angle CDA = 90°$ | Por 5 y (suma de los ángulos internos de cuadrilátero) ÷ 4 |
| 7. ABCD es un rectángulo | $\boxed{\text{Por 6 y definiciópn de rectángulo}}$ |

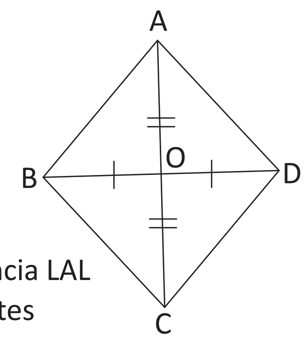
## Solución Ejercicio 1.7. Pág. 7

a) Demostrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio, entonces este es un cuadrado



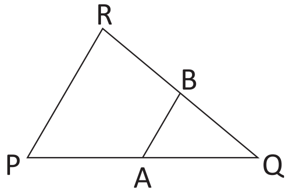

| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| Sea O el punto medio de las diagonales AC y BD, | |
| 1. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ | Hipótesis |
| 2. $m\angle AOB = m\angle BOC = m\angle COD = m\angle DOA = 90°$ | Por 1 |
| 3. $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO} \cong \overline{DO}$ | Hipótesis |
| 4. $\Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta COD \cong \Delta DOA$ | Por 2, 3 y criterio de congruencia LAL |
| 5. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ | Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 6. $\angle ABO \cong \angle BAO$ | Por 3 ($\Delta OAB$ es isósceles) |
| 7. $m\angle ABO = m\angle BAO = 45°$ | Por 2, 6 |
| 8. $m\angle ABO + m\angle OBC = 45° + 45° = 90°$ | Por 4, 7 |
| 9. $m\angle ABC = m\angle ABO + m\angle OBC$ | Adición de ángulos |
| 10. $m\angle ABC = 90°$ Haciendo un análisis similar se concluye que $m\angle ABC = m\angle BCD = m\angle CDA = m\angle DAB = 90°$ | Por 8 y 9 |
| 11. ABCD es cuadrado | Por 5, 10 y definición de cuadrado |

b) Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo (Sea O el punto medio de las diagonales AC y BD)




| Proposiciones | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BO} \cong \overline{DO}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ | Hipótesis |
| 4. $\angle AOB \cong \angle AOD \cong \angle COB \cong \angle COD$ | Por 3 |
| 5. $\Delta AOB \cong \Delta AOD \cong \Delta COB \cong \Delta COD$ | Por 1, 2, 4 y criterio de congruencia LAL |
| 6. $\overline{AB} \cong \overline{AD} \cong \overline{CB} \cong \overline{CD}$ | Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 7. ABCD es un rombo | Por 6 y definición de rombo |

## Solución Ejercicio 1.9. Pág. 8




AB = 8, $m\angle BAQ = 58°$

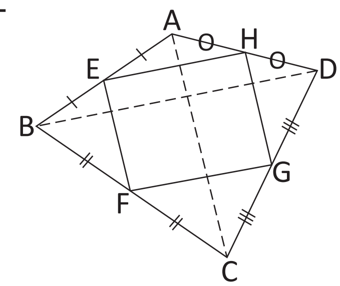
Estos resultados se obtuvieron de la siguiente manera:

$AB = \frac{1}{2}RP$ aplicando el teorema de los dos puntos.

$AB = \frac{1}{2}(16) = 8$. $\overline{PR} \parallel \overline{AB}$ por lo que $m\angle BAQ = 58°$ por ser ángulos correspondientes con $\angle P$.

## Solución Ejercicio 1.10. Pág. 9

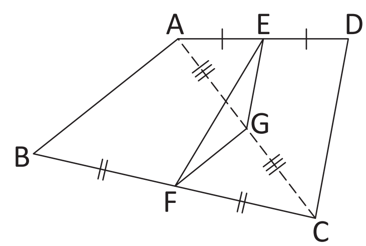
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. E, F, G y H son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente | Hipótesis |
| 2. En $\Delta$ABD, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ | $\boxed{\text{Teorema de los dos puntos}}$ |
| 3. En $\Delta$BCD, $\boxed{\overline{FG} \parallel \overline{BD}}$ | Teorema de los dos puntos |
| 4. EH \|\| FG | Igualando 2 y 3. |
| 5. En $\Delta$ACD, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ | $\boxed{\text{Teorema de los dos puntos}}$ |
| 6. $\boxed{\text{En } \Delta ABC, \overline{EF} \parallel \overline{AC}}$ | Teorema de los dos puntos |
| 7. $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ | Igualando 5 y 6. |
| 8. EFGH es un paralelogramo | $\boxed{\text{Por 4, 7 y definición de paralelogramo}}$ |




## Solución Ejercicio 1.11. Pág. 9

(También se puede demostrar basándose en la condición de pares de lados congruentes de un paralelogramo, pero se sugiere utilizar el teorema de los dos puntos porque la demostración es más sencilla y es el teorema que se está abordando en ésta clase)

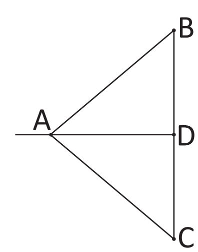
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ | Hipótesis |
| 2. E, F y G son puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente | Hipótesis |
| 3. En $\Delta$ABC, FG = $\frac{1}{2}$ AB | Teorema de los dos puntos |
| 4. En $\Delta$ACD, EG = $\frac{1}{2}$ DC | Teorema de los dos puntos |
| 5. FG = EG | Por 1, 3 y 4 |
| 6. $\Delta$EFG es isósceles | Por 5 |




## Solución Ejercicio 1.13. Pág. 10

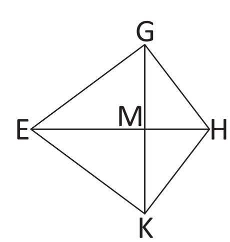
a) Si D es el punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el $\Delta$ABC es isósceles.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. D es punto medio de $\overline{BC}$; $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{AD}$ es la mediatriz del $\overline{BC}$ | Por 1 |
| 3. AB = AC | Propiedad de la mediatriz |
| 4. $\Delta$ABC es isósceles | Por 3 |



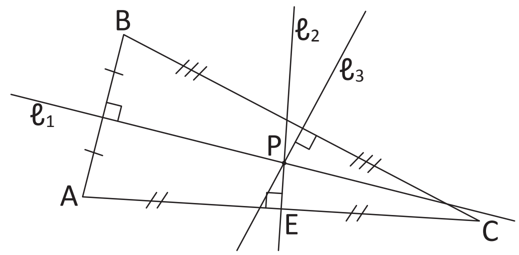

b) En la figura, M está en el $\overline{GK}$. GE = KE, GM = KM y H está en la recta EM. Demostrar que: GH = KH.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. GE = KE y GM = KM | Hipótesis |
| 2. H está en la recta EM | Hipótesis |
| 3. $\overline{EM} \cong \overline{EM}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 4. $\Delta$GEM $\cong$ $\Delta$KEM | Por 1, 3 y citerio de congruencia LLL |
| 5. $m\angle$GME = $m\angle$KME = 90° | Por 4 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes y adyacentes |
| 6. $\overline{MH}$ es la mediatriz de $\overline{GK}$ | Por 1, 5 |
| 7. GH = HK | Propiedad de la mediatriz |



## **Solución Ejercicio 1.15.** Pág. 10

Demuestre el teorema anterior (Teorema 1.6) considerando a P como punto de intersección de las rectas $\ell_1$ y $\ell_2$ aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P está en la recta $\ell_3$ y PA = PB = PC.
Sean los puntos P y E la intersección de $\overline{AB}$ y $\ell_1$, $\overline{AC}$ y $\ell_2$ respectivamente.

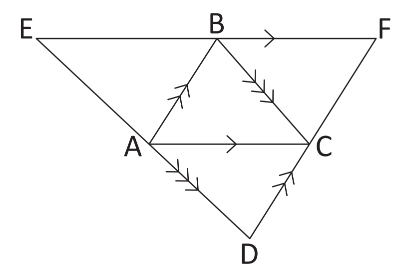



| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\ell_1$ es mediatriz de $\overline{AB}$ en el punto D → AD = BD y $m\angle ADP = m\angle BDP = 90°$ | Hipótesis |
| 2. $\ell_2$ es mediatriz de $\overline{AC}$ en el punto E → AE = CE y $m\angle AEP = m\angle CEP = 90°$ | Hipótesis |
| 3. $\ell_1$ y $\ell_2$ se intersecan en P | Hipótesis |
| 4. $\overline{DP} \cong \overline{DP}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 5. $\Delta DPA \cong \Delta DPB$ | Por 1, 4 y criterio de congruencia LAL |
| 6. PA = PB | Por 5 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 7. $\overline{PE} \cong \overline{PE}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 8. $\Delta AEP \cong \Delta CEP$ | Por 2, 7 y criterio de congruencia LAL |
| 9. PA = PC | Por 8 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 10. PB = PC | Por 6 y 9 |
| 11. P está en la recta $\ell_3$ | Por 10 e hipótesis ($\ell_3$ es la mediatriz del $\overline{BC}$) y propiedad de la mediatriz |

## Solución Ejercicio 1.19. Pág. 12

Se deja la demostración del teorema 1.7
En $\Delta ABC$, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el $\Delta DEF$.
Demuestre que las mediatrices de los lados del $\Delta DEF$ son las tres alturas del $\Delta ABC$.
Utilice las condiciones de paralelogramo y el teorema de concurrencia de las mediatrices.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. El cuadrilátero ADCB es un paralelogramo. | Por construcción |
| 2. AD = BC | Por 1 |
| 3. El cuadrilátero EACB es un paralelogramo. | Por construcción |
| 4. EA = BC | Por 3 |
| 5. A es el punto medio de $\overline{DE}$. | Por 2 y 4 |
| 6. B y C son los puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$ respectivamente. | Mismo que 1 a 5 |
| 7. Las perpendiculares a los $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$ son perpendiculares a las $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$ respectivamente. | $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{FD} \parallel \overline{BA}$ |
| 8. Las mediatrices del $\Delta DEF$ contienen las alturas del $\Delta ABC$. | Por 5, 6 y 7 |
| 9. Las mediatrices del $\Delta DEF$ se intersecan en un punto. | Teorema de concurrencia de las mediatrices |
| 10. Las tres alturas del $\Delta ABC$ son concurrentes en un punto. | Por 8 y 9 |




## Solución Ejercicio 1.21. Pág. 12

Demuestre el otro sentido del teorema: Si rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$, entonces K y L equidistan de P

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. Rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$ | Hipótesis |
| 2. $\angle PBK \cong \angle PBL$ | Paso 1 |
| 3. $m\angle PKB = m\angle PLB = 90°$ | Por $\overline{PK} \perp \overline{BK}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BP}$ |
| 4. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 5. $\Delta BPK \cong \Delta BPL$ | Por 2, 3, 4 y criterio de congruencia hipotenusa - ángulo de triángulos rectángulos |
| 6. PK = PL | Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes. |

## Solución Ejercicio 1.23. Pág. 13

Complete la demostración del teorema de concurrencia de las bisectrices de un triángulo.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. Rayo AI es la bisectriz del $\angle BAC$ | Hipótesis |
| 2. $\boxed{\text{Rayo CI}}$ es la bisectriz del $\angle BCA$ | Hipótesis |
| 3. ℓ equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ | Por 1 y propiedad de bisectriz |
| 4. ℓ equidista de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ | Por 2 y $\boxed{\text{propiedad de la bisectriz}}$ |
| 5. ℓ equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ | Por 3, 4 y propiedad transitiva |
| 6. $\boxed{\text{Rayo BI}}$ es la bisectriz del $\boxed{\angle ABC}$ | Por 5 y propiedad de la bisectriz |

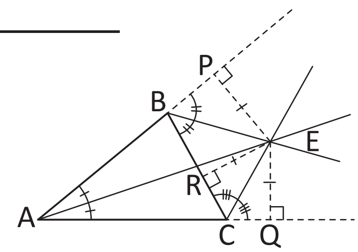
## Solución Ejercicio 1.24. Pág. 13

Utilizando la construcción empleada en el ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. Los segmentos IP, IQ, IR son perpendicular a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectivamente. Además, P, Q, R están en el segmento BC, CA, AB respectivamente.

## Solución Ejercicio 1.27. Pág. 14

Complete la demostración. Considere en $\Delta$ABC las bisectrices BE y CE de los ángulos exteriores $\angle$PBC y $\angle$QCB respectivamente y $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$. Demuestre que rayo AE es la bisectriz de $\angle$BAC.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. Rayo BE es la bisectriz del $\angle$PBC | $\boxed{\text{Hipótesis}}$ |
| 2. $\boxed{\text{Rayo CE}}$ es la bisectriz del $\angle$BCQ | Hipótesis |
| 3. $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$ | $\boxed{\text{Hipótesis}}$ |
| 4. PE = RE | Por 1, 3 y propiedad de bisectriz |
| 5. $\boxed{\text{RE = QE}}$ | Por 2, 3 y propiedad de bisectriz |
| 6. PE = QE | $\boxed{\text{Por 4, 5 y transitividad}}$ |
| 7. $\boxed{\text{Rayo AE}}$ es la bisectriz del $\boxed{\angle \text{BAC}}$ | $\boxed{\text{Por 6 y propiedad de bisectriz de un ángulo}}$ |

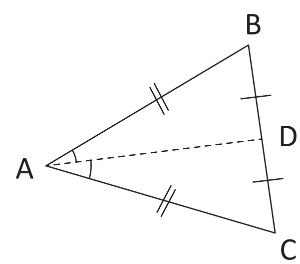



## Solución Ejercicio 1.28. Pág. 16

a) se omite la solución

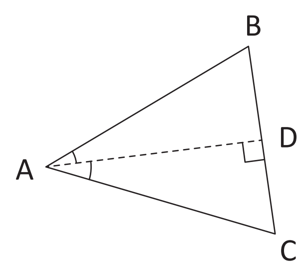
b)

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AD}$ es mediana del $\Delta$ABC | Hipótesis |
| 2. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ | Hipótesis |
| 3. $m\angle$ADB $\cong$ $m\angle$ADC = 90° | Por 2 |
| 4. $\overline{DB} \cong \overline{DC}$ | Por 1 |
| 5. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 6. $\Delta$ADB $\cong$ $\Delta$ADC | Por 3, 4, 5 y criterio de congruencia LAL |
| 7. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle$BAD $\cong$ $\angle$CAD | Por 6 y ser lados y ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 8. $\Delta$ABC es isósceles, $\overline{AD}$ biseca a $\angle$BAC | Por 7 |




c)

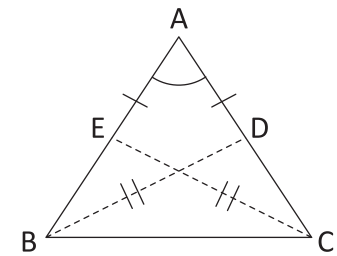
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\Delta$ABC es isósceles ($\overline{AB}$ = $\overline{AC}$) | Hipótesis |
| 2. $\overline{AD}$ es mediana de $\Delta$ABC al $\overline{BC}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ | Por 1 |
| 4. $\angle$B $\cong$ $\angle$C | Por 1 |
| 5. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ | Por 2 |
| 6. $\Delta$ABD $\cong$ $\Delta$ACD | Por 3, 4, 5 y criterio de congruencia LAL |
| 7. $\angle$BDA $\cong$ $\angle$CDA | Por 6 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 8. $m\angle$BDA + $m\angle$CDA = 180° | Ángulos adyacentes |
| 9. 2$m\angle$BDA = 180° $m\angle$BDA = 90° | Por 7 y 8 |
| 10. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ | Por 9 |
| 11. $\angle$BAD $\cong$ $\angle$CAD | Por 6 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 12. $\overline{AD}$ biseca a $\angle$BAC | Por 11 |




(Continúa en la siguiente página)

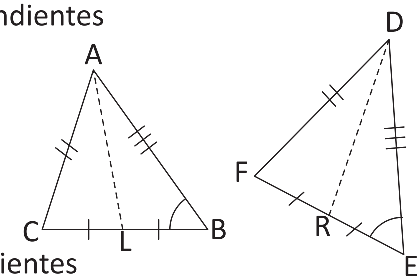
## Solución Ejercicio 1.28. (Continuación)

Sea ABC es isósceles (AB = AC)




d)

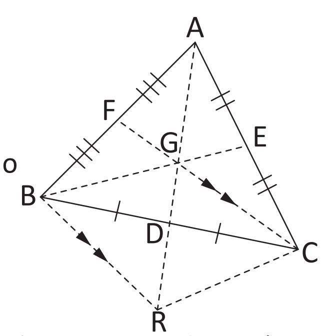
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ son medianas del $\Delta ABC$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ | Hipótesis |
| 3. E es punto medio de $\overline{AB}$<br>D es punto medio de $\overline{AC}$ | Por 1 |
| 4. AE = EB = AD = DC | Por 2 y 3 |
| 5. $\angle A \cong \angle A$ | Congruencia del mismo ángulo |
| 6. $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ | Por 2, 4, 5 y criterio de congruencia LAL |
| 7. $\overline{BD} \cong \overline{CE}$ | Por 6 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |




e)

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{AL}$ es mediana de $\overline{BC}$ en $\Delta ABC$<br>$\overline{DR}$ es mediana a $\overline{EF}$ en $\Delta DEF$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ | Por 1 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |
| 4. L es punto medio de $\overline{BC}$<br>R es punto medio de $\overline{FE}$ | Por 2 |
| 5. BL = ER | Por 3 |
| 6. $\angle B \cong \angle E$ | Por 1 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 7. $\Delta ABL \cong \Delta DER$ | Por 3, 5, 6 y criterio de congruencia LAL |
| 8. $\overline{AL} \cong \overline{ER}$ | Por 7 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |

## Solución Ejercicio 1.29. Pág. 16

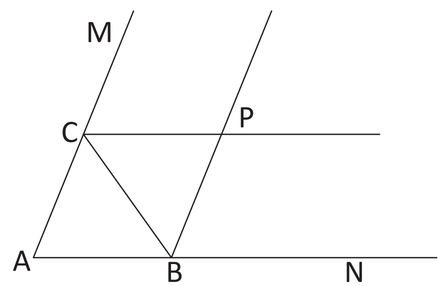



| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son medianas del $\Delta ABC$ | Hipótesis |
| 2. G es el baricentro | Hipótesis |
| 3. Sea R un punto en el rayo AD de manera que $\overline{GD} \cong \overline{DR}$ | Construcción |
| 4. $\overline{DB} \cong \overline{DC}$ | Por 1 |
| 5. BGCR es un paralelogramo | Por 3, 4 y condición de paralelogramo |
| 6. $\overline{BR} \parallel \overline{GC}$ | Por 5, definición de paralelogramo |
| 7. $\overline{BR} \parallel \overline{FG}$ | Por 6 y $\overline{FG}$ está en la recta FC |
| 8. F es punto medio de $\overline{AB}$ | Por 1 |
| Entre $\Delta AFG$ y $\Delta ABR$ | |
| 9. $\angle AFG \cong \angle ABR$, $\angle AGF \cong \angle ARB$ | Por 7 y condición de paralelismo (ángulos correspondientes) |
| 10. $\Delta AFG \sim \Delta ABR$ | Por 9 |
| 11. G es punto medio de $\overline{AR}$ | Por 8, 10 y ser lados correspondientes de triángulos semejantes |
| 12. $GF = \frac{1}{2} BR$ | Teorema de los puntos |
| 13. $GF = \frac{1}{2} GC$ | Por 6 y 12 |
| 14. $GE = \frac{1}{2} GB$ y $GD = \frac{1}{2} GA$ | Igual manera hasta 13 |
| 15. GA = 2 GD<br>GC = 2 GF o GB = 2GE | Por 13 y 14 |
| 16. AG:GD = 2:1, BG:GF = 2:1, CG:GF = 2:1 | Por 15 |

## Solucionario Lección 1 - Ejercicios de la Lección

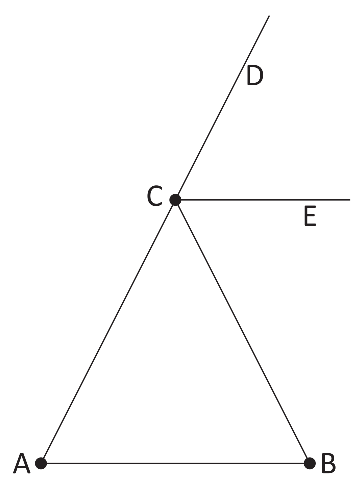
2) En el $\Delta ABC$, las bisectrices de dos ángulos externos de $\angle B$ y $\angle C$ se intersecan en P. Demuestre que la suma de la medida del ángulo BPC y la mitad de la medida del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. Sea rayo CP es la bisectriz de $\angle MCB$ y $\overline{BP}$ es la bisectriz de $\angle CBN$ | Hipótesis |
| 2. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$ | Suma de ángulos internos de un triangulo |
| 3. $m\angle PCB = \frac{m\angle MCB}{2}$ | Por 1 |
| 4. $m\angle CBP = \frac{m\angle CBN}{2}$ | Por 1 |
| 5. $m\angle MCB = m\angle A + m\angle B$<br>$m\angle CBN = m\angle A + m\angle C$ | Angulo externo |
| 6. $\frac{m\angle MCB}{2} + \frac{m\angle CBN}{2} + m\angle BPC = 180°$ | Por 3, 4 y suma de las medidas de los ángulos internos del $\Delta CPB$ |
| 7. $\frac{m\angle A + m\angle B}{2} + \frac{m\angle A + m\angle C}{2} + m\angle BPC = 180°$ | Sustituyendo 5 en 6 |
| 8. $m\angle A + m\angle B + m\angle A + m\angle C + 2m\angle BPC = 360°$ | Multiplicando por 2 |
| 9. $180° + m\angle A + 2m\angle BPC = 360°$ | Sustituyendo 2 en 8 |
| 10. $m\angle A + 2m\angle BPC = 180°$ | Operando en 9 |
| 11. $\frac{1}{2}m\angle A + m\angle BPC = 90°$ | Dividiendo entre 2 |



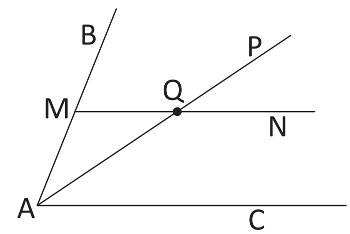

**3)** Demuestre que en todo triangulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesta a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. Sea $\Delta ABC$ isósceles (CA = CB) | Hipótesis |
| 2. $\angle A \cong \angle B$ | Por 1 |
| 3. $\overline{CE}$ es la bisectriz del ángulo externo $\angle BCD$ | Hipótesis |
| 4. $m\angle A = m\angle B$ | Por 2 |
| 5. $m\angle DCE = m\angle ECB$ | Por 3 |
| 6. $m\angle DCB = m\angle DCE + m\angle ECB = 2m\angle DCE$ | Por 3, 5 |
| 7. $m\angle DCB = m\angle A + m\angle B = 2m\angle A$ | Por 4 y ángulo externo de un triángulo |
| 8. $2m\angle DCE = 2m\angle A$ | Igualando 6 y 7 |
| 9. $m\angle DCE = m\angle A$ | Dividiendo entre 2 |
| 10. $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ | Por 9 y condición de paralelismo (ángulos correspondientes) |



**4)** Demostraremos primero que las bisectrices de ángulos opuestos son paralelas.

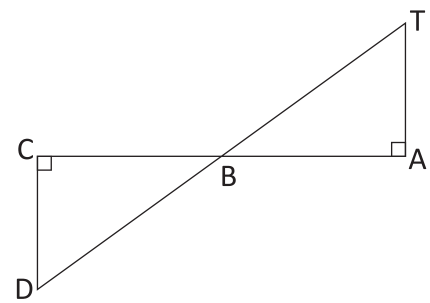
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AP}$ es la bisectriz de $\angle BAC$ | Hipótesis |
| 2. $m\angle MAQ \cong m\angle QAC$ | Por 1 |
| 3. $\overline{MN}$ es paralela al lado AC | Hipótesis |
| 4. $\angle QAC \cong \angle AQM$ | Por 3 y ángulos alternos internos |
| 5. $\angle MAQ \cong \angle AQM$ | Igualando 2 y 4 |
| 6. $\Delta AQM$ es isósceles | Por 5 |




**5)** a) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ por construcción y $\angle A \cong \angle C$ ambos son rectos.

b)

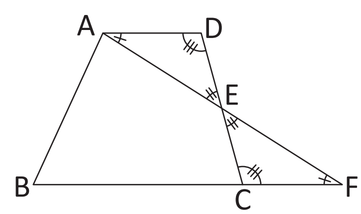
| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ | Construcción |
| 2. $\angle A \cong \angle C$ | Ambos son rectos (Por situación) |
| 3. $\angle ABT \cong \angle CBD$ | Ángulos opuestos por el vértice |
| 4. $\Delta ABT \cong \Delta CBD$ | Por 1, 2, 3, y criterio de congruencia ALA |




c) Como los triángulos $\Delta ABT$ y $\Delta CBD$ son congruentes significa que $\overline{TA} \cong \overline{DC}$ por lo tanto basta con medir la distancia DC y se conocerá el ancho del río.

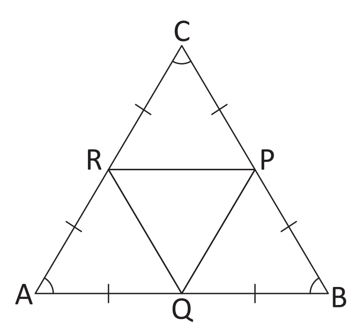
**6)**

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | Hipótesis |
| 2. E es el punto medio de $\overline{CD}$. | Hipótesis |
| 3. $\overline{DE} \cong \overline{CE}$ | Por 2 |
| 4. $\angle ADE \cong \angle FCE$ | Por 1 y ángulos alternos internos |
| 5. $\angle AED \cong \angle FEC$ | Ángulos opuestos por el vértice |
| 6 . $\Delta ADE \cong \Delta FCE$ | Por 3, 4, 5 y criterios de congruencia ALA |



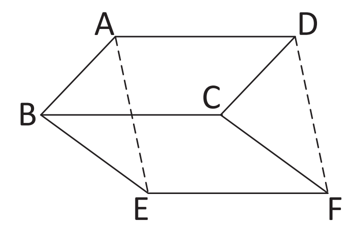

**7)**

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\Delta ABC$ es equilátero | Hipótesis |
| 2. $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ | Por 1 |
| 3. P,Q y R son punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente | Hipótesis |
| 4. AB = BC = CA | Por 1 |
| 5. AQ = BQ, BP = CP, CR = AR | Por 3 |
| 6. $\overline{AQ} \cong \overline{BQ} \cong \overline{BP} \cong \overline{CP} \cong \overline{CR} \cong \overline{AR}$ | Por 4 y 5 |
| 7. $\Delta AQR \cong \Delta BPQ \cong \Delta CRP$ | Por 2, 6 y criterio de congruencia LAL |
| 8. $\overline{RQ} \cong \overline{QP} \cong \overline{PR}$ | Por 7 y ser lados corresppondientes de triángulos congruentes |
| 9. $\Delta PQR$ es equilátero | Por 8 |



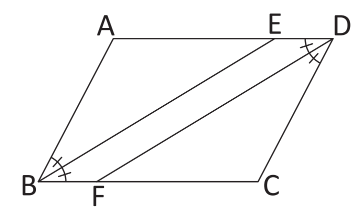
**8)**

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ | ABCD es un paralelogramo |
| 2. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ | BECF es un paralelogramo |
| 3. $\overline{AD} \cong \overline{EF}$, $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ | Por 1 y 2 |
| 4. AEFD es un paralelogramo | Por 3 y condición de paralelogramo |



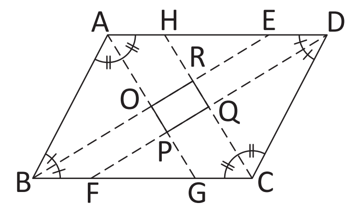

**10)** ***** Demostraremos primero que las bisectrices de ángulos opuestos son paralelas.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $m\angle ABC = m\angle ADC$ | Propiedad de paralelogramo |
| 2. $m\angle ABC = 2m\angle EBF$ | Definición de bisectriz |
| 3. $m\angle ADC = 2m\angle EDF$ | Definición de bisectriz |
| 4. $2m\angle EBF = 2m\angle EDF$ | Por 1 y se iguala 2 y 3 |
| 5. $\angle EBF \cong \angle EDF$ | Dividiendo entre 2 |
| 6. $\angle EDF \cong \angle DFC$ | $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y ángulos alternos internos |
| 7. $\angle EBF \cong \angle DFC$ | Igualando 5 y 6 |
| 8. $\overline{BE} \parallel \overline{DF}$ | Por 7 y condición de paralelismo |



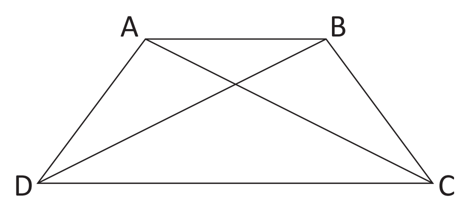
***** Luego demostrar que el cuadrilátero que se forma con las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo es un rectángulo.

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{BE} \parallel \overline{FD}$ | Por lo demostrado anteriormente |
| 2. $\overline{AG} \parallel \overline{HC}$ | (De igual manera) |
| 3. $m\angle ADC = 2m\angle CDQ$ | Hipótesis (bisectriz) |
| 4. $m\angle BCD = 2m\angle DCQ$ | Hipótesis (bisectriz) |
| 5. $m\angle ADC + m\angle BCD = 180°$ | ABCD es un paralelogramo |
| 6. $2m\angle CDQ + 2m\angle DCQ = 180°$ | Sustituyendo 3 y 4 en 5 |
| 7. $m\angle CDQ + m\angle DCQ = 90°$ | Dividiendo entre 2 |
| 8. $m\angle CDQ + m\angle DCQ + m\angle CQD = 180°$ | Suma de los ángulos internos |
| 9. $m\angle CQD = 90°$ | Sustituyendo 7 en 8 |
| 10. $m\angle PQR = 90°$ | Ángulos opuestos por el vértice |
| 11. $\overline{OR} \parallel \overline{PQ}$ y $\overline{OP} \parallel \overline{RQ}$ | Por 1 y 2 |
| 12. OPQR es un paralelogramo | Por 11 (definición de paralelogramo) |
| 13. $m\angle PQR + m\angle QRO = 180°$ | Por 12 (propiedad de paralelogramo) |
| 14. $m\angle QRO = 90°$ | Sustituyendo 10 en 13 |
| 15. $m\angle ROP = 90°$ | Por 10 y ángulos opuestos del paralelogramo OPQR |
| 16. $m\angle OPR = 90°$ | Por 14 y ángulos opuestos del paralelogramo OPQR |
| 17. OPQR es un rectángulo | Por 10, 14, 15 y 16 |



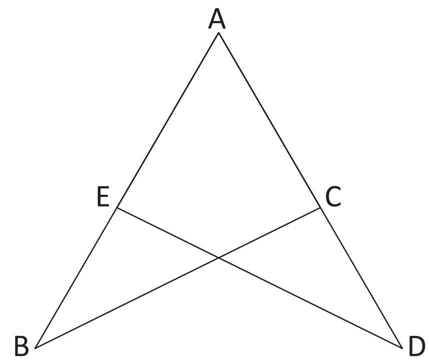

**11)**

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| Entre $\Delta ADC$ y $\Delta BCD$ | |
| 1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ | Hipótesis (trapecio isósceles) |
| 2. $\angle ADC \cong \angle BCD$ | Por ser trapecio isósceles |
| 3. $\overline{DC} \cong \overline{CD}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 4. $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL |
| 5. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ | Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes |



**12)** a)

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ | Hipótesis |
| 2. $\angle B \cong \angle D$ | Hipótesis |
| 3. $\angle BAC \cong \angle DAE$ | Congruencia del mismo ángulo |
| 4. $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia ALA |



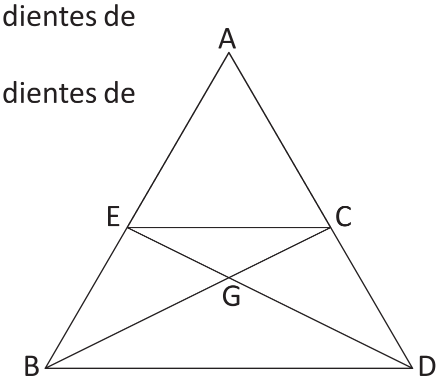

b) No hay suficiente información para determinar la congruencia de $\Delta ABC \cong \Delta ADE$.

c)

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{AE} \cong \overline{AC}$ | Hipótesis |
| 3. $\angle BAC \cong \angle DAE$ | Congruencia del mismo ángulo |
| 4. $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL |

d) Sea G intersección de $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ | Hipótesis |
| 3. Trazar el segmento EC | Por construcción |
| 4. $\overline{EC} \cong \overline{CE}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 5. $\Delta EBC \cong \Delta CDE$ | Por 1, 2, 4 y criterio de congruencia LLL |
| 6. $\angle ABC \cong \angle ADE$ | Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 7. $\angle ECB \cong \angle CED$ | Por 5 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 8. Trazar $\overline{BD}$ | Por construcción |
| 9. GC = GE | Por 7 |
| 10. BC = BG + GC, DE = DG + GE | Suma de segmentos |
| 11. BG = DG | Por 10 |
| 12. $\angle GBD \cong \angle GDB$ | Por 11 y $\Delta BGD$ isósceles |
| 13. $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle GBD$ | Suma de ángulos |
| 14. $m\angle ADB = m\angle ADE + m\angle GDB$ | Suma de ángulos |
| 15. $m\angle ABD = m\angle ADB$ | Por 6, 12, 13, 14 |
| 16. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ | Por 15 y $\Delta ABD$ isósceles |
| 17. $\angle BAC \cong \angle DAE$ | Congruncia del mismo ángulo |
| 18. $\Delta ABC \cong \Delta ADE$ | Por 6, 16, 17 y criterio de congruencia ALA |



**Objetivo:** **[A]** Entender la definición y criterio de la semejanza de triángulos.
**[B]** Encontrar la medida del lado del triángulo usando semejanza.

**Evaluación:** [A] Ejercicio 2.1
[B] Ejercicio 2.2 a) y b)

# Unidad I. Lección 2.

## Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

### Lección 2. Semejanza de Triángulos

#### Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

**Definición de semejanza**

Se dice que dos figuras son semejantes, cuando se pueden colocar en la posición como muestra la Fig. 2.1 donde

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

A este valor se le denomina **razón de semejanza** entre los triángulos A'B'C' y ABC.

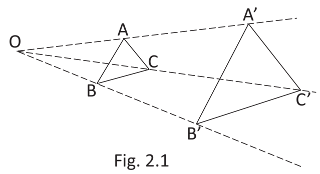



Fig. 2.1

**[A]**

Se puede dar la vuelta a una de estas figuras. Cada punto de las dos figuras se corresponde como los puntos A y A', etc.

En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición de semejanza:

Los $\Delta ABC$ y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$, $m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$, $m\angle C = m\angle C'$

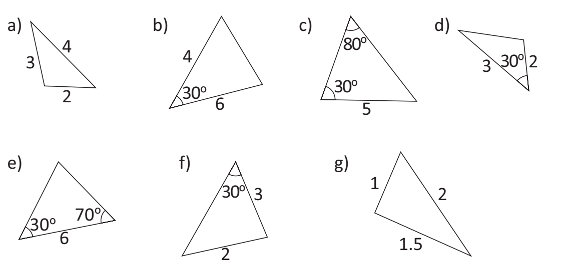
Se denota la semejanza con el signo "∼", $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

El valor de $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ coincide con la razón de semejanza entre los triángulos A'B'C' y ABC.

Para confirmar la semejanza de triángulos, no es necesario verificar todas las condiciones

En 9no. grado se aprendió el criterio de semejanza de triángulos.

**Ejemplo 2.1.** Encuentre las parejas de triángulos que son semejantes y diga la condición de semejanza:






**[A]** (10 min)

El docente solo puede decir "Ser semejantes quiere decir tener la misma forma", en vez de dar la definición general.
Sin embargo, hay que dar la definición exacta de la semejanza de triángulos.

**Ejemplo 2.1**
(8 min)
Solución:

| Parejas de triángulos | Criterio de semejanza |
|---|---|
| a) y g) | LLL |
| b) y d) | LAL |
| c) y e) | AA |

## Clase 1
(Continuación)

**Objetivo:** Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

**Criterio de la semejanza de triángulos**
(7 min)

**Ejercicio 2.1**
(7 min) Solución
$\Delta$ABC ~ $\Delta$ACD, porque $\angle$BAC ≅ $\angle$CAD y $m\angle$BCA = 90° = $m\angle$CDA,
(Criterio de semejanza AA)

$\Delta$ACD ~ $\Delta$CBD, porque $m\angle$ACD = 90° – $m\angle$DAC = $m\angle$DBC y $m\angle$CDA = 90° = $m\angle$BDC,
(Criterio de semejanza AA)

**Ejemplo 2.2**
(7 min)

**Ejercicio 2.2**
(6 min) Solución

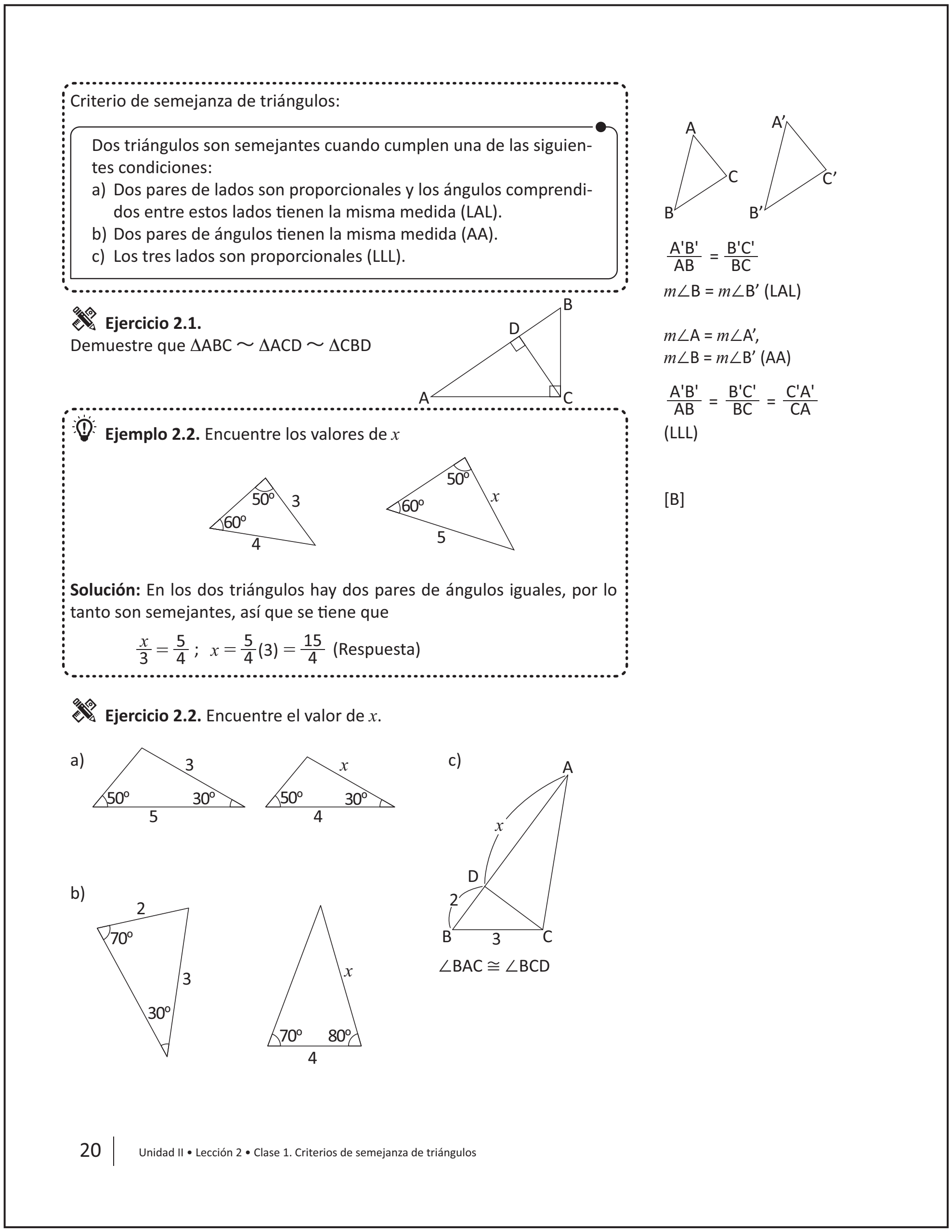
a) $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$, $x = \frac{12}{5}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$, $x = 6$

c) $\Delta$BAC ~ $\Delta$BCD
(Criterio de semejanza AA)

$$\frac{x+2}{3} = \frac{3}{2}, \; x = \frac{5}{2}$$

Hay más ejercicios del mismo nivel en Ejercicios de la Lección.


Criterio de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes cuando cumplen una de las siguientes condiciones:
a) Dos pares de lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados tienen la misma medida (LAL).
b) Dos pares de ángulos tienen la misma medida (AA).
c) Los tres lados son proporcionales (LLL).

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$
$m\angle B = m\angle B'$ (LAL)

$m\angle A = m\angle A'$,
$m\angle B = m\angle B'$ (AA)

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$
(LLL)

[B]

**Ejercicio 2.1.**
Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

**Ejemplo 2.2.** Encuentre los valores de $x$

**Solución:** En los dos triángulos hay dos pares de ángulos iguales, por lo tanto son semejantes, así que se tiene que

$\frac{x}{3} = \frac{5}{4}$ ; $x = \frac{5}{4}(3) = \frac{15}{4}$ (Respuesta)

**Ejercicio 2.2.** Encuentre el valor de $x$.

a)

b)

c)

$\angle BAC \cong \angle BCD$

20 | Unidad II • Lección 2 • Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

**Objetivo:** **[A]** Entender la relación entre la razón de semejanza y la de área.

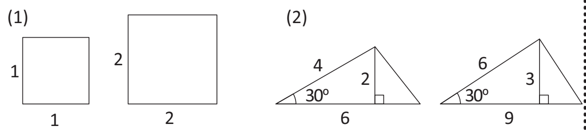
**Evaluación:** Ejercicio 2.3

# Unidad I. Lección 2.
## Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

### Clase 2. Semejanza y razón de área

**Ejemplo 2.3.** En (1) y (2):

a) Encuentre la razón de semejanza entre la figura de la derecha y la de la izquierda.
b) Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda.
c) ¿Qué observa?




**Solución:** a) (1) $\frac{2}{1} = 2$ (2) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) (1) $\frac{2^2}{1^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ (2) $\frac{\frac{1}{2}(9)(3)}{\frac{1}{2}(6)(2)} = \left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

c) $\boxed{\text{La razón de área = (La razón de semejanza)}^2}$

La relación de arriba se aplica a cualquier figura.

En (2) si $k$ es la razón de semejanza,

$k = \frac{9}{6} = \frac{6}{4}$

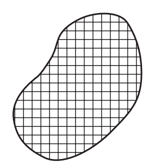
$9 = 6k$; $6 = 4k$; $3 = 2k$

El área del triángulo de derecho

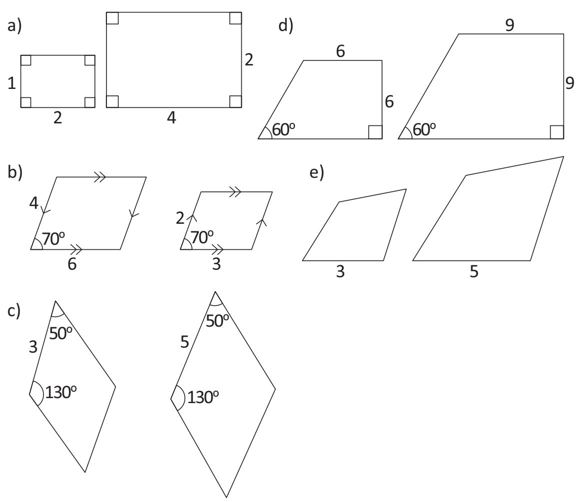
$= \frac{1}{2}(9)(3) = \frac{1}{2}(6k)(2k)$

= (El de izquierdo) x ($k^2$)

Es porque se puede evaluar el área por conjunto de cuadrados con cualquier exactitud.



**Ejercicio 2.3.** Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda. En cada caso las dos figuras son semejantes.






**Ejemplo 2.3**
(30 min)
El punto es: la medida de área es el producto de dos medidas de longitud, por lo tanto, la razón de área = (la razón de longitud)$^2$ donde la razón de longitud es la razón de semejanza.

**Ejercicio 2.3**
(15 min) Solución

a) $\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$

b) $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

d) $\left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{9}{4}$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

No es necesario encontrar el área.

# Unidad I. Lección 2.
## Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Entender la relación entre la razón de semejanza, la de volumen y la de área de superficie.

**Evaluación:** Ejercicio 2.4

### Ejemplo 2.4
(30 min)

El punto es: la medida de volumen es el producto de tres medidas de longitud, por lo tanto, la razón de volumen = (la razón de longitud)$^3$ donde la razón de longitud es la razón de semejanza.

### Ejercicio 2.4
(15 min) Solución

a) (1) $\left(\frac{4}{2}\right)^3 = 8$

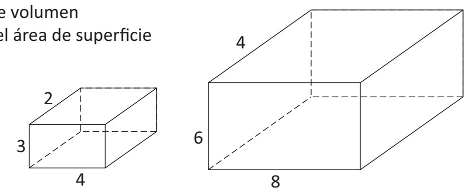
(2) $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

b) (1) $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

(2) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

**Clase 3. Semejanza y razón de volumen y área de superficie**

**Ejemplo 2.4.**
Encuentre las siguientes razones entre el paralelepípedo rectangular de la derecha y el de la izquierda,
a) De semejanza
b) De volumen
c) Del área de superficie




El volumen del paralelepípedo rectangular es (largo) x (ancho) x (altura)

**Solución:** a) $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{8(4)(6)}{4(2)(3)} = \frac{8}{4}\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right) = 2^3 = 8$

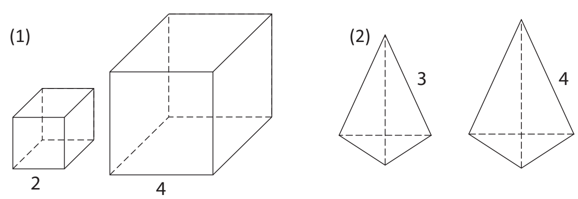
c) La razón de área de cada cara = (La razón de semejanza)$^2$ = $2^2$ = 4
Por lo tanto, la razón de área de superficie es 4

La razón de arriba se aplica a todos los sólidos

La razón de volumen = (la razón de semejanza)$^3$
La razón de área de superficie = (La razón de semejanza)$^2$

**Ejercicio 2.4.**
a) Encuentre la razón de volumen entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.
b) Encuentre la razón del área de superficie entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.

En cada caso los sólidos son semejantes



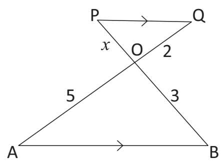
**Objetivo:** Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

# Unidad I. Lección 2.
## Ejercicios de la lección

### Ejercicios de la lección

1) En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$.

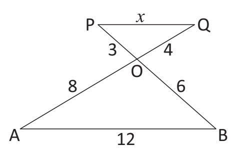
   a) Demuestre que $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.
   b) Encuentre el valor de $x$.




Clase 1

2) En la figura

   a) Demuestre que $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.
   b) Encuentre el valor de $x$.

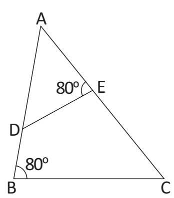



Clase 1

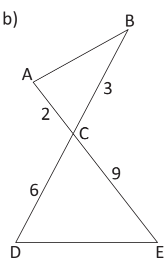
3) En cada uno de los dibujos, indique los triángulos semejantes y el criterio de semejanza utilizado.

Clase 1

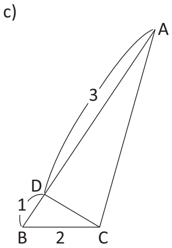
a)




b)




c)






Solución

1)

a) $\angle OAB \cong \angle OQP$ y $\angle OBA \cong \angle OPQ$, porque AB || PQ.

Como dos ángulos correspondientes son congruentes, $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.

b) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{5}$ , $x = \dfrac{6}{5}$

2)

a) $\dfrac{OQ}{OA} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{OP}{OB}$

$\angle AOB \cong \angle QOP$, porque son ángulos opuestos por el vértice.

Como las razones de dos pares de lados son iguales y los ángulos comprendidos son congruentes, $\Delta OAB \sim \Delta OQP$.

b) $\dfrac{x}{12} = \dfrac{4}{8}$ , $x = 6$

3)

a) $\Delta ABC \sim \Delta AED$
Criterio de semejanza AA

b) $\Delta CDE \sim \Delta CAB$
Criterio de semejanza LAL

c) $\Delta ABC \sim \Delta CBD$
Criterio de semejanza LAL

Matemáticas III
Unidad II

# Límites y continuidad

**1. Competencias de la Unidad**

1. Calcular y analizar en una gráfica el límite de una función.
2. Determinar límites infinitos.
3. Determinar límites al infinito.
4. Determinar la continuidad en un punto y en un intervalo.
5. Aplicar las propiedades de la continuidad.
6. Aplicar el teorema del valor intermedio.

**2. Relación y Desarrollo**

**Matemáticas 9º**

Factorización

**Matemática I**

Unidad I: Fundamentos aritméticos y álgebra
- Lección 1: Números reales
  - Valor absoluto
  - Racionalización del denominador
- Lección 2: Ecuaciones e inecuaciones
  - Ecuaciones de segundo grado

Unidad II: Introducción a la trigonometría

**Matemática II**

Unidad I: Funciones algebraicas
- Lección 6: Gráficas de funciones polinomiales
- Lección 7: Expresiones algebraicas racionales

Unidad II: Funciones trascendentales
- Lección 1: Funciones exponenciales
- Lección 2: Funciones logarítmicas
- Lección 4: Las gráficas de las funciones trigonométricas

**Matemáticas III**

Unidad II: Límites y continuidad
- Lección 1: Límite de funciones
- Lección 2: Continuidad de funciones
- Lección 3: Asíntotas

**3. Plan de Estudio de la Unidad** (13 horas)

| Lección | Clase/hora | Contenidos | Términos y signos |
|---|---|---|---|
| 1 Límite de funciones | 1 | Definición de límite de funciones | límite, $\lim_{x \to a} f(x)$ |
| | 2 | Propiedad del límite | |
| | *3 | Cálculo del límite donde el denominador converge a 0 | |
| | *4 | Divergencia | diverge al infinito positivo |
| | *5 | Límites laterales | límite por la izquierda (derecha), $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ |
| | *6 | Límites en el infinito | $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ |
| | *7 | Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito | |
| | *8 | Límite de funciones trigonométricas | |
| | *9 | Aplicación del $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ | |
| | | Ejercicios de la lección | |
| 2 Continuidad de funciones | 1 | Continuidad en el punto | continua en un punto |
| | 2 | Continuidad en el intervalo, existencia del valor máximo y mínimo | continua en un intervalo. valor máximo (mínimo) |
| | 3 | Teorema del valor intermedio | |
| | | Ejercicios de la lección | |
| 3 Asíntotas | 1 | Asíntota | Asíntota |
| Problemas de la Unidad | | Problemas de la Unidad A | |
| | | Problemas de la Unidad B | |

## Puntos de lección

### Lección 1: Límite de funciones

En el caso de que el tiempo sea insuficiente para estudiar la unidad IV, entonces el docente puede considerar enseñar únicamente las clases 1 y 2 y puede omitir el resto de lecciones.
Aun cuando se enseña la Unidad IV, es recomendable ir directo a la Unidad III después de la Clase 2 para después regresar a la Clase 3 de la Lección 1.

En la explicación del límite, se utiliza el valor absoluto, el tratamiento del cual es dificil para muchos estudiantes, por lo tanto, puede omitir este tipo de explicación. Basta que ellos entiendan intuitivamente utilizando la gráfica que el punto tiende a un punto.

En la Clase 7, en el inciso a) se demuestre la propiedad:

Si $0 < n \in \mathbb{Z}$ y $a > 1$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty$

Demostración:

Sea $a = 1 + c$ $(c > 0)$ y $0 < l \in \mathbb{Z}$.

$a^{l+n+1} = (1+c)^{l+n+1} > \mathrm{C}(l+n+1, n+1) \cdot c^{n+1} = \frac{(l+n+1)(l+n)\dots(l+1)}{(n+1)!} c^{n+1} > \frac{l^{n+1}}{(n+1)!} c^{n+1}$

Si $l + n + 2 > x \geq l + n + 1$, entonces se tiene que

$\frac{a^x}{x^n} > \frac{a^{l+n+1}}{(l+n+2)^n} > \frac{1}{(l+n+2)^n} \cdot \frac{l^{n+1}}{(n+1)!} c^{n+1} \to \infty \quad (l \to \infty).$

### Lección 2: Continuidad de funciones

La mayor parte de las funciones tratadas en el Libro del Estudiante son continuas y el énfasis está en dos características de ellas. Uno es la existencia del máximo y el mínimo en el intervalo cerrado y el otro es el teorema del valor intermedio.

### Lección 3: Asíntotas

En la Unidad IV cuando se tratan las funciones racionales, aparece el término asíntotas oblicuas, por lo tanto, no se explica sobre ellas en esta unidad.

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Entender intuitivamente la definición de límite.

**Evaluación:** Ejercicio 1.1 y 1.2

**Explicación 1**
(20 min)
Basta que los estudiantes entiendan con la ayuda de la gráfica.

Dese cuenta que "$x \to a$" significa que $x$ no toma el valor de $a$.

**Ejercicio 1.1**
(5 min) Solución
a) 2 b) 1 c) 0

**Ejemplo 1.1**
(5 min)
Se utiliza la gráfica.

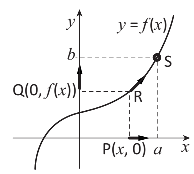
**Nota:** a partir de esta unidad se utiliza la unidad de medida radián para medir los ángulos.
Términos y notación: sean $a$ y $b$ números reales tal que $a < b$

| | |
|---|---|
| Intervalo abierto | $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ |
| Intervalo cerrado | $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ |
| Intervalo semi abierto | $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ |
| | $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ |

### Lección 1. Límite de funciones

### Clase 1. Definición de límite de funciones

**Explicación 1.** En la figura, en el eje $x$ el punto P $(x, 0)$ tiende al punto $(a, 0)$, pero no alcanza a este punto. En la gráfica el punto R que corresponde al punto P tiende al punto S. En el eje $y$ el punto Q $(0, f(x))$ que corresponde al punto R y representa el valor de $f(x)$ tiende al punto $(0, b)$.




En resumen, cuando $x$ tiende sin límite a $a$ tomando valores diferentes de $a$, $f(x)$ tiende sin límite a $b$.

Se expresa esta situación como: "$f(x)$ converge a $b$" y se denota mediante:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

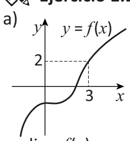
El valor de $b$ se le llama **límite** de $f(x)$ cuando $x$ tiende sin límite a $a$.

No es necesario que $f(x)$ esté definida en $x = a$.

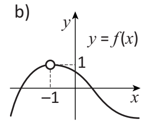
También se utiliza la siguiente notación:

$$\boxed{f(x) \to b \quad (a \to x)}$$

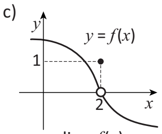
**Ejercicio 1.1.** Encuentre los límites:

a)


$\lim_{x \to 3} f(x)$

b)


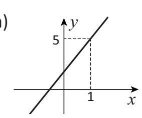
$\lim_{x \to -1} f(x)$

c)


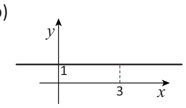
$\lim_{x \to 2} f(x)$

En b) $f(x)$ no está definida en $x = -1$; en c) $f(2) = 1$.

**Ejemplo 1.1.** Encuentre los límites: a) $\lim_{x \to 1} (2x + 3)$ b) $\lim_{x \to 3} 1$

Solución: a)


de gráfica se ve que
$\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

b)


$\lim_{x \to 3} 1 = 1$

De b) se ve que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c \quad (c\text{: constante})}$$

26 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1. Definición de límite de funciones

# Unidad II. Lección 1.

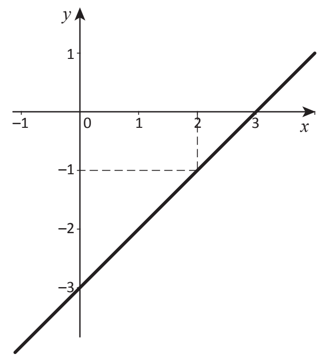
## Clase 1
(Continuación)

## Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

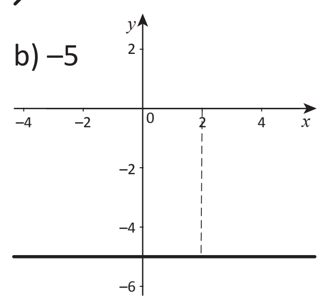
**Objetivo:** Entender y utilizar las propiedades del límite en el cálculo.

**Evaluación:** Ejercicio 1.3

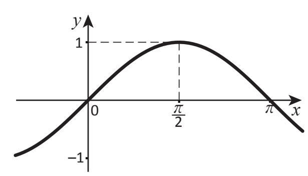
**Ejercicio 1.2**
(15 min) Solución
a) –1



b) –5



c) 1



Incisos d, e, f, g y h solución en pág. 59.

**Explicación 2**
Aquí se explica el sentido de la expresión "sin límite".
Si los estudiantes no pueden manejar el valor absoluto, deje la parte formal.

[Hasta aquí Clase 1]

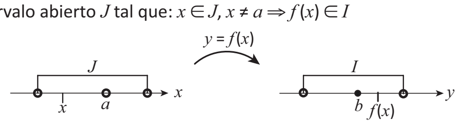
**Ejercicio 1.2.** Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to 2}(x-3)$ b) $\lim_{x\to 2}(-5)$ c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\text{sen } x$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\cos x$

e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x$ f) $\lim_{x\to 2}10^x$ g) $\lim_{x\to 1}\log_2 x$ h) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}$

*** Explicación 2.** $\lim_{x\to a} f(x) = b$ equivale lo siguiente:

Cuando está dado un intervalo abierto $I$ que contiene el valor de $b$, existe un intervalo abierto $J$ tal que: $x \in J, x \neq a \Rightarrow f(x) \in I$



En la figura de arriba puede limitarse $I$ y $J$ en la forma:
$I = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}, |y-b| < \varepsilon\}$
$J = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta\}$
con los números positivos $\varepsilon$ y $\delta$.

Entonces la definición tiene la siguiente forma:

**Definición de límite de funciones.**
Sea $f(x)$ una función definida alrededor de $x = a$ salvo en $a$. Se denota $\lim_{x\to a} f(x) = b$ cuando se verifica lo siguiente:
Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que:
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$

Para el tratamiento más riguroso, hay que definir el límite de tal manera que explica el sentido de "tender sin límite".

Esta forma es uno de los resultados de la actitud crítica del siglo XIX, hacia la base del cálculo infinitesimal que data del siglo XVII.

### Clase 2. Propiedades del límite

**Propiedades del límite:**
Sean $\alpha$, $\beta$ y $k$ números reales, $f(x)$ y $g(x)$ funciones. Se supone que existen $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$.

a) $\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$
b) $\lim_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$
c) $\lim_{x\to a}\{kf(x)\} = k\alpha$
d) $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$
e) Si $\beta \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

Para la demostración se utiliza la definición de la Explicación 2 de la Clase 1.

Unidad II • Lección 1 • Clase 2. Propiedades del límite | 27

[Desde aquí Clase 2]

**Propiedades del límite.** (15 min)
Basta entender las propiedades intuitivamente.

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 2

(Continuación)

## Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Entender intuitivamente la definición de límite.

**Evaluación:** Ejercicio 1.4 y 1.5

**Nota:** Utilizando d) y e) repetidamente se tiene que:

f) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x)\}^n = \alpha^n$ ($n$: número entero)

*** Explicación 3:** sobre la demostración: se utilizan las siguientes relaciones:

a) $|\{f(x)+g(x)\}-(\alpha+\beta)| \le |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$

b) $|\{f(x)-g(x)\}-(\alpha-\beta)| \le |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$

c) $|kf(x)-k\alpha| = |k|\ |f(x)-\alpha|$

d) $|f(x)g(x)-\alpha\beta| \le |f(x)-\alpha|\,|g(x)| + |\alpha|\,|g(x)-\beta|$

e) $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{\alpha}{\beta}\right| \le \dfrac{|f(x)-\alpha||\beta| + |\alpha||g(x)-\beta|}{|\beta|\{|\beta| - |g(x)-\beta|\}}$

Donde $|g(x)-\beta| < |\beta|$

Tenga en cuenta las siguientes relaciones:
$|s+t| \le |s| + |t|$
$|s\,t| = |s|\ |t|$
$|g(x)| = |g(x)-\beta+\beta|$
$\le |g(x)-\beta| + |\beta|$
$|g(x)| = |g(x)-\beta+\beta|$
$\ge |\beta| - |g(x)-\beta|$
Cuando
$|\beta| \ge |g(x)-\beta|$

**Ejemplo 1.2.** Encuentre los límites: a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-3x+4)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-1}{x}$

Solución: a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2-3x+4)$

$= \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 3x + \lim\limits_{x \to 2} 4$ por a) y b)

$= (\lim\limits_{x \to 2} x)^2 - 3 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 4$ por f) y d)

$= 2^2 \quad - 3\,(2) \quad + 4$

$= 2$

Este valor equivale a $f(2)$, donde $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

b) $\lim\limits_{x \to 3} x = 3 \ne 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-1}{x} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2-1) \div \lim\limits_{x \to 3} x = \dfrac{8}{3}$

Nota: de a) se ve los siguientes:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ donde $f(x)$ es un polinomio de $x$

**Ejercicio 1.3.** Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x \to 1} 2x^3$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to -1} x^3\, 2^x$

### Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

**Ejemplo 1.3.** Encuentre el límite: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

Solución. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+3) = 4$

Transforme la función en la forma donde el denominador no converge a 0.

**Ejercicio 1.4.** Encuentre el límite.

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+x-1}{2x-1}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-2x^2+3x}{x}$

*e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ *f) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+27}{x+3}$ *g) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}$

28 | Unidad II • Lección 1 • Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

*** Explicación**

Sólo para los alumnos, que pueden usar el valor absoluto.

### Ejemplo 1.2

(15 min)

Se trata de justificación del cálculo del límite, utilizando las propiedades.

No se dibuja la gráfica.

En las funciones de esta clase siempre se verifica $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ porque son funciones continuas.

### Ejercicio 1.3

(15 min) Solución

a) 2 b) 1

c) $\dfrac{4}{9}$ d) $-\dfrac{1}{2}$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

### Ejemplo 1.3

(5 min)

Aunque parece que el denominador converge a 0, se puede calcular por simplificación.

### Ejercicio 1.4

(10 min) Solución

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} (x-2) = -3$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+3) = 5$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)(x+1)}{2x-1} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x+1) = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x^2-2x+3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x^2-2x+3) = 3$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 12$

f) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} (x^2-3x+9) = 27$

g) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x^2-1)}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} (x^2-1) = 3$

# Clase 3
(Continuación)

**Ejemplo 1.4.** Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución 1: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1) = 2$

Solución 2: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1) = 2$

En el Ejemplo 1.4 solución 1 aplique la racionalización del denominador.

En el Ejemplo 1.4 solución 2 aplique la factorización al numerador:
$x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

**Ejercicio 1.5.** Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$  b) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$  c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$  *e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}-2}$

**Ejemplo 1.5.** Encuentre el valor de $a$ y $b$ que satisfacen $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} = 3$

Solución: $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b) = \lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}\ \lim\limits_{x\to1}(x-1)$  por d) de la Clase 2.

$= 3\cdot0 = 0.$

Por lo tanto, como $x$ tiende a 1 (se sustituye convenientemente en $x^2+ax+b$)

$a+b+1=0.$

Luego, $x^2+ax+b = x^2+ax+(-a-1)$  Sustituyendo $b=-a-1$
$= (x-1)(x+a+1)$. Entonces,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+a+1) = a+2,$

Por lo tanto, $a+2=3$, $a=1$.  Respuesta: $a=1$, $b=-2$

Si el denominador converge a 0 y existe el límite, entonces el numerador converge en 0.

**Ejercicio 1.6.** Encuentre el valor de $a$ y $b$ que satisfacen la igualdad:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$  b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1} = -4$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+ax+b}{x+2} = 2$

Unidad II • Lección 1 • Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0 | 29

## Ejemplo 1.4
(8 min)
También se trata de cancelar el denominador.

## Ejercicio 1.5
(12 min) Solución

a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$
$= \lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x}+2) = 4$

b) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$
$= \lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}+3) = 6$

c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$
$= \lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$
$= \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+1} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-\sqrt{x}-2)}{x^2-5x+4}$
$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{2}{3}$

## Ejemplo 1.5
(10 min)

## Ejercicio 1.6
(Tarea en casa) Solución

a) $2a+b+4=0$. Luego $x^2+ax+b=(x-2)(x+a+2)$. Entonces $\lim\limits_{x\to2}(x+a+2) = a+4$. Por lo tanto $a+4=3$, $a=-1$, $b=-2$.

b) $-a+b+1=0$, Luego $x^2+ax+b=(x+1)(x+a-1)$.
Entonces $\lim\limits_{x\to-1}(x+a-1) = a-2$, Por lo tanto $a-2=-4$,
$a=-2$, $b=-3$.

c) $-2a+b+4=0$. Luego $x^2+ax+b=(x+2)(x+a-2)$.
Entonces $\lim\limits_{x\to-2}(x+a-2) = a-4$. Por lo tanto $a-4=2$,
$a=6$, $b=8$.

# Unidad II. Lección 1.
## Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Entender la definición y las propiedades de divergencia.

**Evaluación:** Ejercicio 1.7 y 1.8

### Ejemplo 1.6
(5 min)
La solución muestra un ejemplo de la definición rigurosa de la divergencia.
No exige a los estudiantes hasta este nivel.

**Definición de Divergencia**
(5 min)

### Ejercicio 1.7
(8 min) Solución
a) $\infty$
b) $-\infty$
c) 0
d) $\infty$
e) $\infty$
Diverge: a), b), d), y e)
Converge: c)

**Propiedades de la divergencia**
(6 min)
Basta entender intuitivamente.

**Clase 4. Divergencia**

**Ejemplo 1.6.** Describa el cambio del valor de $\frac{1}{x^2}$ cuando $x$ tiende al 0.

Solución: si $x \to 0$, entonces $x^2 > 0$ y tiende al 0. Por lo tanto, el valor de $\frac{1}{x^2}$ aumenta sin límite.

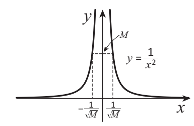
En efecto, a cualquier número positivo $M$, si se toma $x$ en $(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0)$ o $(0, \frac{1}{\sqrt{M}})$, entonces se tiene que $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M$.

Si el valor de $f(x)$ aumenta sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito positivo** y se denota mediante

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$$

De la misma manera si el valor de $f(x)$ disminuye sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito negativo** y se denota mediante.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$




Cuando se escribe $x \to a$, $x$ no toma el valor de $a$.

El símbolo $\infty$ no es un número, tampoco se llama límite.

**Ejercicio 1.7.** Investigue si converge o diverge.

a) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\text{sen}^2 x}$ e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$

**Propiedades de divergencia**

a) $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \infty$

$f(x) < 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = -\infty$

b) $f(x) \leq g(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$g(x) \leq f(x)$, $\lim_{x\to a} f(a) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{-f(x)\} = -\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{-f(x)\} = \infty$

d) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o $\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o $-\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = -\infty$

e) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0$ o $\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\{f(x)\, g(x)\} = \infty$

f) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$

Se omite la demostración.

30 | Unidad II • Lección 1 • Clase 4. Divergencia

**Objetivo:** Entender el concepto de límite por la derecha y por la izquierda.

**Evaluación:** Ejercicio 1.10, 1.11 y 1.12

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 4

(Continuación)

## Clase 5

(Continúa en la siguiente página)

**Ejemplo 1.7.** Encuentre $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan^2 x$.

Solución: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2} > 0$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan^2 x = \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan^2 x = \infty$$

Se utiliza la propiedad e).

**Ejercicio 1.8.** Calcule:

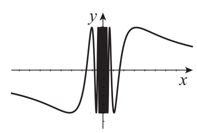
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-2}{\cos^2 x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\text{sen}^2 x}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)^2}$

**Ejemplo 1.8.** Investigue los valores de $\text{sen}\,\frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución: $|\text{sen}\,\frac{1}{x}| \leq 1$. Por otra parte, para cada número $b \in [-1, 1]$, hay valores de $x$ en cualquier cercanía del 0 que satisface $\text{sen}\,\frac{1}{x} = b$

Del Ejemplo 1.8 se sabe que $\text{sen}\,\frac{1}{x}$ no converge cuando $x \to 0$.

En este caso se dice que $\text{sen}\,\frac{1}{x}$ **diverge** cuando $x \to 0$.




$y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$

**Ejercicio 1.9.** Investigue si $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ converge o no.

### Clase 5. Límites laterales

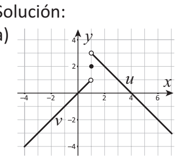
**Ejemplo 1.9.** La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } x < 1 \\ 2 & \text{cuando } x = 1 \\ -x + 4 & \text{cuando } 1 < x \end{cases}$$

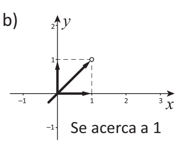
a) Dibuje la gráfica de $y = f(x)$.
b) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $x < 1$ y se acerca a 1.
c) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $1 < x$ y se acerca a 1.

Solución:

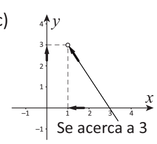
a)




b)




c)




En b) del Ejemplo 1.9, al número 1 se le llama **límite por la izquierda** y se denota mediante $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

En c) al número 3 se le llama **límite por la derecha** y se denota mediante $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$.

Se aplica la notación similar cuando la función diverge. Se verifican las mismas propiedades que el límite anterior.

Ambas se les llama **límite lateral**.

Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Límites laterales | 31

**Ejemplo 1.7**
(3 min)
Se trata de aplicar las propiedades.

**Ejercicio 1.8**
(8 min) Solución
a) $\infty$ b) $-\infty$
c) $\infty$ d) $\infty$

**Ejemplo 1.8**
(5 min)
Explique con la gráfica.

**Ejercicio 1.9**
(5 min) Solución
No converge.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

**Ejemplo 1.9**
(6 min)

**Definición de límite lateral**
(3 min)

## Clase 5
(Continuación)

### Ejemplo 1.10
(4 min)

### Ejercicio 1.10
(5min) Solución
a) $\infty$
b) $-\infty$
c) $-\infty$
d) $\infty$

### Ejemplo 1.11
(7 min)

### Ejercicio 1.11
(6 min)
Solución:

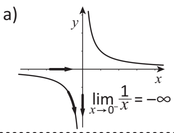
| | |
|---|---|
| a) 2 | b) 3 |
| c) $-3$ | d) $-2$ |
| e) $-1$ | f) 0 |
| *g) 1 | *h) 0 |

**Relación entre el límite y el límite lateral** (2 min)

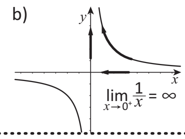
### Ejemplo 1.12
(5 min)
Encuentre el límite sin gráfica.
En este ejemplo $x^3 - x^2$ y $x^2 + 3x - 6$ son continuas y tienen el mismo valor en $x = 2$. Por lo tanto $f(x)$ es continua y existe el límite.

**Ejemplo 1.10.** Calcule. a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$

Solución: a)




b)



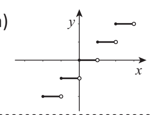

**Ejercicio 1.10.** Encuentre los límites.
a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$

**Ejemplo 1.11.** Se define una función que se denota mediante $[\![x]\!]$ como lo siguiente:

$$[\![x]\!] = n \quad \text{si} \quad n \in \boldsymbol{Z} \text{ y } n \le x < n+1$$

Es decir $[\![x]\!]$ representa el número entero máximo que no sobrepasa $x$.
a) Dibuje la gráfica de $y = [\![x]\!]$.
b) Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^-} [\![x]\!]$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} [\![x]\!]$.

Solución: a)




b) $\lim\limits_{x\to 1^-} [\![x]\!] = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} [\![x]\!] = 1$

Se le llama esta función "función de parte entera".
Ejemplo: $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.9]\!] = 2$, $[\![-1.3]\!] = -2$

**Ejercicio 1.11.** Encuentre el límite lateral.
a) $\lim\limits_{x\to 3^-} [\![x]\!]$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} [\![x]\!]$ c) $\lim\limits_{x\to -2^-} [\![x]\!]$ d) $\lim\limits_{x\to -2^+} [\![x]\!]$
e) $\lim\limits_{x\to 0^-} [\![x]\!]$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} [\![x]\!]$ *g) $\lim\limits_{x\to -1^-} [\![x^2]\!]$ *h) $\lim\limits_{x\to -1^+} [\![x^2]\!]$

Para g) y h) contruya la gráfica de $f(x) = [\![x^2]\!]$.

Entre el límite y el límite lateral existe la siguiente relación:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existen y coinciden.
En este caso $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

**Ejemplo 1.12.** Se define la función $f(x)$ como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 3x - 6 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

Solución: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^3 - x^2) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 3x - 6) = 4$
Concuerdan, luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

**Ejercicio 1.12.** La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 4x & \text{si } -2 \le x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe.

32 | Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Límites laterales

**Ejercicio 1.12.** (7 min) Solución:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-x^3 + x) = 6$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (-x^2 - 4x) = 4$$

Como son diferentes, el límite no existe.

**Objetivo:** Entender el concepto de límite en el infinito.

**Evaluación:** Ejercicio 1.13, 1.14 y 1.15

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 6

(Continúa en la siguiente página)

### Clase 6. Límites en el infinito

**Ejemplo 1.13.** Investigue el cambio de valor de $\frac{1}{x}$ cuando:

a) $x$ aumenta sin límite.

b) $x < 0$ y $|x|$ aumenta sin límite.

Solución: a) $\frac{1}{x} \to 0$ b) $\frac{1}{x} \to 0$

Se denota el fenómeno de a) mediante $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ y el b) mediante $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Se le llama a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito positivo y al $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito negativo.

**Ejercicio 1.13.** Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

Los límites en el infinito tienen las mismas propiedades que las de la Clase 2 y 4.

**Ejemplo 1.14.** Sean $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ y $g(x) = b_0 x^m + bx^{m-1} + \cdots + b_m$ $(b_0 \neq 0)$ polinomios.

Encuentre $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Solución: $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{n-m}\,\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = \infty$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

**Ejercicio 1.14.** En el Ejemplo 1.14, encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

**Ejercicio 1.15.** Encuentre el límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x+2}{x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x}{3x^2-4x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-5}{3x^2-4x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x+1}{-x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+1}{3x^4+5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{-x^2+x}$

Unidad II • Lección 1 • Clase 6. Límites en el infinito | 33

**Ejemplo 1.13**
(7 min)
Notación de límite en el infinito

**Ejercicio 1.13**
(5 min) Solución

a) 0 b) 0

c) 0 d) 0

**Ejemplo 1.14**
(7 min)
Si los estudiantes no entienden la notación del polinomio, se puede usar ejemplos como ser:

a) $n = 2$, $m = 1$

b) $n = 2$, $m = 2$

c) $n = 1$, $m = 2$

**Ejercicio 1.14**
(5 min) Solución:
Si $x < 0$, entonces el signo de $x^{n-m}$ es igual al de $(-1)^{n-m}$. Se pone $(-1)^{n-m}\frac{a_0}{b_0} = s$.

a) $\infty$ si $s > 0$, $-\infty$ si $s < 0$

b) $\frac{a_0}{b_0}$

c) 0

**Ejercicio 1.15.** (7 min) Solución:

a) $\infty$ b) $\frac{2}{3}$ c) 0 d) $-\infty$ e) 0 f) $-5$

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 6
(Continuación)

## Clase 7
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Entender el movimiento de las funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito.

**Evaluación:** Ejercicio 1.19

**Ejemplo 1.15**
(4 min)

**Ejercicio 1.16**
(5 min) Solución:
a) $-\infty$
b) $\infty$
c) $\infty$

**Ejemplo 1.16**
(5 min)

**Ejercicio 1.17**
(Tarea en casa)
Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$
$= 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$
$= \infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$= 0$

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

**Propiedades del límite en el infinito de las funciones.**
(25 min)

---

**Ejemplo 1.15.** Calcule: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - x^2)$

Solución: $x^3 - x^2 = x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - x^2) = \infty$

Veáse Clase 4, inciso e)

**Ejercicio 1.16.** Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3 - 3x^2)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \sqrt{x})$

**Ejemplo 1.16.** Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0$

Aplique la racionalización del denominador.

**Ejercicio 1.17.** Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

### Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

La siguiente propiedad es fundamental:

a) Sea $n$ número entero.
Si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} x^n a^x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n a^x = 0$

De a) se deduce las siguientes fórmulas:

Sea $n$ número entero,

b) Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} x^n a^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n a^x = \begin{cases}\infty & n\text{: par}\\ -\infty & n\text{: impar}\end{cases}$

c) Si $1 < c$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_c x = \begin{cases}\infty & (0 \le n)\\ 0 & (n < 0)\end{cases}$

d) Si $0 < c < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_c x = \begin{cases}-\infty & (0 \le n)\\ 0 & (n < 0)\end{cases}$

e) Si $1 < c$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \begin{cases}0 & (0 < n)\\ -\infty & (n \le 0)\end{cases}$

f) Si $0 < c < 1$, entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \begin{cases}0 & (0 < n)\\ \infty & (n \le 0)\end{cases}$

*** Ejercicio 1.18.** Deduce b) a f) de a).

34 | Unidad II • Lección 1 • Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

---

*** Ejercicio 1.18**
Solución (Véase Página 59)

**Objetivo:** Entender la propiedad del límite 2 y el Teorema 1.1

**Evaluación:** Ejercicio 1.21

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 7
(Continuación)

## Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

**Ejemplo 1.17.** Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)\,3^x$  b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}$

Solución:

a) $(x^3-x^2)\,3^x=(1-\frac{1}{x})(x^3\,3^x)$. Como $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})=1$

y $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3\,3^x)=\infty$, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)\,3^x=\infty$.

Veáse Clase 4 inciso e)

b) $\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}=\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}\,\dfrac{\log_3 x}{x^2}$. Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}=1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2}=0$,

Veáse Clase 6 inciso c)

Se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}=1\cdot 0=0$.

**Ejercicio 1.19.** Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^4-x+1}$  b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x+3}$  c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+2x)\,2^x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)\log_2 x$

### Clase 8. Límite de funciones trigonométricas

**Propiedad del límite 2**

a) Sean $f(x)\le g(x)$ en la cercanía del número $a$, salvo en $a$. Si existen $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

b) Sean $g(x)\le f(x)\le h(x)$ en la cercanía del número $a$, salvo en $a$. Si existen $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Se omite la demostración.

*** Ejercicio 1.20.** Dé un ejemplo en que $f(x)<g(x)$ en la cercanía de $a$ salvo en $a$ y que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

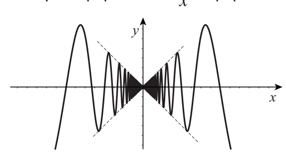
**Ejemplo 1.18.** Encuentre $\lim\limits_{x\to 0}x\text{ sen }\frac{1}{x}$.

Solución: Como $-1\le\text{sen }\frac{1}{x}\le 1$, se tiene que $-|x|\le x\text{ sen }\frac{1}{x}\le|x|$

Ahora $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}x\text{ sen }\frac{1}{x}=0$

[Por la propiedad b)]




$-1\le\text{sen }\frac{1}{x}\le 1$, $0<|x|$

$\Rightarrow -|x|\le|x|\text{ sen }\frac{1}{x}\le|x|$.

Si $x>0$

$-|x|\le x\text{ sen }\frac{1}{x}\le|x|$.

Si $x<0$

$-|x|\le -x\text{ sen }\frac{1}{x}\le|x|$.

Luego $|x|\ge x\text{ sen }\frac{1}{x}\ge -|x|$.



**Ejemplo 1.17**
(10 min)

**Ejercicio 1.19**
(10 min)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^4}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}$

$=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}$

$=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\cdot x^4\,2^x$

$=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)x\log_2 x$

$=0$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

**Propiedad del límite 2**
(7 min)

*** Ejercicio 1.20**

Solución:

Ejemplo

$f(x)=1-|x-a|$

$g(x)=1+|x-a|$

**Ejemplo 1.18**
(8 min)

Es una aplicación típica de la propiedad de límite 2.

## Clase 8
(Continuación)

### Ejercicio 1.21
(10 min) Solución

a) Como $-|x| \leq x\cos\dfrac{1}{x} \leq |x|$,

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

b) Como $-|x| \leq x\text{sen}\dfrac{1}{x^2} \leq |x|$,

$$\lim_{x\to 0} x\text{sen}\frac{1}{x^2} = 0.$$

c) Como $-|x|^2 \leq x^2\cos\dfrac{1}{2x} \leq |x|^2$,

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{2x} = 0.$$

d) Como

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\text{sen}x}{x} \leq \frac{1}{|x|},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0.$$

### Teorema 1.1
(20 min)

**Ejercicio 1.21.** Calcule.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\frac{1}{x^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{2x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\text{sen}\,x}{x}$

**Teorema 1.1.** $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

Este Teorema es el fundamento del cálculo infinitesimal de las funciones trigonometricas. Es esencial que la unidad de medida del ángulo sea radián.

Demostración: En la figura $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, PH = sen $\theta$ y QA = tan $\theta$. Por lo tanto, se tiene que:

El área S1 del $\Delta$OPA = $\frac{1}{2}$ sen $\theta$.

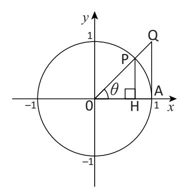
El área S2 del sector circular OPA es $\frac{1}{2}\,\theta$.

El área S3 del $\Delta$OAQ = $\frac{1}{2}$ tan $\theta$.

Como S1 < S2, se tiene que sen $\theta < \theta$ … (1)

Como S2 < S3, se tiene que $\theta < \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ … (2)

Ahora, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $0 < \cos\theta$.




Luego de (1) y (2) se tiene que,

$$\cos\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1 \quad \dots (3)$$

Cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, se tiene que $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y

sustituyendo $-\theta$ en (3), se tiene que;

$$\cos(-\theta) < \frac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1, \text{ es decir } \cos\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1.$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

Es decir, se verifica (3) para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Ahora $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\theta = \lim_{x\to 0} 1 = 1$. Luego por la propiedad b)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1.$$

36 | Unidad II • Lección 1 • Clase 8. Límite de funciones trigonométricas

**Objetivo:** Aplicar el teorema 1.1.

**Evaluación:** Ejercicio 1.22, 1.23,1.24

# Unidad II. Lección 1.

## Clase 9

(Continúa en la siguiente página)

### Clase 9. Aplicando el Teorema 1.1

**Ejemplo 1.19.** Calcule: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}$

Solución: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

$= \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\ \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1\cdot 1 = 1.$

Veáse Clase 2 inciso d)

**Ejercicio 1.22.** Calcule.

a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}$  b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}$

De ahora en adelante se utilizará el resultado de a) y el Teorema 1.1 indistintamente.
La variable puede ser cualquier letra.

**Ejemplo 1.20.** Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

Solución: Sea $\frac{\pi}{2}-x=t$. Entonces $x\to\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t\to 0$ y

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \operatorname{sen} t,$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

**Ejercicio 1.23.** Calcule. a) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$  b) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

**Ejemplo 1.21.** Calcule. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}$  b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}$

Solución: a) Sea $2x=\theta$. Entonces $x\to 0\Leftrightarrow\theta\to 0$. Por lo tanto,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\cdot 2 = 2\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 2\cdot 1 = 2$

b) Sea $2x=\alpha$ y $3x=\beta$. Entonces $x\to 0\Leftrightarrow\alpha\to 0\Leftrightarrow\beta\to 0$. Por lo tanto,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen}3x}\cdot\frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\ \lim\limits_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{3}$

Si se puede, calcule sin utilizar $\alpha$ y $\beta$: $\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen}3x}$
$= \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{3}$

**Ejercicio 1.24.** Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}$  b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}$  c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 4x}$  e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos 2x}$

Unidad II • Lección 1 • Clase 9. Aplicando el teorema 1 | 37

**Ejemplo 1.19**
(5 min)

**Ejercicio 1.22**
(8 min) Solución:

a) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}$

$= 1\div\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$
$= 1\div 1$
$= 1$

Nota: De ahora en adelante se usará el resultado del inciso a) y el teorema 1.1 indistintamente.

b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}$
$= \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta$
$= 1\cdot 1$
$= 1$

**Ejemplo 1.20**
(5 min)
En este ejemplo se hace un cambio de variable.

**Ejercicio 1.23**
(7 min)
Solución en pág. 60

**Ejemplo 1.21**
(10 min)

**Ejercicio 1.24.** (10 min)
Solución en pág. 60

# Unidad II. Lección 1.
## Ejercicios de la lección

### Ejercicios de la lección

1. Encuentre el límite.

   a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{\sqrt{x-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\log_3\dfrac{x^3-x+2}{x^2+1}$ Clase 2

2. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}$ Clase 3

3. Encuentre el valor de $a$ y $b$ que satisfacen la igualdad.

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=4$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{5}$ Clase 3

   *c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{10\sqrt{5}}$

4. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{|\cos x|}$ Clase 4

5. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x(x-1)}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$ Clase 5

6. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-x}{2x^3-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x}{x^3-x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+x}{x-3}$ Clase 6

   d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

7. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4\,3^x$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\log_2 x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log_2 x$ Clase 7

   e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x}{\log_2 x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}(2^x-x^3)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty}(x-\log_{\frac{1}{3}} x)$

8. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\log_2 x}$ Clase 8

9. Calcule.

   a) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} 4x}$ Clase 9

   d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

38 | Unidad II • Lección 1 • Ejercicios de la lección

1) a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\sqrt{3}$
c) 3 d) 0

2)
a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+1)}=5$

c)
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-6)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x^2-1)-(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

3) a) $3a+b+9=0$,
$x^2+ax+b$
$=(x-3)(x+a+3)$,
$\lim\limits_{x\to 3}(x+a+3)$
$=a+6=4$,
$a=-2,\quad b=-3$

b) $-3a+b+9=0$,
$x^2+ax+b$
$=(x+3)(x+a-3)$,
$\lim\limits_{x\to -3}(x+a-3)$
$=a-6=-5$,
$a=1,\quad b=-6$

c) $2a+b+4=0$,
$x^2+ax+b$
$=(x-2)(x+a+2)$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x+a+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+3}\right)}$$
$$=\frac{3}{2(a+4)\sqrt{5}}=\frac{3}{10\sqrt{5}}.$$
$a=1,\quad b=-6$

4) a) $\infty$ b) $\infty$

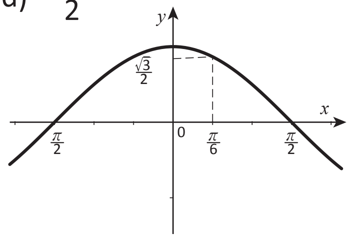
5) a) 0 b) 0 c) $\infty$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}=-\infty$

6) a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\infty$ d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x^2+x+3)-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+2x}}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}=-\dfrac{1}{2}$

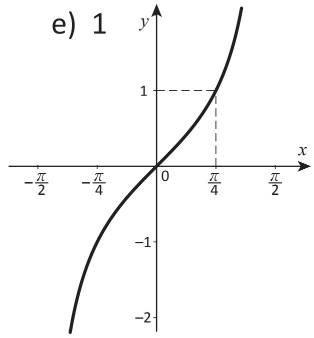
Incisos 7, 8 y 9 ver solución en página 60

## Unidad II. Lección 1. Ejercicio 1.2. Pág. 47. Incisos d, e, f, g y h. Solución

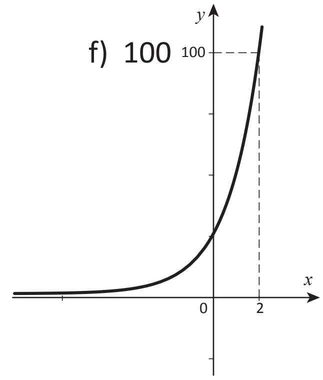
d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



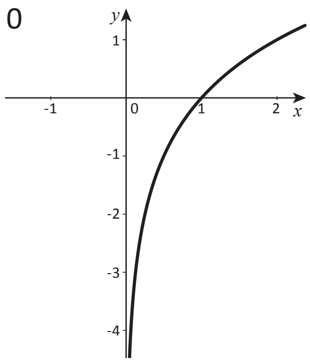

e) 1



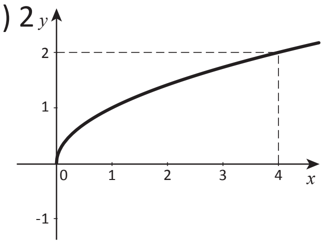

f) 100




g) 0




h) 2




## Unidad II. Lección 1. * Ejercicio 1.18. Pág. 54.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^n \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = (-1)^n \lim\limits_{x\to-\infty} x^n \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = 0$ por a), porque $1 < \dfrac{1}{a}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n a^x = \lim\limits_{x\to\infty} (-x)^n \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} (-1)^n x^n \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \begin{cases} \infty & n: \text{par} \\ -\infty & n: \text{impar} \end{cases}$ por a) y Clase 1.4 c)

c) Sea $\log_c x = t$. Entonces $x \to \infty \iff t \to \infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_c x = \lim\limits_{t\to\infty} (c^t)^n \cdot t = \lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t$.

Si $n > 0$, entonces $c^n > 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t = \infty$ por a).

Si $n = 0$, entonces $c^n = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t = \lim\limits_{t\to\infty} t = \infty$

Si $n < 0$, entonces $0 < c^n < 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t = 0$ por b).

d) $\log_c x = -\log_{\frac{1}{c}} x$ y $1 < \dfrac{1}{c}$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_c x = -\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_{\frac{1}{c}} x \begin{cases} -\infty & (0 \leq n) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$ por c) y Clase 1.4

e) Sea $\log_c x = t$. Entonces $x \to 0^+ \iff t \to -\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \lim\limits_{t\to-\infty} (c^t)^n\, t = \lim\limits_{t\to-\infty} t\,(c^n)^t$.

Si $n > 0$, entonces $c^n > 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to-\infty} t(c^n)^t = 0$

Si $n = 0$, entonces $c^n = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to-\infty} t(c^n)^t = \lim\limits_{t\to\infty} t = -\infty$

Si $n < 0$, entonces $0 < c^n < 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to-\infty} t(c^n)^t = -\infty$ por b).

f) $\log_c x = -\log_{\frac{1}{c}} x$ y $1 < \dfrac{1}{c}$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^n \log_{\frac{1}{c}} x) = \begin{cases} 0 & (0 < n) \\ \infty & (n \leq 0) \end{cases}$ Por e) y Clase 4 c)

## Unidad II. Lección 1. Ejercicio 1.23. Pág. 57. Solución:

a) Sea $\pi - x = t$. $x \to \pi \Leftrightarrow t = 0$ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\text{sen}x}{\pi - x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}(\pi - t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}\, t}{t} = 1$

b) Sea $x + \dfrac{\pi}{2} = t$. $x \to -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\text{sen}\, t} = 1$

## Unidad II. Lección 1. Ejercicio 1.24. Pág. 57. Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 3\,\dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x}{\text{sen}\, 2x} \cdot \cos 2x = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x} \cdot \dfrac{5x}{\text{sen}\, 5x} \cdot \dfrac{3}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 2x}{\text{sen}\, 4x} \cdot \dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{\text{sen}\, 2x}{2x} \cdot \dfrac{4x}{\text{sen}\, 4x} \cdot \dfrac{\cos 4x}{\cos 2x} = \dfrac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

e) Sea $\dfrac{\pi}{2} - 2x = t$. $x \to \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow t \to 0$

$$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{t}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{t}{\text{sen} t} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$$

## Unidad II. Lección 1. Ejercicios de la lección. Pág. 58. Incisos 7,8 y 9 Solución:

7) a) $\infty$ b) 0 c) 0 d) 0 e) $\infty$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x\left(1 - \dfrac{x^3}{2^x}\right) = \infty$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1 - \dfrac{\log_{\frac{1}{3}} x}{x}\right) = \infty$

8) a) 0 b) 0

9) a) Sea $x + \pi = t$. $x \to -\pi \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}(t - \pi)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{\text{sen}\, t}{t}\right) = -1$

b) Sea $x - \pi = t$. $x \to \pi \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan(t+\pi)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}\, t}{t} \cdot \dfrac{1}{\cos t} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4}\,\dfrac{4x}{\text{sen}\, 4x} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6}{3}\,\dfrac{\text{sen}\, 6x}{6x}\,\dfrac{3x}{\text{sen}\, 3x} = 2$

e) Sea $x - \pi = t$. $x \to \pi \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\text{sen}3(t+\pi)}{\text{sen}2(t+\pi)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\text{sen}3t}{\text{sen}2t} = -\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3}{2}\,\dfrac{\text{sen}3t}{3t}\,\dfrac{2t}{\text{sen}2t} = -\dfrac{3}{2}$

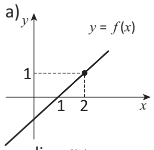
**Objetivo:** Entender la definición y la propiedad de la continuidad en el punto.

**Evaluación:** Ejercicio 2.1

# Unidad II. Lección 2.
## Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

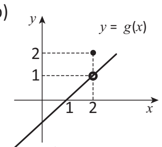
### Lección 2. Continuidad de funciones
### Clase 1. Continuidad en el punto

**Ejemplo 2.1.** Encuentre lo que se pide.

a)


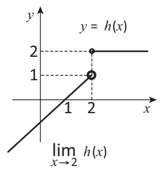
$\lim_{x\to 2} f(x)$

$f(2)$

b)


$\lim_{x\to 2} g(x)$

$g(2)$

c)


$\lim_{x\to 2} h(x)$

$h(2)$

Solución: a) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, $f(2) = 1$ b) $\lim_{x\to 2} g(x) = 1$, $g(2) = 2$ c) $\lim_{x\to 2} h(x)$ no existe, $h(2) = 2$

El signo "∘" significa que el punto no pertenece a la gráfica. El signo "•" significa que sí pertenece a la gráfica.

$\lim_{x\to 2^-} h(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 2$

En el Ejemplo 2.1 solo $f(x)$ es continua en 2.

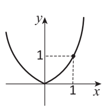
**Definición. Continuidad en el punto**

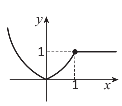
Sea $y = f(x)$ una función, $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

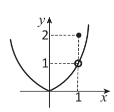
$f(x)$ debe ser definida en $a$ y su alrededor.

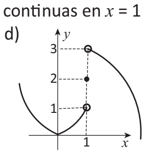
**Nota:** Aplicando la Explicación 2 de la Clase 1.1 de la Lección 1, la definición tiene la forma siguiente: $f(x)$ es continua en el punto $a$, cuando se verifica lo siguiente: Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe número $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

**Ejercicio 2.1.** Elija las gráficas de funciones que son continuas en $x = 1$

a)



b)



c)



d)



**Propiedad de la continuidad**

Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces las siguientes son continuas en $x = a$:

a) $y = f(x) + g(x)$

b) $y = f(x) - g(x)$

c) $y = kf(x)$, ($k$: número real)

d) $y = f(x)g(x)$

e) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$



**Ejemplo 2.1**
(10 min)

**Definición de continuidad en el punto**
(5 min)

**Ejercicio 2.1**
(5 min) Solución:
a) y b)

**Propiedad de la Continuidad**
(10 min)
Todas se deducen de la propiedad del límite.

# Unidad II. Lección 2.

## Clase 1
(Continuación)

## Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** **[A]** Entender la definición y los ejemplos típicos de la función continua.
**[B]** Entender la definición del valor máximo y mínimo.

**Evaluación:** [A] Mencionar los ejemplos de la función continua.
[B] Ejercicio 2.3

**Ejercicio 2.2**
(15 min)
Para $f(x) - g(x)$, se utiliza b) de la clase 1.2,
Para $kf(x)$, c),
Para $f(x)g(x)$, d),
Para $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, e).

[Hasta aquí Clase 1]

---

[Desde aquí Clase 2]

**Definición de continuidad en el intervalo.**
(5 min)

**Propiedad de las funciones continúas.**
(5 min)
No es necesario dar una explicación rigurosa.

**Ejemplos de funciones continuas**
(10 min)
Dé unos ejemplos de cada inciso. Puede ser:

1. $y = 2x^3 - x + 1$
2. $y = \dfrac{x^3+5}{x^2-x-1}$ en su dominio.
3. $y = \text{sen}x$,
   $y = \cos(x - \dfrac{\pi}{5})$
   $y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{4})$
   $y = \text{sen}^{-1}x$
4. $y = -3^{-x}$
   $y = \log_2(x+1)$

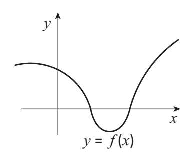
Demostración de que $y = f(x) + g(x)$ es continua.
De hipótesis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.
De a) de la Clase 1.2, se tiene que:
$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a).$$

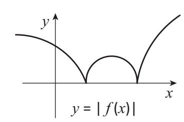
**Ejercicio 2.2.** Demuestre la continuidad de los demás casos de la propiedad.

### Clase 2. Continuidad en el intervalo

**Definición de continuidad en el intervalo**
$f(x)$ es continua en $x = a$ del intervalo $[a, b)$ cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
$f(x)$ es continua en $x = b$ del intervalo $(a, b]$ cuando $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo, cuando es continua en todos los puntos del intervalo

**[A]**
Intuitivamente la continuidad significa que la gráfica no está cortada.




**Propiedad de las funciones continuas.**
Funciones continuas tienen la misma propiedad que se explicó en la clase 1.
Además:

f) Si $f(x)$ es continua, entonces $|f(x)|$ lo es.
g) Si $f(x)$ es continua, entonces $\sqrt{f(x)}$ lo es donde $f(x) \geq 0$.
h) Si $f(x)$ es continua y tiene su inversa $f^{-1}$, entonces $f^{-1}$ lo es.

Ejemplos de funciones continuas:
1. Funciones polinómicas
2. Funciones racionales
3. Funciones trigonométricas y sus inversas
4. Funciones exponenciales y logarítmicas

**Definición Valor máximo y mínimo**
El valor $M$ (respectivamente $m$) es el máximo (respectivamente mínimo) de la función $y = f(x)$ cuando:
$f(x) \leq M$ [respectivamente $m \leq f(x)$] en su dominio.
Existe un valor $x = a$ en su dominio tal que $f(a) = M$ (respectivamente $f(a) = m$).

**Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.**
Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, entonces esta función tiene valor máximo y mínimo en este intervalo.

**[B]**
La condición "cerrado" es crucial como se ve en el Ejemplo 2.2.
Se omite demostración.

40 | Unidad II • Lección 2 • Clase 2. Continuidad en el intervalo

**Definición de valor máximo y mínimo**
(5 min)
Lo importante es que si algún valor es el valor máximo o/y mínimo, la función toma este valor en su rango.

**Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.**
(5 min)

**Objetivo:** Entender el teorema del valor intermedio y aplicarlo a la ecuación.

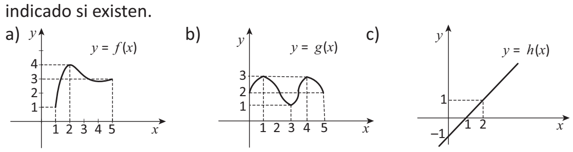
**Evaluación:** Ejercicio 2.4

# Unidad II. Lección 2.

## Clase 2
(Continuación)

## Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

**Ejemplo 2.2.** Encuentre el valor máximo y/o mínimo en el intervalo indicado si existen.



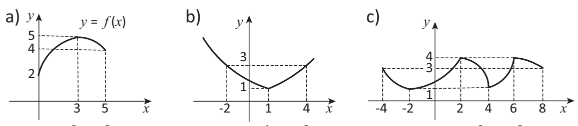

En [1, 5] | En [0, 5] | En [0, 2], (0, 2], (0, 2)

Solución: a) máximo $f(2) = 4$, mínimo $f(1) = 1$
b) máximo $g(1) = g(4) = 3$, mínimo $g(3) = 1$
c) En [0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo $h(0) = -1$
En (0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo no existe.
En (0, 2) máximo no existe, mínimo no existe.

Cuando se trata de máximo y mínimo se indica el valor de $x$ donde la función toma estos valores.

El mínimo no existe porque $h(x)$ toma valores mayores que $-1$ y que están en cualquier cercanía de $-1$.

**Ejercicio 2.3.** Encuentre el valor mínimo y/o máximo en el intervalo indicado si existen.




En [0, 5] | En (-2, 4] | En [-4, 8]

### Clase 3. Teorema del valor intermedio

**Teorema del valor intermedio**
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$. Sea $f(a) \neq f(b)$ y $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número $c$ en $(a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Se omite la demostración, para la cual hay que definir el conjunto de números reales de manera rigurosa.

**Ejemplo 2.3.** Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo (1, 2).

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. La función $y = f(x)$ es continua en [1, 2].
Por otra parte $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$.
Como $f(1) < 0 < f(2)$, por el Teorema del valor medio existe $c$ en (1, 2) tal que $f(c) = 0$.

**Ejercicio 2.4.** Demuestre que cada ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

a) $2x^3 + x^2 - 4 = 0$ (1, 2)    b) $\log_2 x + x - 2 = 0$ (1, 2)

c) $2^x - 3x = 0$ (3, 4)    d) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Unidad II • Lección 2 • Clase 3. Teorema del valor intermedio | 41

### Ejemplo 2.2
(9 min)

### Ejercicio 2.3
(6 min) Solución

a) máximo 5 ($x = 3$)
mínimo 2 ($x = 0$)

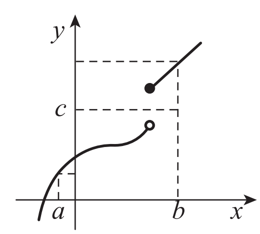
b) máximo 3 ($x = 4$)
mínimo 1 ($x = 1$)

c) máximo 4 ($x = 2, 6$)
mínimo 1 ($x = -2, 4$)

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

**Teorema del Valor Intermedio.**
(10 min)
Si la función no es continua, no verifica el teorema.




### Ejemplo 2.3
(15 min)

### Ejercicio 2.4
(20 min) Solución
Se expresa el lado izquierdo de la ecuación por $f(x)$.

a) $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 16$

b) $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 1$

c) $f(3) = -1 < 0 < f(4) = 4$

d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{4} > 0 > f(\pi) = 1 - \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto en cada caso existe un número $c$ en cada intervalo tal que $f(c) = 0$.

# Unidad II. Lección 2.
## Ejercicios de la lección

# Unidad II. Lección 3.
## Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Entender la definición de la asíntota.

**Evaluación:** Ejercicio 3.1

Soluciones:
1) Se expresa el lado izquierdo por $f(x)$.
a) $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 1$
b) $f(1) = -1 < 0 < f(4) = 3$
c) $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -\frac{5}{3}$
d) $f(0) = 1 > 0 > f\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto por el teorema del valor intermedio existe un número $c$ en cada intervalo tal que $f(c) = 0$.

[Hasta aquí Clase 3 de Lección 2]

[Desde aquí Clase 1 de Lección 3]

**Definición de asíntota.**
(5 min)

**Ejemplos de asíntotas verticales.**
(10 min)

**Ejemplos de asíntotas horizontales**
(10 min)

**Ejercicios de la lección**

1. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado. Clase 3
   a) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$ (1, 2) b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 2x - 3 = 0$ (1, 4)
   c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2x = 0$ (0, 1) d) $\cos x - 2x = 0$ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

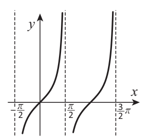
### Lección 3. Asíntotas
**Clase 1. Asíntotas**

Se le denomina **asíntota** a una recta a la cual la gráfica se acerca sin límite y sin tocarla.

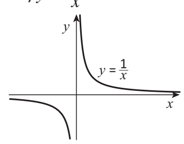
Este tipo de asíntotas aparece en el límite del dominio de la función.

Ejemplos de asíntotas verticales:

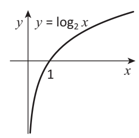
a) $y = \tan x$




b) $y = \frac{1}{x}$




c) $y = \log_2 x$



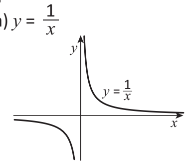

Asíntotas verticales

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n$: número entero) $x = 0$ $x = 0$

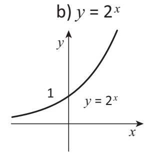
En b) $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Ejemplos de asíntotas horizontales.

a) $y = \frac{1}{x}$




b) $y = 2^x$




Asíntotas horizontales

$y = 0$ $y = 0$

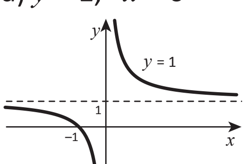
En la Unidad IV, se aprenderán otro tipo de asíntotas.

**Ejercicio 3.1.** Dibuje la gráfica. Encuentre la ecuación de la asíntota.
a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \frac{1}{x+1}$ c) $y = \sec x$ d) $y = 3^x - 1$ e) $y = \log_3(x + 1)$

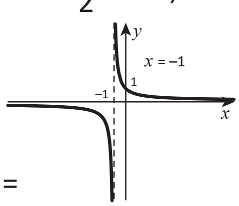


**Ejercicio 3.1**
(20 min) Solución

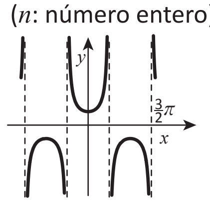
a) $y = 1$, $x = 0$



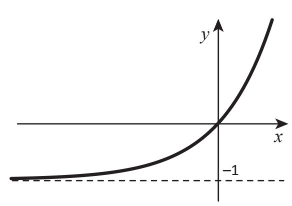

b) $x = -1$, $y = 0$



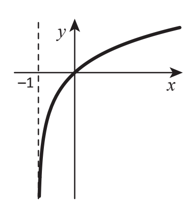

c) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, ($n$: número entero)




d) $y = -1$




e) $x = -1$



# Unidad II. Lección 2.
## Problemas de la Unidad

**Problemas de la Unidad A**

Solución

1. a) Sea $\sqrt{x} = t$.

Entonces $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \log_2 x$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} t \log_2 t^2$

$= 2 \lim\limits_{t\to 0^+} t \log_2 t = 0$

(Clase 1.7 e))

**Problemas de la unidad A**

1. Calcule. Clase 1.7
   a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \log_2 x$
   b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$
   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2}$
2. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado. Clase 2.3
   a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2x = 0 \quad \left(\frac{1}{3}, 1\right)$
   b) $\tan x = 3x \operatorname{sen} x \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

**Problemas de la unidad B**

1. Demuestre que para cada número negativo $k$, la ecuación $\log_2 x = kx$ tiene solución en el intervalo (0, 1).

Unidad II • Problemas de la Unidad | 43

b) Sea $\sqrt{x} = t$. Entonces $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{t\to\infty} t^4 \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$

(Clase 1.7 b))

c) Sea $\sqrt{x} = t$. Entonces $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{3^t}{t^4}$

$= \infty$

2. a) Sea $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 2x$.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0 > f(1) = -2.$

Como $f(x)$ es continua en $[\frac{1}{3}, 1]$, por el teorema del valor intermedio, existe un número $c$ en $(\frac{1}{3}, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Como sen$x \neq 0$ y cos$x \neq 0$ en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, la ecuación equivale a $x\cos x = \frac{1}{3}$.

$x\cos x$ es continua en $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} > \frac{1}{3} > \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$

Por el teorema del valor intermedio existe un número $c$ en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $c \cos(c) = \frac{1}{3}$.

**Problemas de la Unidad B**

Solución:

1. Sea $f(x) = \log_2 x - kx$.

$f(1) = -k > 0$. Por otra parte, como $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x) = -\infty$, existe un número $a$ tal que $0 < a < 1$ y $f(a) < k$.

La función $f(x)$ es continua en $[a, 1]$ y $f(a) < k < f(1)$. Luego por el teorema del valor intermedio, existe un número $c$ tal que $a < c < 1$ y $f(c) = 0$.

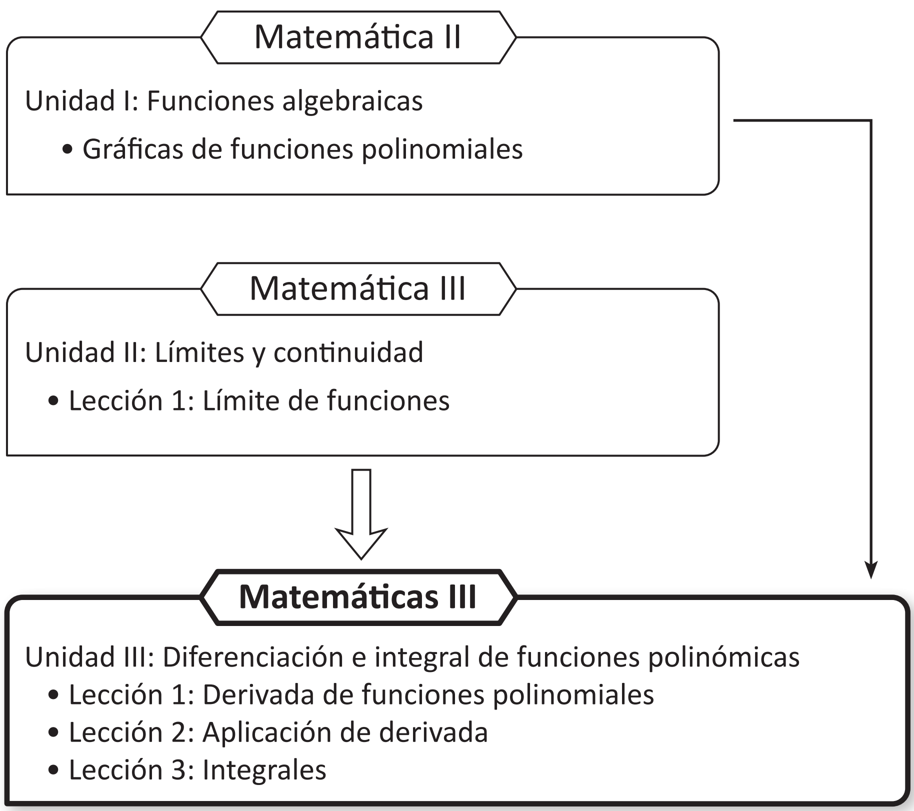
Matemáticas III
Unidad III

# Diferenciación e integrales de funciones polinómicas

**1. Competencias de la Unidad**

1. Establecer la definición de la derivada de una función polinómica.
2. Establecer la definición de recta tangente a una gráfica de una función polinómica.
3. Aplicar la derivada para hacer gráfica de una función polinómica.
4. Establecer la definición de la integral indefinida de una función polinómica.
5. Establecer la definición de la integral definida de una función polinómica.
6. Aplicar la integral definida para encontrar área.
7. Valorar la importancia de la derivada y la integral para resolver problemas de la ciencia y la tecnología.

**2. Relación y Desarrollo**



**3. Plan de Estudio de la Unidad** (22 horas)

| Lección | Clase/hora | Contenidos | Términos y signos |
|---|---|---|---|
| 1 Derivadas de funciones polinómicas | 1 | Velocidad en el instante | |
| | 2 | Definición de derivada | derivada de $f(x)$, diferenciar, diferenciable (derivable), $f'(x)$ |
| | 3 | Propiedad de derivada, derivada de monomios | |
| | | Ejercicios de la lección | |
| 2 Aplicación de derivada | 1 | Definición de la tangente, tangente en un punto de la gráfica, tangente que pasa por un punto fuera de la gráfica | tangente |
| | 2 | variación de la función, tabla de variación | creciente, decreciente |
| | 3 | Extremos relativos | máximo (mínimo) relativo, extremo relativo |
| | 4 | Gráfica de función de tercer grado con extremos relativos | |
| | 5 | Gráfica de función de tercer grado sin extremos relativos | |
| | 6 | Extremos de funciones | |
| | 7 | Aplicación de extremos | |
| | 8 | Encontrar el número de soluciones reales distintas de ecuación de tercer grado | |
| | 9 | Encontrar el número de soluciones reales distintas de ecuación de tercer grado donde los coeficientes contienen variable | |
| | 10 | Aplicación a la demostración de inecuación | |
| | | Ejercicios de la lección | |

| Lección | Clase/hora | Contenidos | Términos y signos |
|---|---|---|---|
| 3 Integrales | 1 | Definición de integral definida, función primitiva de potencia de $x$ | función primitiva, integrar, constante de integración, integral indefinida $\int f(x)dx$ |
| | 2 | Propiedad lineal de la integral indefinida | |
| | 3 | Definición de la integral definida, propiedad lineal de la integral definida | integral definida, límite superior (inferior), $\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b$ |
| | 4 | Propiedad de la integral definida acerca de sus límites | |
| | 5 | Derivada de la integral definida con respecto a su límite | |
| | 6 | Representación del área de la parte comprendida entre una gráfica $y$ el eje $x$ con integral definida | |
| | 7 | Tipo básico del cálculo del área | |
| | 8 | Área de la parte comprendida entre dos gráficas | |
| | 9 | Cálculo del área delimitada por dos líneas | |
| | | Ejercicios de la lección | |
| Problemas de la Unidad | | Problemas de la Unidad A | |
| | | Problemas de la Unidad B | |

## Puntos de lección

### Lección 1: Derivadas de funciones polinómicas

El fundamento del cálculo infinitesimal es difícil para los estudiantes de bachillerato y en la mayoría de los casos no se enseña bien, la diferenciación y la integral de funciones polinómicas es muy fácil. Hay sólo dos fórmulas a memorizar: diferenciación $(x^n)' = nx^{n-1}$ integral $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$. Además, este aprendizaje proporciona a los estudiantes una buena oportunidad para conocer la eficacia de matemáticas.

La lección empieza la explicación acerca de la "velocidad en un instante" y la relaciona con la pendiente de la tangente de la gráfica. Se espera que los estudiantes entiendan el sentido manejando el ejemplo de valores concretos.

Aunque es importante que los estudiantes conozcan la definición de la derivada, una vez que aprendan la fórmula, no hay necesidad de recurrirse a ella.

### Lección 2 Aplicación de derivada

La primera aplicación que se estudia es la tangente. El hecho de que su pendiente es igual al valor de la derivada viene de la propia definición de la derivada. Es fácil encontrar la tangente cuando está dado el punto de tangencia, pero encontrar la tangente que pasa por el punto dado que está fuera de la gráfica es un poco difícil. Los estudiantes encontraron la misma situación en Matemática III Unidad II.

La segunda aplicación es el cambio del valor de la función. La relación entre el cambio del valor y el signo de la derivada es demostrado utilizando el teorema del valor medio que se enseña en la Unidad IV (aún no está demostrado en esa unidad). Aquí basta la explicación con unos ejemplos y la gráfica. Hay que tener cuidado con el hecho de que $f'(a) = 0$ no siempre significa que $f(x)$ toma su extremo relativo en $x = a$. Utilizando la gráfica se puede encontrar el número de distintas soluciones reales de la ecuación y demostrar la inecuación.

### Lección 3 Integrales

Después de la definición de la derivada, no hay mucha dificultad en el aprendizaje salvo el uso de las fracciones en el cálculo de integral definida. El Libro del Estudiante trata de evitarlo cuanto sea posible.

# Unidad III. Lección 1.
## Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Aplicar el concepto de la velocidad en el instante para definir la pendiente de una función.

**Evaluación:** Explicar cómo encontrar la velocidad en el instante.

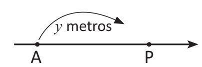
### Ejemplo 1.1
(15 min)
El objetivo es entender que la velocidad corresponde a la pendiente de la gráfica de tiempo-recorrido.

### Ejemplo 1.2
(30 min)
Si se agranda la vecindad del punto (1,1) de la gráfica $y = x^2$, se ve como una recta.
La pendiente corresponde a la velocidad en el instante de $x = 1$.
Para encontrar la pendiente, se toma un punto cerca de (1, 1) y calcula la pendiente de la recta que une este punto con (1, 1).
Luego se acerca este punto a (1, 1) y el límite es la pendiente.

**Lección 1. Derivadas de funciones polinómicas**

**Clase 1. Velocidad en el instante**

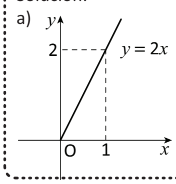
**Ejemplo 1.1.** En la recta numérica, un punto P sale del punto A y se mueve hacia la derecha. La distancia $y$ metros, entre los puntos P y A después de $x$ segundos está dada como $y = 2x$.




a) Haga la gráfica de la función $y = 2x$ $(x \geq 0)$.
b) Encuentre la velocidad metros/segundo (m/s) del punto P.

Solución:

a)




b)

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 |
| $\Delta x$ | 1 | |
| $\Delta y$ | 2 | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | 2 | |

Respuesta:
2 metros/segundo ó
2m/s

**[A]** Relación entre la distancia, el tiempo y la velocidad.

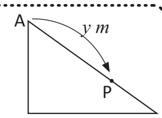
$\Delta x$, representa la diferencia (o cambio) de $x$. Se aplica lo mismo a $\Delta y$.

$\Delta x = 1 - 0 = 1$
$\Delta y = 2 - 0 = 2$

**Nota:** En este ejemplo, la velocidad no cambia y

velocidad = la pendiente de la gráfica.

**Ejemplo 1.2.** Una bolita P sale del punto A cae en la pendiente. La distancia $y$ metros entre A y P después de $x$ segundos está dada como $y = x^2$.



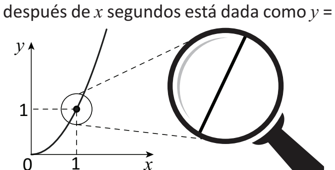




Figura 1.1

Ahora la gráfica de $y = x^2$ no es una recta, lo que quiere decir, la velocidad va cambiando. Sin embargo, si se agranda la parte alrededor del punto (1, 1) la gráfica parece casi una recta. Ahora se trata de encontrar su "pendiente".

Encuentre la pendiente completando la tabla.

| $x$ | 1 | 2 | 1 | 1.1 | 1 | 1.01 | 1 | 1.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |
| $\Delta x$ | | | | | | | | |
| $\Delta y$ | | | | | | | | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | | | | | | | | |

**Objetivo:** Entender la definición de derivada.

**Evaluación:** Ejercicio 1.1

# Unidad III. Lección 1.

## Clase 1

(Continuación)

## Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

| $x$ | 0 | 1 | 0.9 | 1 | 0.99 | 1 | 0.999 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |
| $\Delta x$ | | | | | | | | |
| $\Delta y$ | | | | | | | | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | | | | | | | | |

Solución:

| $x$ | 1 | 2 | 1 | 1.1 | 1 | 1.01 | 1 | 1.001 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 1 | 1.21 | 1 | 1.0201 | 1 | 1.002001 | |
| $\Delta x$ | 1 | | 0.1 | | 0.01 | | 0.001 | | |
| $\Delta y$ | 3 | | 0.21 | | 0.0201 | | 0.002001 | | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | 3 | | 2.1 | | 2.01 | | 2.001 | | $\to 2$ |

| $x$ | 0 | 1 | 0.9 | 1 | 0.99 | 1 | 0.999 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 0.81 | 1 | 0.9801 | 1 | 0.998001 | 1 | |
| $\Delta x$ | 1 | | 0.1 | | 0.01 | | 0.001 | | |
| $\Delta y$ | 1 | | 0.19 | | 0.0199 | | 0.001999 | | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | 1 | | 1.9 | | 1.99 | | 1.999 | | $\to 2$ |

Respuesta: La "pendiente" es 2.

Este corresponde a la "velocidad en $x = 1$".

### Clase 2. Definición de derivada

La Figura 1.2 muestra la gráfica de una función. Se toman dos puntos P($a$, $f(a)$) y Q($a + h$, $f(a + h)$) en la gráfica. La pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ahora el punto Q se acerca al punto P. Entonces la pendiente de la recta se acerca a la pendiente de la recta $l$, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{la pendiente de } l$$

La función que corresponde el valor de $x = a$, a este límite se llama **derivada** de $f(x)$.

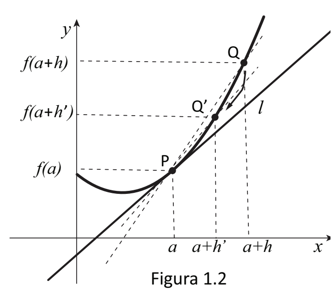


Figura 1.2



Si se calcula a mano, se entenderá mejor que el límite es 2.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

## Clase 2
(Continuación)

**Definición de Derivada**
(20 min)
Se explica relacionando con el Ejemplo 1.2 de la Clase 1.
Que el punto Q tiende a P corresponde a que $\Delta x$ tiende a 0 en el Ejemplo 1.2

Ejemplo de una función no diferenciable
(5 min)
Los estudiantes tienen que entender que la gráfica de función diferenciable es "suave".

**Ejemplo 1.3**
(5 min)

**Ejercicio 1.1**
(10 min) Solución

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

$f'(1) = 1$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$

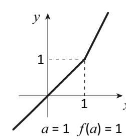
$f'(1) = 3$

**Definición de derivada**
Sea $f(x)$ una función. Cuando existe el límite $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se le denomina derivada de $f(x)$.

Se denomina **diferenciación** al encontrar la derivada.

Nota: Hay funciones que no tienen derivada.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 2x-1 & (1 \le x) \end{cases}$




$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1,\qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$

Por lo tanto

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ no existe.

**Ejemplo 1.3.** Sea $f(x) = x^2$. Encuentre $f'(x)$.

Solución: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2x+1)h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

**Nota:** Si se sustituye $x = 1$ en $f'(x)$, se obtiene $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, el valor que se ha obtenido en el Ejemplo 1.2.

**Ejercicio 1.1.** Encuentre $f'(x)$ y $f'(1)$.
a) $f(x) = x$  b) $f(x) = 3x$  c) $f(x) = 2$  d) $f(x) = x^2 + 3x$

**Nota:** Una función diferenciable es una función continúa.

* Demostración: $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ \lim_{h\to 0} h = f'(a)\cdot 0 = 0$

Luego $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Otras notaciones

$\frac{d}{dx}f(x)$.

Cuando se trata de la función $y = f(x)$

$y'$, $\frac{dy}{dx}$ (derivada de $y$ con respecto a $x$).

Cuando $f(x)$ tiene su derivada se dice que $f(x)$ es **diferenciable (derivable)**.

$f(1+h) = \begin{cases} 1+h & (h<0) \\ 2(1+h)-1 & (0 \le h) \end{cases}$

$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0^-}\frac{1+h-1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h}$

$= 1$

$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\{2(1+h)-1\}-1}{h}$

$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{2}+2\cancel{h}-\cancel{2}}{\cancel{h}} = 2$

Para encontrar $f'(1)$ basta sustituir $x = 1$ en $f'(x)$.

48 | Unidad III • Lección 1 • Clase 2. Definición de derivada

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \qquad f'(1) = 0$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+3(x+h)\}-(x^2+3x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+3h}{h}$

$= \lim_{h\to 0}(2x+h+3) = 2x+3 \qquad f'(1) = 2(1)+3 = 5.$

**Nota** (5 min)

**Objetivo:** Derivar polinomios utilizando la propiedad de derivada.

**Evaluación:** Ejercicio 1.2, Ejercicio 1.3, Ejercicio 1.4

# Unidad III. Lección 1.
## Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

### Clase 3. Cálculo de la derivada

**Propiedad de derivada**

a) $c$ es constante $\Rightarrow$ $(c)' = 0$
b) $\{kf(x)\}' = k\,f'(x)$  $k$: constante
c) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
d) $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

$(c)'$ significa derivada de $c$ como función de $x$.

Se verifica la inversa de a).

$f'(x) = 0$ en un intervalo $\Rightarrow f(x)$ es constante en este intervalo.

Se omite demostración.

Demostración: a) Sea $f(x) = c$. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

b) Sea $g(x) = kf(x)$; $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$

$$= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$$

c) y d) se demuestran utilizando Matemática III, Unidad II, Lección 1, Clase 2.

III, II, Clase 2.

De la propiedad anterior, se reduce el cálculo de la derivada de la función polinómica al de monomios. En cuanto a esto último, se tiene la siguiente:

**Derivada de monomios**

$(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n$: número natural)

$(x)' = 1$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$

* Demostración. Primero se tiene la siguiente igualdad

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots + b^{n-1})$$
($n$: número natural)

Para la demostración desarrolle el lado derecho.

Luego, sean $x + h = a$ y $x = b$.

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

$$= \lim_{h\to 0}(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) = n\,x^{n-1}$$

$a - x = h$
$\lim\limits_{h\to 0} a = x$

**Ejemplo 1.4.** Sea $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

Solución: $f'(x) = (2x^3 - 3x + 4)'$
$= (2x^3)' - (3x)' + (4)'$
$= 2(x^3)' - 3(x)'$
$= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 3\,x^{1-1}$
$= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1$
$= 6x^2 - 3$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 3$
$= 21$

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.



**Propiedad de la derivada** (12 min)

Solución:

c) $\{f(x) + g(x)\}'$
$= f(x)' + g'(x)$
sea $d(x) = f(x) + g(x)$
$d'(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

d) $\{f(x) - g(x)\}'$
$= f'(x) - g'(x)$
sea $d(x) = f(x) - g(x)$
$d'(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) - g'(x)$$

**Derivada de monomios** (5 min)

* Demostración se puede omitir

**Ejemplo 1.4** (5 min)

# Unidad III. Lección 1.

## Clase 3

(Continuación)

## Ejercicios de la lección

### Ejercicio 1.2

(5 min) Solución

a) $f'(x) = 12x^2 - 2$,
$f'(2) = 46$

b) $f'(x) = 6x + 4$,
$f'(2) = 16$

c) $f'(x) = -20x^3 - 6x + 4$
$f'(2) = -168$

d) $f'(x) = 6x^2$,
$f'(2) = 24$

### Ejemplo 1.5

(4 min)

### Ejercicio 1.3

(6 min) Solución

a) $y = 3x^2 + 5x + 2$,
$y' = 6x + 5$

b) $y = 4x^2 - 4x + 1$,
$y' = 8x - 4$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$,
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

d) $f(x) = 4x^2 - 36$
$f'(x) = 8x$

### Ejemplo 1.6

(4 min)

### Ejercicio 1.4

(4 min) Solución

a) $\dfrac{d}{dr} f(r) = 2\pi r$

b) $\dfrac{d}{ds} g(s) = 6s - 1$

c) $\dfrac{dy}{dr} = 2\pi rh$

d) $\dfrac{dz}{dy} = -15y^2 + 6y$

**Ejercicio 1.2**. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

a) $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
c) $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + 4x$ d) $f(x) = 2x^3 - 3$

**Ejemplo 1.5.** Sea $y = (2x - 1)(x + 3)$. Encuentre $y'$.
Solución: $y = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 5x - 3$
$y' = 4x + 5$

**Ejercicio 1.3.** Encuentre $y'$ o $f'(x)$.

a) $y = (3x + 2)(x + 1)$ b) $y = (2x - 1)^2$
c) $f(x) = (x^2 + 2x)(x - 1)$ d) $f(x) = 4(x + 3)(x - 3)$

**Ejemplo 1.6.** Sea $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\dfrac{d}{dr}V(r)$.
Solución: $\dfrac{d}{dr}V(r) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

$\dfrac{d}{dr}$ quiere decir "derivar con respecto a $r$".

**Ejercicio 1.4.** Encuentre la derivada:

a) $f(r) = \pi r^2$, $\dfrac{d}{dr}f(r)$ b) $g(s) = 3s^2 - s$, $\dfrac{d}{ds}g(s)$

c) $y = \pi r^2 h$, $\dfrac{dy}{dr}$ d) $z = -5y^3 + 3y^2$, $\dfrac{dz}{dy}$

**Ejercicios de la lección**

1. Calcule la derivada aplicando la definición. Clase 2
   a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = x^2 - x$

2. Encuentre lo que piden. Clase 3
   a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $f'(x)$, $f'(-1)$

   b) $g(x) = (2x + 3)(3x - 1)$ $g'(x)$, $g'(-2)$

   c) $h(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$ $\dfrac{d}{dt}h(t)$, $\dfrac{d}{dt}h(1)$

50 | Unidad III • Lección 1 • Ejercicios de la lección

**Ejercicios de la Lección.** Solución

1. a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2(x+h) - (-2x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-2) = -2$

   b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left\{(x+h)^2 - (x+h)\right\} - (x^2 - x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh + h^2 - h}{h}$
   $= \lim\limits_{h\to 0}(2x + h - 1) = 2x - 1$

Inciso 2 Veáse solución en la página 82

**Objetivo:** Definir la tangente de una función.

**Evaluación:** Ejercicio 2.1

# Unidad III. Lección 2.

## Clase 1

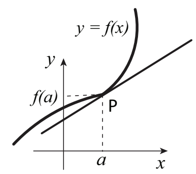
(Continúa en la siguiente página)

### Lección 2. Aplicación de derivada

**Clase 1. Tangente**

**Definición de tangente**
Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Sea $P(a, f(a))$ un punto de su gráfica. La tangente de la gráfica en el punto P es la línea que pasa por P cuya pendiente es $f'(a)$.

**Ecuación de tangente**
La tangente de la gráfica $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ... (1)




Demostración: la pendiente de (1) es $f'(a)$.
(1) pasa por el punto $(a, f(a))$.

La línea que pasa por $(a, b)$ y cuya pendiente es $m$ es:
$y - b = m(x - a)$
[Matemática I. Unidad IV]

**Ejemplo 2.1.** Encuentre la tangente a la gráfica de $y = x^2 - x + 3$ en el punto (2, 5) de la gráfica.

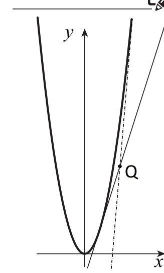
Solución: Sea $f(x) = x^2 - x + 3$.
$f'(x) = 2x - 1.$ $f'(2) = 3$

La tangente es una línea que pasa por (2,5) y cuya pendiente es 3.
Por lo tanto,
$y - 5 = 3(x - 2)$, $y = 3x - 1$ (Respuesta)

**Ejercicio 2.1.** Encuentre la tangente de las siguientes gráficas en el punto dado.

a) $y = x^2 - 3x + 4$, (1, 2) b) $y = -3x^2 + 4x + 1$, (1,2)

c) $y = -x^3 + 2x^2 + 1$, (−1, 4) d) $y = x^3 - 3x$, (−1, 2)




*** Ejemplo 2.2.** Encuentre la tangente de la gráfica $y = x^2$ que pasa por el punto Q(3,8) fuera de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2$. Sea $(a, a^2)$ el punto de tangencia.
La pendiente de la tangente es $f'(a) = 2a$.
Como pasa por el punto $(a, a^2)$, la tangente es:
$y = 2a(x - a) + a^2$, $y = 2ax - a^2$ ...(1)
Esta línea pasa por el punto (3, 8), por lo tanto, sustituyendo (3,8) en (1):
$8 = 2a \cdot 3 - a^2$, $a^2 - 6a + 8 = 0$, $(a - 2)(a - 4) = 0$
$a = 2$ y $4$
Sustituyendo $a = 2$ en (1), se obtiene que: $y = 4x - 4$
Sustituyendo $a = 4$ en (1), se obtiene que: $y = 8x - 16$
Respuesta: $y = 4x - 4$ y $y = 8x - 16$

Los puntos de tangencia: sustituyendo, $a = 2, 4$ en $(a, a^2)$
(2, 4) y (4, 16)

Unidad III • Lección 2 • Clase 1. Tangente | 51

### * Ejemplo 2.2

### Definición de tangente

(10 min)
En el Ejemplo 1.2, la tangente de $y = x^2$ en (1, 1) corresponde a la imagen de la derecha en la Fig. 1.1.

### Ecuación de tangente

(5 min)
El aspecto importante es que la pendiente de la tangente es el valor de la derivada en el punto de tangencia.

### Ejemplo 2.1

(10 min)

### Ejercicio 2.1

(20 min) Solución

a) Sea $f(x) = x^2 - 3x + 4$
$f'(x) = 2x - 3$, $f'(1) = -1$
tangente $y - 2 = -(x - 1)$,
$y = -x + 3$

b) $y' = -6x + 4$,
pendiente −2
tangente $y - 2 = -2(x - 1)$,
$y = -2x + 4$

c) $y' = -3x^2 + 4x$,
pendiente −7
tangente $y - 4 = -7(x + 1)$,
$y = -7x - 3$

d) $y' = 3x^2 - 3$,
pendiente 0
tangente $y - 2 = 0(x + 1)$,
$y = 2$

# Unidad III. Lección 2.

## Clase 1
(Continuación)

## Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo:** Establecer la relación entre el signo de la derivada y el cambio del valor de la función.

**Evaluación:** Ejercicio 2.3 y 2.4

### * Ejercicio 2.2
Solución:
Sea $a$ la coordenada $x$ del punto de tangencia.

a) tangente $y = 2a(x-a) + a^2$
$y = 2ax - a^2$.
Sustituyendo (2, 3)
$a^2 - 4a + 3 = 0$, $a = 1, 3$
$y = 2x - 1$, y $y = 6x - 9$.

b) tangente $y = (-2a + 3)(x - a) + (-a^2 + 3a)$.
Sustituyendo (2, 3),
$a^2 - 4a + 3 = 0$
$a = 1, 3$ $\quad y = x + 1$,
$y = -3x + 9$

c) tangente
$y = -2a(x - a) - a^2$
Sustituyendo (2, 5)
$a^2 - 4a - 5 = 0$
$a = 5, -1$ $\quad y = -10x + 25$,
$y = 2x + 1$

d) tangente $y = 6a(x - a) + 3a^2 - 1$.
Sustituyendo (1, −1)
$3a^2 - 6a = 0$
$a = 0, 2$ $\quad y = -1$,
$y = 12x - 13$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

**Definición: creciente y decreciente** (2 min)

**Ejemplo** (4 min)

**Teorema** (4 min)

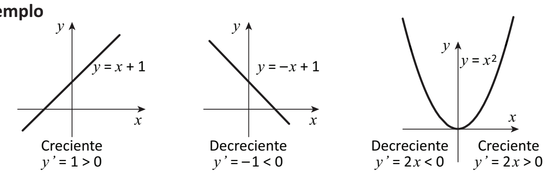
*** Ejercicio 2.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto dado.

a) $y = x^2$, (2, 3) b) $y = -x^2 + 3x$, (2, 3)
c) $y = -x^2$, (2, 5) d) $y = 3x^2 - 1$, (1, −1)

**Clase 2. Tabla de variación**

**Definición:** En un intervalo una función $f(x)$ es:
Creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**Ejemplo**




Como se ve en este ejemplo, hay una relación entre el cambio del valor de una función y el signo de su derivada.

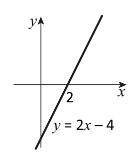
**Teorema:** Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $(a, b)$.
$f'(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a, b]$
$f'(x) < 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Para la demostración se utiliza el Teorema del valor medio que se aprenderá en la Unidad IV.

**Ejemplo 2.3.** Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Investigue el signo de $f'(x)$ y el cambio de valor de $f(x)$.

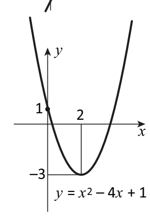
Solución: $f'(x) = 2x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Por lo tanto, se tiene que:
$x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$
$2 < x \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.




La siguiente tabla representa el resultado del Ejemplo 2.3.

| $x$ | $x < 2$ | 2 | $2 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | − 3 | ↗ |




En este libro se le llama a esta tabla: tabla de variación.

↘ significa decreciente.

↗ significa creciente.

52 | Unidad III • Lección 2 • Clase 2. Tabla de variación

**Ejemplo 2.3.** (4 min)

**Tabla de Variación** (3 min)
El término "Tabla de Variación" se utiliza sólo en este Libro. Generalmente puede significar otra cosa.

**Objetivo:** Definir e identificar los extremos relativos de una función.

**Evaluación:** Ejercicio 2.5

# Unidad III. Lección 2.

## Clase 2

(Continuación)

## Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

**Ejercicio 2.3.** Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = 3x^2 - 6x$

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

**Ejemplo 2.4.** Haga la tabla de variación de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0$, $x = -1$ y $1$

| $x$ | $x < -1$ | $-1$ | $-1 < x < 1$ | $1$ | $1 < x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 2 | ↘ | −2 | ↗ |

Los signos $x < -1$, $-1 < x < 1$ y $1 < x$ se pueden omitir.

**Ejercicio 2.4.** Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x$ d) $f(x) = -x^3 - 6x^2$

### Clase 3. Extremos Relativos

**Definición:** Sea $f(x)$ una función definida en el punto $x_0$ de su dominio. Se le denomina a $f(x_0)$:

máximo relativo si $f(x) \leq f(x_0)$ para valores de $x$ aproximados a $x_0$

mínimo relativo si $f(x) \geq f(x_0)$ para valores de $x$ aproximados a $x_0$

Se llama también:
máximo local,
mínimo local.

Ambos se llaman extremo relativo (local).

**Ejemplo 2.5.** Haga la tabla de variación de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ y encuentre los extremos relativos.

Solución: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$
$= -3(x-3)(x+1) = 0$, $x = 3$ y $-1$

| $x$ | | $-1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | −5 | ↗ | 27 | ↘ |

máximo relativo $f(3) = 27$
mínimo relativo $f(-1) = -5$

En general

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ |

↑ máximo relativo

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ |

↑ mínimo relativo

**Ejercicio 2.5.** Haga la tabla de variación y encuentre los extremos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$

c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x$ d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

Dése cuenta del cambio de signo de la derivada.



[Desde aquí Clase 3]

**Definición de Extremos relativos**
(5 min)

**Ejemplo 2.5** (7 min)

Para ser extremo relativo, la derivada tiene que cambiar el signo.

**Ejercicio 2.5**
(33 min) Solución. Veáse en página 82

**Ejercicio 2.3**
(10 min) Solución:

a)

| $x$ | $x < 3$ | $3$ | $3 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | −9 | ↗ |

b)

| $x$ | $x < 1$ | $1$ | $1 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | −3 | ↗ |

c)

| $x$ | $x < 1$ | $1$ | $1 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 1 | ↘ |

d)

| $x$ | $x < 0$ | $0$ | $0 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 4 | ↘ |

**Ejemplo 2.4**
(5 min)

**Ejercicio 2.4**
(13 min)

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

| $x$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | −4 | ↗ |

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x$
$= 6x(x+1)$

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ |

c) $f'(x) = -3x^2 + 3$
$= -3(x+1)(x-1)$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | −2 | ↗ | 2 | ↘ |

d) $f'(x) = -3x^2 - 12x$
$= -3x(x+4)$

| $x$ | | $-4$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | −32 | ↗ | 0 | ↘ |

[Hasta aquí Clase 2]

# Unidad III. Lección 2.
## Clase 4

**Objetivo:** Dibujar la gráfica de la función de tercer grado.
**Evaluación:** Ejercicio 2.6

## Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

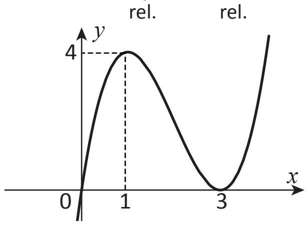
**Objetivo:** Identificar las funciones que no tienen extremos relativos.
**Evaluación:** Ejercicio 2.7

### Ejemplo 2.6
(10 min)

### Ejercicio 2.6
(35 min)

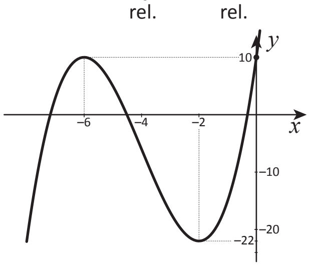
a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$= 3(x-1)(x-3)$

| $x$ | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | máx. rel. | | mín. rel. | |




b) $f'(x) = 3x^2 + 24x + 36$
$= 3(x+2)(x+6)$

| $x$ | | –6 | | –2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 10 | ↘ | –22 | ↗ |
| | | máx. rel. | | mín. rel. | |




Incisos c y d véase solución en la página 82.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

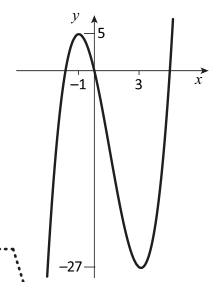
### Ejemplo 2.7
(5 min) La gráfica debe tener la tangente horizontal en (1,1).

**Clase 4. Gráfica de función de tercer grado (1)**

**Ejemplo 2.6.** Encuentre los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ y haga la gráfica.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
$= 3(x-3)(x+1) = 0$
$x = 3$ y $-1$

| $x$ | | – 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 5 | ↘ | – 27 | ↗ |
| | | Máximo relativo | | Mínimo relativo | |




**Ejercicio 2.6.** Encuentre los extremos relativos y haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
b) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 10$
c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$
d) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$

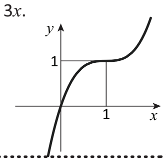
"La gráfica de $f(x)$" quiere decir la gráfica de $y = f(x)$.
Para dibujar la gráfica se necesitan los extremos relativos, si existen.
Para dibujar la gráfica hay que unir los puntos que corresponden a los extremos relativos, el intercepto en $y$ y cuando se pueda los interceptos en $x$.
De igual forma se deben hacer los trazos siguiendo el comportamiento de $f(x)$ cuando crece o decrece.

**Clase 5. Gráfica de función de tercer grado (2)**

**Ejemplo 2.7.** Haga la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

| $x$ | | 1 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 1 | ↗ |




Esta función no tiene extremos relativos.
En (1, 1) la tangente es horizontal.

Nota: $f'(a) = 0$, no siempre significa que $f(x)$ tiene su extremo relativo en $x = a$. Hay que investigar el signo del valor alrededor de $x = a$.

Hay cuatro casos:

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ |

mínimo relativo

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ |

máximo relativo

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↗ |

| $x$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | – |
| $f(x)$ | ↘ | $f(a)$ | ↘ |

No son extremos relativos



Nota (10 min)
Hay que distinguir los cuatro casos.

**Objetivo:** Encontrar los extremos de las funciones de tercer grado utilizando la tabla de variación o la gráfica.
**Evaluación:** Ejercicio 2.8

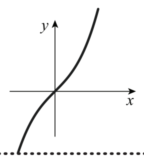
**Objetivo:** Aplicar la manera de encontrar los extremos de funciones de tercer grado al problema.
**Evaluación:** Ejercicio 2.9

# Unidad III. Lección 2.
## Clase 5 (Continuación)
## Clase 6
## Clase 7

**Ejemplo 2.8.** Haga la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$

| $x$ | |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | ↗ |




Esta función no tiene extremos relativos.

**Ejercicio 2.7.** Haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$  b) $y = -x^3$  c) $y = x^3 + x$  d) $y = -x^3 - 3x$

### Clase 6. Extremos de funciones

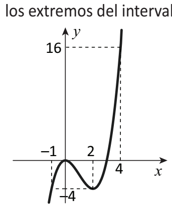
**Ejemplo 2.9.** Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1, 4]$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$,  $x = 0, 2$

| $x$ | $-1$ | | 0 | | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-4$ | ↗ | 0 | ↘ | $-4$ | ↗ | 16 |

máximo 16 ($x = 4$)
mínimo $-4$ ($x = -1, 2$)

Comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

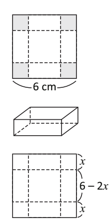



**Ejercicio 2.8.** Encuentre el máximo y el mínimo en el intervalo dado.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$,  $[-2, 2]$  b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$,  $[0, 4]$

### Clase 7. Aplicación de los extremos

**Ejemplo 2.10.** Hay una chapa de zinc de forma cuadrada cuyo lado mide 6 cm. Cortando los cuadrados del mismo tamaño de las cuatro esquinas, se hace un recipiente sin tapa de la forma paralelepípedo rectangular. Para que la capacidad sea la mayor posible, ¿cuánto deben medir los lados de los cuadrados que se cortan?



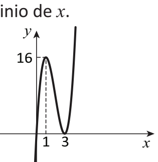

**Solución:** Sea $x$ cm la medida de los lados de los cuadrados, $x$ debe pertenecer al intervalo $(0, 3)$. Sea $y$ cm³ la capacidad del recipiente elaborado.
La base del recipiente tiene la forma de cuadrado cuyo lado mide: $(6 - 2x)$ cm. La altura mide $x$ cm, por lo tanto: $y = (6 - 2x)^2 x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

$$y' = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x = 1, 3$$

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | – | |
| $y$ | | ↗ | 16 | ↘ | |

Respuesta 1 cm.

Hay que aclarar el dominio de $x$.




**Ejercicio 2.9.** En el Ejemplo 2.10, si la chapa mide 5 cm de ancho y 8 cm de largo, ¿cuánto deben medir los lados de loa cuadrados que se cortan?

Unidad III • Lección 2 • Clase 6. Extremos de funciones • Clase 7. Aplicación de los extremos | 55

**Ejemplo 2.8**
(5 min)
Hay que distinguir esta gráfica de la del Ejemplo 2.7.

**Ejercicio 2.7**
(25 min) Solución
Veáse en página 82.

Hasta que se aprenda la concavidad de la gráfica en la Unidad IV, no se puede esperar que los estudiantes hagan las gráficas bien hechas.

[Hasta aquí Clase 5]
[Desde aquí Clase 6]

**Ejemplo 2.9**
(10 min)

**Ejercicio 2.8**
(35 min) Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

| $x$ | $-2$ | | 0 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | 4 | ↘ | 0 | ↗ | 20 |

máx. 20 ($x = 2$)  mín. 0  ($x = 0$)

b) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$
$= -3(x - 1)(x - 3)$

| $x$ | 0 | | 1 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | |
| $f(x)$ | 2 | ↘ | $-2$ | ↗ | 2 | ↘ | $-2$ |

máx. 2 ($x = 0, 3$)  mín. $-2$ ($x = 1, 4$)

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

**Ejemplo 2.10.** (20 min)
Hay que saber el dominio de la variable según la situación.

**Ejercicio 2.9.** (25 min) Solución
Veáse en página 83.

# Unidad III. Lección 2.

## Clase 8

**Objetivo:** Determinar la relación que hay entre el número de solución real de $f(x) = 0$ y el número de interceptos en $x$ de la gráfica $y = f(x)$.

**Evaluación:** Ejercicio 2.10

## Clase 9

(Continúa en la siguiente página)

**Objetivo y Evaluación:** Véase la parte de abajo izquierda

### Ejemplo 2.11
(20 min)

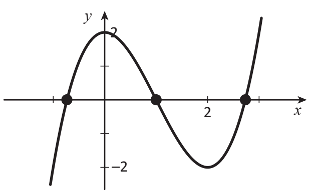
### Ejercicio 2.10
(25 min) Solución

Sea $f(x)$ el lado izquierdo de la ecuación.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x - 2)$

| $x$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 2 | ↘ | –2 | ↗ |

3 soluciones reales.




Solución a incisos b, c y d véase en página 83.

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

**Objetivo:**
Entender la relación entre el número de distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$ y el número de puntos comunes de dos gráficas. $y = f(x)$ y $y = a$.

**Evaluación:**
Ejercicio 2.11

**Clase 8. Aplicación a las ecuaciones (1)**

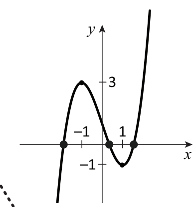
**Ejemplo 2.11.** Encuentre el número de distintas soluciones reales de la siguiente ecuación:
$x^3 - 3x + 1 = 0$

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
Para un número real $a$,
$x = a$ es una solución de $f(x) = 0$
⇔ el punto $(a, 0)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, por lo tanto:

(el número de distintas soluciones reales de $f(x) = 0$) =
(el número de distintos puntos que la gráfica de $y = f(x)$ tiene común con el eje $x$).

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1) = 0$, $x = 1, -1$

| $x$ | | – 1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 3 | ↘ | – 1 | ↗ |




Como la gráfica tiene tres puntos distintos comunes con el eje $x$, la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

**Ejercicio 2.10.** Encuentre el número de distintas soluciones reales.

a) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ c) $x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$ d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 0$

**Clase 9. Aplicación a las ecuaciones (2)**

**Ejemplo 2.12.** Sea $a$ un número real. Investigue la relación entre el valor de $a$ y el número de distintas soluciones reales de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - a = 0 \quad \dots (1)$$

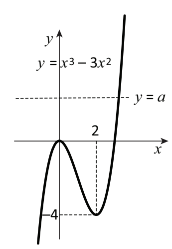
Solución: (1) es equivalente a: $x^3 - 3x^2 = a$
Las soluciones reales de (1) corresponde a los puntos comunes entre $y = x^3 - 3x^2$ y $y = a$.
Por lo tanto:
(el número de las distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$) =
(el número de los puntos comunes entre dos gráficas $y = f(x)$ y $y = a$)

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2$

$y = x^3 - 3x^2$
$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

| $x$ | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | – 4 | ↗ |

| Valores de $a$ | Número de distintas soluciones reales |
|---|---|
| $a < -4$ | 1 |
| $a = -4$ | 2 |
| $-4 < a < 0$ | 3 |
| $a = 0$ | 2 |
| $0 < a$ | 1 |






### Ejemplo 2.12. (20 min)

Se debe transformar la ecuación en la forma $f(x) = a$, donde $f(x)$ no tienen coeficientes desconocidos.

**Objetivo:** Demostrar la inecuación utilizando la gráfica.

**Evaluación:** Ejercicio 2.12

# Unidad III. Lección 2.

## Clase 9 (Continuación)

## Clase 10

## Ejercicios de la lección

**Ejercicio 2.11.** Investigue la relación entre el valor de $a$ y el número de distintas soluciones reales de la ecuación:

a) $x^3 + 6x^2 - a = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 15x - a = 0$ c) $x^3 - 9x^2 + 15x + a = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x + a = 0$

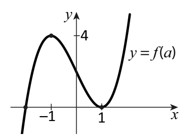
### Clase 10. Aplicación a la demostración de inecuación

**Ejemplo 2.13.** Demuestre que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 4 | ↘ | 0 | ↗ |




Se puede omitir la parte que corresponde a $(-\infty, 1)$.

De la gráfica se sabe que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

**Ejercicio 2.12.** Demuestre la inecuación en el intervalo dado.

a) $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$ b) $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$

c) $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$ d) $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$

### Ejercicios de la lección

1. Encuentre la tangente de la gráfica en el punto P. Clase 1
   a) $y = 2x^2 - 4x + 1$, P(2,1) b) $y = -2x^2 + 5x - 2$, P(−1, −9)
   c) $y = 2x^3 - 4x$, P(1, −2) d) $y = -2x^3 - 4x + 5$, P(0, 5)
2. Encuentre la tangente de la gráfica que pasa por el punto Q, fuera de la gráfica.
   a) $y = 2x^2 + x$, Q(1, −5) b) $y = -2x^2 + x$, Q(2, −4)
   c) $y = -x^2 - 2x + 1$, Q(1, 2) d) $y = x^2 + 4x - 2$, Q(3, −6)
3. Haga la gráfica teniendo los extremos relativos en cuenta. Clase 4 y 5
   a) $y = -2x^3 + 3x^2 + 36x$ b) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 50$
   c) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ d) $y = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
   e) $y = -x^3 - 2x + 1$ f) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$
4. Encuentre el máximo y el mínimo en cada intervalo indicado. Clase 6
   a) $y = x^3 - 3x$, 1) $[-2, 2]$ 2) $[-2, 1]$ 3) $[-3, 0]$
   b) $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 5$, 1) $[0, 8]$ 2) $(0,7)$ 3) $[-1, 5)$
5. Encuentre el número de distintas soluciones reales. Clase 8
   a) $2x^3 - 9x^2 - 10 = 0$ b) $x^3 - 12x - 16 = 0$
6. Investigue el número de distintas soluciones reales cuando el valor del número real $a$ varía. Clase 9
   $4x^3 - 9x^2 + 6x - 3 + a = 0$
7. Demuestre la inecuación. Clase 10
   $2x^3 + 5 \geq 3x^2 + 36x$ si $x \geq 5$



Incisos c y d véase solución en la página 83.

**Ejercicios de la lección**

Soluciones

Veáse en página 84 y 85.

**Ejercicio 2.11**

(25 min) Solución

Veáse en página 83.

[Hasta aquí Clase 9]

[Desde aquí Clase 10]

**Ejemplo 2.13**

(15 min)

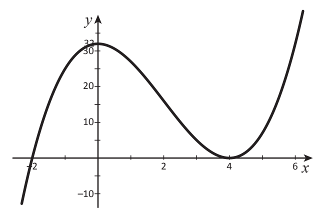
**Ejercicio 2.12**

(30 min) Solución

a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

| $x$ | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 32 | ↘ | 0 | ↗ |



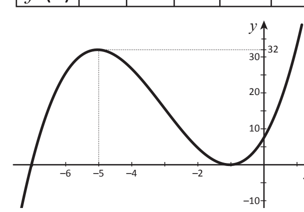

De la gráfica se sabe que $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$

b) Sea $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 7$

$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15$

$= 3(x + 1)(x + 5)$

| $x$ | | −5 | | −1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 32 | ↘ | 0 | ↗ |




De la gráfica se sabe que $x^3 + 9x^2 + 15x + 7 > 0$ en $(-1, \infty)$. Luego $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$.

## Unidad III. Lección 1. Ejercicios de la lección. Pág. 74. Solución

2. a) $f'(x) = 10x - 4$, $\quad f'(-1) = -14$

b) $g(x) = 6x^2 + 7x - 3$

$g'(x) = 12x + 7$, $\quad g'(-2) = -17$

c) $\frac{d}{dt}h(t) = gt$, $\quad \frac{d}{dt}h(1) = g$

## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.5. Pág. 77. Solución

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

| $x$ | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 0 | ↘ | –32 | ↗ |
| | | máx. rel. | | mín. rel. | |

b) $f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x + 3)$

| $x$ | | –3 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 27 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | máx. rel. | | mín. rel. | |

c) $f'(x) = -6x^2 + 18x + 24$
$= -6(x^2 - 3x - 4)$
$= -6(x - 4)(x + 1)$

| $x$ | | –1 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↘ | –13 | ↗ | 112 | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |

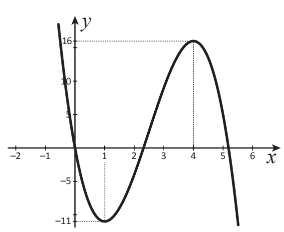
d) $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$
$= -6(x^2 - x - 2)$
$= -6(x - 2)(x + 1)$

| $x$ | | –1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↘ | –7 | ↗ | 20 | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |

## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.6. Pág. 78. Solución incisos c y d

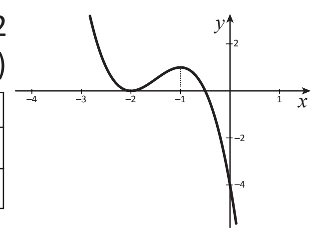
c) $f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$
$= -6(x - 1)(x - 4)$

| $x$ | | 1 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↘ | –11 | ↗ | 16 | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |




d) $f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$
$= -6(x + 1)(x + 2)$

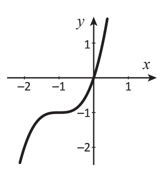
| $x$ | | –2 | | –1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |




## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.7. Pág. 79. Solución

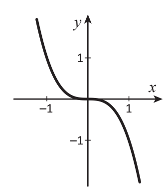
a) $y' = 3x^2 + 6x + 3$
$= 3(x + 1)^2$

| $x$ | | –1 | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + |
| $y$ | ↗ | –1 | ↗ |



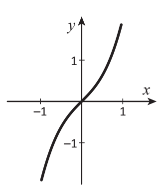
b) $y' = -3x^2$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | – | 0 | – |
| $y$ | ↘ | 0 | ↘ |



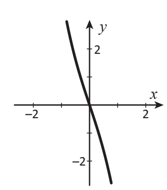
c) $y' = 3x^2 + 1$

| $x$ | |
|---|---|
| $y'$ | + |
| $y$ | ↗ |



d) $y' = -3x^2 - 3$

| $x$ | |
|---|---|
| $y'$ | – |
| $y$ | ↘ |



## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.9. Pág. 79. Solución

Sea $x$ cm la medida del lado de los cuadrados. Para hacer un recipiente se debe a que: $x > 0$, $5 - 2x > 0$ y $8 - 2x > 0$, es decir $0 < x < \frac{5}{2}$ ... (1) La capacidad $y$ cm³ es

$y = (5 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$

$y' = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x - 10)(x - 1) = 0$

$x = \frac{10}{3}, 1$

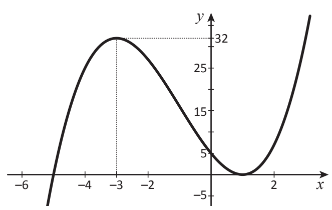
| $x$ | 0 | | 1 | | $\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | – | |
| $y$ | 0 | $\nearrow$ | 18 | $\searrow$ | 0 |

Respuesta: 1 cm

## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.10. Pág. 80. Solución incisos b, c y d

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
$= 3(x + 3)(x - 1)$

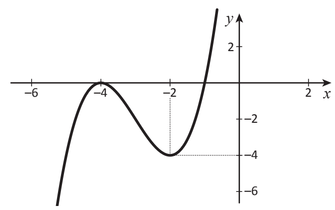
| $x$ | | –3 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 32 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |



2 distintas soluciones reales.

c) $f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$
$= 3(x + 2)(x + 4)$

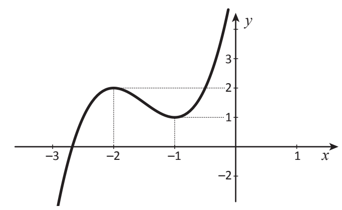
| $x$ | | –4 | | –2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | –4 | $\nearrow$ |



2 distintas soluciones reales.

d) $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$
$= 6(x + 1)(x + 2)$

| $x$ | | –2 | | –1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ |



1 solución reales.

## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.11. Pág. 81. Solución

a) Sea $f(x) = x^3 + 6x^2$
$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x + 4)$

| $x$ | | –4 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 32 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

1 sol. si $a < 0$ ó $32 < a$.
2 sol. si $a = 0$ ó 32.
3 sol. si $0 < a < 32$.

b) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$
$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x - 5)(x + 1)$

| $x$ | | –1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 8 | $\searrow$ | –100 | $\nearrow$ |

1 sol. si $a < -100$ ó $8 < a$.
2 sol. si $a = -100$ ó 8.
3 sol. si $-100 < a < 8$.

c) Sea $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$
$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x - 1)(x - 5)$

| $x$ | | 1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $f(x)$ | $\searrow$ | –7 | $\nearrow$ | 25 | $\searrow$ |

1 sol. si $a < -7$ ó $25 < a$.
2 sol. si $a = -7$ ó 25.
3 sol. si $-7 < a < 25$.

d) Sea $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x$
$f'(x) = -3x^2 - 12x - 9 = -3(x + 1)(x + 3)$

| $x$ | | –3 | | –1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | – | 0 | + | 0 | – |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ |

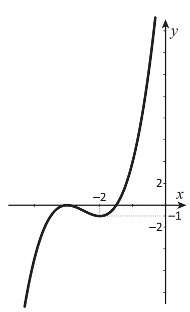
1 sol. Si $a < 0$ ó $4 < a$.
2 sol. Si $a = 0$ ó 4.
3 sol. Si $0 < a < 4$.

## Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.12. Pág. 81. Solución incisos c y d

c) Sea $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 27$
$f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 6(x + 2)(x + 3)$

| $x$ | | –3 | | –2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | –1 | $\nearrow$ |

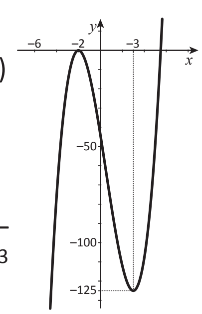
De la gráfica se sabe que $2x^3 + 15x^2 + 36x + 27 < 0$ en $(-\infty, -3)$. Luego $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$.



d) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 44$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x - 3)(x + 2)$

| $x$ | | –2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | –125 | $\nearrow$ |

De la gráfica se sabe que $2x^3 - 3x^2 - 36x - 44 < 0$ en $(-\infty, -2)$. Luego $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$.



## Unidad III. Lección 2. Ejercicios de la lección. Pág. 81. Soluciones

1. a) $y' = 4x - 4$, $y - 1 = 4(x - 2)$, $y = 4x - 7$
   b) $y' = -4x + 5$, $y + 9 = 9(x + 1)$, $y = 9x$
   c) $y' = 6x^2 - 4$, $y + 2 = 2(x - 1)$, $y = 2x - 4$
   d) $y' = -6x^2 - 4$, $y - 5 = -4x$, $y = -4x + 5$

2. Sea $a$ la coordenada $x$ del punto de tangente.

   a) $y' = 4x + 1$, la pendiente es $4a + 1$.
   La tangente es $y - (2a^2 + a) = (4a + 1)(x - a)$.
   Sustituyendo $(1, -5)$, se tiene que:
   $-5 - (2a^2 + a) = (4a + 1)(1 - a)$
   $2a^2 - 4a - 6 = 0$, $a = 3, \ -1$
   $y = 13x - 18$, $y = -3x - 2$

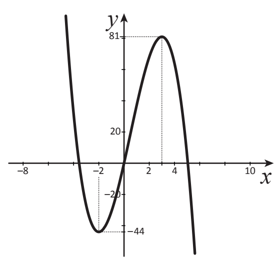
   b) $y' = -4x + 1$, la pendiente es $-4a + 1$.
   La tangente es $y - (-2a^2 + a) = (-4a + 1)(x - a)$.
   Sustituyendo $(2, -4)$, se tiene que:
   $-4 - (-2a^2 + a) = (-4a + 1)(2 - a)$
   $2a^2 - 8a + 6 = 0$, $a = 1, 3$
   $y = -3x + 2$, $y = -11x + 18$

   c) $y' = -2x - 2$, la pendiente es $-2a - 2$.
   La tangente es $y - (-a^2 - 2a + 1) = (-2a - 2)(x - a)$.
   Sustituyendo $(1, 2)$, se tiene que:
   $2 - (-a^2 - 2a + 1) = (-2a - 2)(1 - a)$
   $a^2 - 2a - 3 = 0$, $a = -1, 3$
   $y = 2$, $y = -8x + 10$

   d) $y' = 2x + 4$, la pendiente es $2a + 4$.
   La tangente es $y - (a^2 + 4a - 2) = (2a + 4)(x - a)$.
   Sustituyendo $(3, -6)$, se tiene que:
   $-6 - (a^2 + 4a - 2) = (2a + 4)(3 - a)$
   $a^2 - 6a - 16 = 0$, $a = -2, 8$
   $y = 20x - 66$, $y = -6$

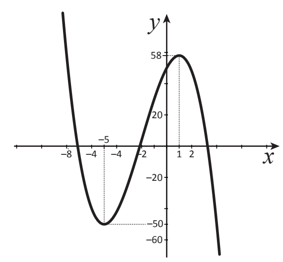
3. a) $y' = -6x^2 + 6x + 36$
   $= -6(x + 2)(x - 3)$

| $x$ | | $-2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-44$ | ↗ | $81$ | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |



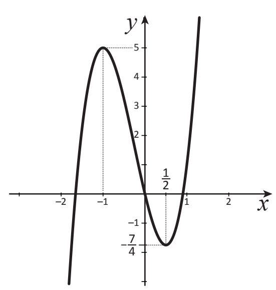
   b) $y' = -3x^2 - 12x + 15$
   $= -3(x + 5)(x - 1)$

| $x$ | | $-5$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-50$ | ↗ | $58$ | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |



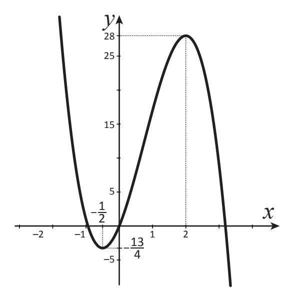
   c) $y' = 12x^2 + 6x - 6$
   $= 6(2x - 1)(x + 1)$

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-\frac{7}{4}$ | ↗ |
| | | máx. rel. | | mín. rel. | |



   d) $y' = -12x^2 + 18x + 12$
   $= -6(2x + 1)(x - 2)$

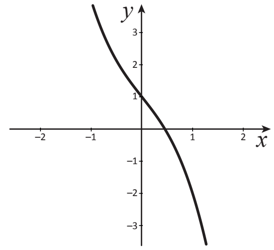
| $x$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-\frac{13}{4}$ | ↗ | $28$ | ↘ |
| | | mín. rel. | | máx. rel. | |



   e) $y' = -3x^2 - 2$

| $x$ | |
|---|---|
| $y'$ | $-$ |
| $y$ | ↘ |

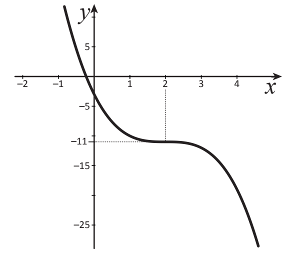
No existe extremo relativo.



   f) $y' = -3x^2 + 12x - 12$
   $= -3(x - 2)^2$

| $x$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $-11$ | ↘ |

No existe extremo relativo.



## Unidad II. Lección 2. Ejercicios de la lección. Pág. 81. Soluciones

4. a) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $-18$ | ↗ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ |

| | máx. | mín. |
|---|---|---|
| 1) $[-2, 2]$ | $2\ (x = -1, 2)$ | $-2\ (x = -2, 1)$ |
| 2) $[-2, 1]$ | $2\ (x = -1)$ | $-2\ (x = -2, 1)$ |
| 3) $[-3, 0]$ | $2\ (x = -1)$ | $-18\ (x = -3)$ |

b) $y' = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x-1)(x-5)$

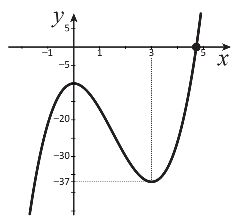
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $5$ | | $7$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y$ | $30$ | ↘ | $5$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $30$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-51$ |

| | máx. | mín. |
|---|---|---|
| 1) $[0, 8]$ | $30\ (x = 5)$ | $-51\ (x = 8)$ |
| 2) $(0, 7)$ | $30\ (x = 5)$ | $-2\ (x = 1)$ |
| 3) $[-1, 5)$ | $30\ (x = -1)$ | $-2\ (x = 1)$ |

5. a) Sea $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 10$

$f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$

| $x$ | | $0$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $-10$ | ↘ | $-37$ | ↗ |

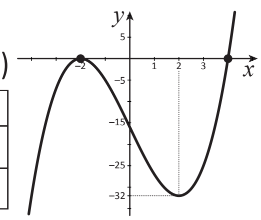


Respuesta: 1

b) Sea $f(x) = x^3 - 12x - 16$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

| $x$ | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-32$ | ↗ |



Respuesta: 2

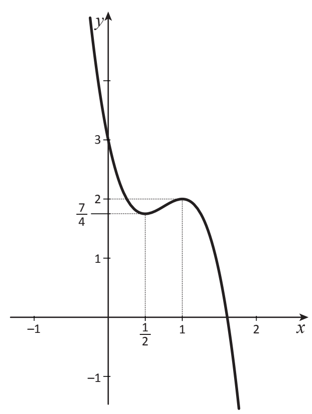
6. Sea $f(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 3$

$f'(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x-1)(x-1)$

| $x$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | ↘ | $\frac{7}{4}$ | ↗ | $2$ | ↘ |

La ecuación dada equivale a $f(x) = a$.

| Nº de sol. real. | Valor de a |
|---|---|
| 1 | $a < \frac{7}{4}$ ó $2 < a$ |
| 2 | $a = \frac{7}{4}$ ó $2$ |
| 3 | $\frac{7}{4} < a < 2$ |



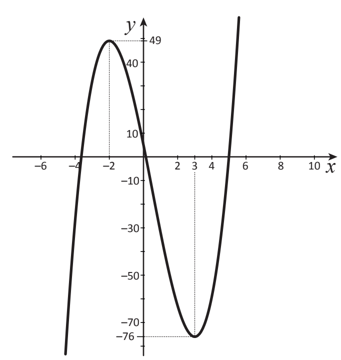
7. Sea $f(x) = (2x^3 + 5) - (3x^2 + 36x)$

$= 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$= 6(x-3)(x+2)$

| $x$ | | $-2$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $49$ | ↘ | $-76$ | ↗ | $0$ |



De la gráfica se sabe que $f(x) \geq 0$ si $x \geq 5$.

Luego $2x^2 + 5 \geq 3x^2 + 36x$ si $x \geq 5$.

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 1

**Objetivo:** Definir función primitiva y la integral indefinida.

**Evaluación:** Ejercicio 3.1

**Función primitiva e Integral indefinida**
(20 min)

Algunos autores llaman integral indefinida de $f(x)$ el conjunto de funciones primitivas.
En este libro integral indefinida de $f(x)$ significa alguna de las funciones primitivas de $f(x)$, es decir no es un conjunto sino una función.

**Función primitiva de potencia de $x$**
(5 min)

**Ejercicio 3.1**
(20 min) Solución
C sea constante de integración.

a) $x$ + C

b) $\frac{1}{2}x^2$ (ó $\frac{x^2}{2}$) + C

c) $\frac{1}{3}x^3$ (ó $\frac{x^3}{3}$) + C

d) $\frac{1}{4}x^4$ (ó $\frac{x^4}{4}$) + C

**Lección 3. Integrales**

**Clase 1. Integral indefinida**

La Figura 3.1 muestra el conjunto de las funciones cuya derivada es $2x$.

Todas las funciones tienen la forma:
$x^2 + C$;  $C$: constante

(Demostración: sea $F'(x) = 2x$.
Entonces $\{F(x) - 2x\}' = 0$.
De la nota en Clase 1.3, se sabe que $F(x) - x^2 = C$)

$\vdots$
$x^2 - 2$
$x^2 - 1$
$x^2$
$x^2 + 1$
$x^2 + \frac{3}{2}$
$x^2 + \pi$
$\vdots$

$\xrightarrow{\text{Diferenciar}} 2x$

Figura 3.1

A la función $x^2 + C$ se le denomina **función primitiva** de $2x$ y se denota mediante $\int 2x\,dx$, es decir:
$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Generalmente si $F'(x) = f(x)$, se le llama a $F(x)$ función primitiva de $f(x)$.
A una función $f(x)$ corresponde varias funciones y todas tienen la forma:
$F(x) + C$  ($C$: constante).

Para representar la función primitiva de $f(x)$ en general se utiliza la notación $\int f(x)\,dx$.

En resumen:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

**Función primitiva** de potencia de $x$
$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Demostración: $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^{(n+1)-1} = x^n$

**Ejercicios 3.1.** Calcule.

a) $\int dx$  b) $\int x\,dx$  c) $\int x^2\,dx$  d) $\int x^3\,dx$

Se llama también antiderivada.
Encontrar la función primitiva es lo que se dice **integrar.**
A la constante $C$ se le denomina **constante de integración**.

A $\int f(x)\,dx$ se le llama **integral indefinida**.
A $f(x)$ se le denomina integrando.

En a) en lugar de $\int 1dx$ se escribe $\int dx$.

58 | Unidad III • Lección 3 • Clase 1. Integral definida

**Objetivo:** Encontrar funciones primitivas de funciones polinómicas.

**Evaluación:** Ejercicio 3.2 y 3.3

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 2

### Clase 2. Propiedad de la integral indefinida

**Propiedad de integral indefinida**
$\int 0dx = C$
$\int k\,f(x)dx = k \int f(x)dx$     $k$: constante
$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
$\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

**Demostración:** Al derivar ambos lados utilizando la propiedad de derivada (Clase 1.3) se obtiene las mismas funciones.

En la igualdad que contiene integral indefinida, se entiende que ambos lados coinciden cuando se toman valores de constante de integral adecuadamente.

No es necesario utilizar diferentes constantes para cada integral indefinida. Basta una.

**Ejemplo 3.1.** Calcule: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$.
Solución: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$
$= \int x^2\ dx - 3\int x\ dx + 4 \int dx$
$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$     ($C$: constante de integración)

**Ejercicio 3.2.** Calcule.
a) $\int (x^2 - 5x + 3)dx$     b) $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$
c) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)dx$     d) $\int (-6x^2 + 8x - 5)dx$

**Ejemplo 3.2.** Calcule: $\int (x + 2)(2x - 1)dx$.
Solución: $\int (x + 2)(2x - 1)dx = \int (2x^2 + 3x - 2)dx$
$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$     ($C$: constante de integración)

Primero desarrolle el integrando.

**Ejercicio 3.3.** Calcule.
a) $\int (x - 3)(2x + 1)dx$     b) $\int (3x + 1)(3x - 1)dx$
c) $\int (2x + 3)(3x - 1)dx$     d) $\int (3x - 2)(3x + 4)dx$

**Ejemplo 3.3.** Calcule: $\int xt\ dt$.
Solución: $\int xt\ dt = x \int t\ dt = x\left(\frac{1}{2}t^2 + C\right)$
$= \frac{1}{2}x\,t^2 + C'$     ($C'$: Constante de integración)

Nota: Como $xC$ es un constante, es mejor utilizar signo más sencillo: $C'$.

$dt$ significa integrar con respecto a la variable $t$. Se considera constante la variable $x$.

**Ejercicio 3.4.** Calcule.
a) $\int 3t^2\ dt$     b) $\int gt\ dt$     c) $\int 4\pi r^2\ dr$     d) $\int xy^2 z\ dy$

*** Ejemplo 3.4.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:
$F'(x) = 4x - 5$,     $F(1) = 2$.
Solución: $F(x) = \int (4x - 5)dx = 2x^2 - 5x + C$
Sustituyendo $x = 1$ en ambos lados, se tiene que: $2 = C - 3$, $C = 5$.
Luego $F(x) = 2x^2 - 5x + 5$     (Respuesta)

*** Ejercicio 3.5.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:
a) $F'(x) = 2x + 1$     $F(0) = 3$     b) $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1$     $F(1) = -2$

Unidad III • Lección 3 • Clase 2. Propiedad de la integral indefinida | 59

**Propiedad de la integral indefinida.** (10 min)

Esta propiedad corresponde a la de derivación.

La nota acerca de la igualdad entre integrales indefinidas es importante.

**Ejemplo 3.1**
(5 min)
No es necesario desarrollar así:
$\int x^2dx - 3\int xdx + 4\int dx$
$= (\frac{1}{3}x^3 + C_1) - 3(\frac{1}{2}x^2 + C_2)$
$+ 4(x + C_3)$.
Basta usar una constante C.

**Ejercicio 3.2**
(7 min) Solución:
a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C$
b) $x^3 - 2x^2 - x + C$
c) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x + C$
d) $-2x^3 + 4x^2 - 5x + C$
(C: constante de integración)

**Ejemplo 3.2**
(5 min)

**Ejercicio 3.3**
(8 min) Solución:
a) $\int (2x^2 - 5x - 3)dx$
$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$
b) $\int (9x^2 - 1)dx$
$= 3x^3 - x + C$
c) $\int (6x^2 + 7x - 3)dx$
$= 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$
d) $\int (9x^2 + 6x - 8)dx$
$= 3x^3 + 3x^2 - 8x + C$
(C: constante de integración)

**Ejemplo 3.3**. (4 min )

**Ejercicio 3.4.** (6 min) Solución:
a) $t^3$ + C     b) $\frac{1}{2}gt^2$ + C
c) $\frac{4}{3}\pi r^3$ + C     d) $\frac{1}{3}xy^3z$ + C
(C: constante de integración)

***Ejemplo 3.4**
Se trata de determinar la constante de integración por la condición $F(1) = 2$.

*** Ejercicio 3.5.** Solución
a) $F(x) = x^2 + x + 3$   b) $F(x) = x^3 - x^2 + x - 3$

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 3

**Objetivo:** Definir la integral definida.

**Evaluación:** Ejercicio 3.6 y 3.7

**Definición de la integral definida**
(10 min)
Entre $a$ y $b$ no hay relaciones. Puede ser $b \leq a$.

**Ejemplo 3.5**
(4 min)

**Ejercicio 3.6**
(8 min) Solución

a) $[x^2]_1^3 = 8$

b) $[x^4]_0^1 = 1$

c) $[x]_2^5 = 3$

d) $[2x^2]_1^{-2} = 6$

**Propiedad de la integral definida I**
(10 min)

**Ejemplo 3.6**
(5 min)
Para facilitar el cálculo, es mejor escribir los coeficientes antes de los corchetes.

### Clase 3. Integral definida

Sea $F'(x) = f(x)$. Sean $a$ y $b$ dos números.
Al valor $F(b) - F(a)$ se le denomina **integral definida** de $f(x)$ y se denota mediante $\int_a^b f(x)\,dx$.
Al mismo tiempo se representa la diferencia $F(b) - F(a)$ por $[F(x)]_a^b$.
Si $G(x)$ es otra función primitiva de $f(x)$, entonces existe una constante $C$ tal que $G(x) = F(x) + C$.
Por lo tanto:

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

y este valor no depende de la selección de la función primitiva.
En resumen se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{donde} \quad F'(x) = f(x)$$

Se supone que el dominio de $f(x)$ contiene el intervalo $[a, b]$ o $[b, a]$.

A la constante $b$ se le denomina límite superior y la constate $a$ límite inferior.

El límite superior no necesariamente mayor que el límite inferior.

**Ejemplo 3.5.** Calcule: $\int_1^2 3x^2\,dx$.

Solución: $\int_1^2 3x^2\,dx = [x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

**Ejercicio 3.6.** Calcule.

a) $\int_1^3 2x\,dx$ b) $\int_0^1 4x^3\,dx$ c) $\int_2^5 dx$ d) $\int_1^{-2} 4x\,dx$

**Propiedades de la integral definida 1**

a) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Demostración: Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$,
Entonces $kF(x)$, $F(x) + G(x)$ y $F(x) - G(x)$ son funciones primitivas de $kf(x)$, $f(x) + g(x)$ y $f(x) - g(x)$, respectivamente (Clase 1.3)
La conclusión sale de este hecho y la definición de la integral definida.

a) Por ejemplo
$\int_a^b kf(x)\,dx = [kF(x)]_a^b$
$= kF(b) - kF(a)$
$= k\{F(b) - F(a)\}$
$= k[F(x)]_a^b$
$= k\int_a^b f(x)\,dx$

**Ejemplo 3.6.** Calcule $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx$.

Solución: $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx = 2\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x\,dx + 6\int_1^3 dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{4}[x^4]_1^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}[x^2]_1^3 + 6[x]_1^3$

$= \frac{1}{2}(3^4 - 1^4) - 2[3^2 - 1^2] + 6(3 - 1) = 40 - 16 + 12 = 36$

Aplicando la propiedad se calcula por termino.

Es mejor poner coeficientes fuera de corchetes.

**Ejercicio 3.7.** Calcule.

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$ b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

c) $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x - 2)\,dx$ d) $\int_{-2}^0 (-4x^2 - 3x - 2)\,dx$



**Ejercicio 3.7.** (8 min) Solución

a) $[x^3]_1^2 - [x^2]_1^2 + [x]_1^2 = 5$

b) $\frac{1}{3}[x^3]_0^3 + 2[x^2]_0^3 - [x]_0^3 = 24$

c) $\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 - 3[x^2]_{-1}^2 - 2[x]_{-1}^2 = -12$

d) $-\frac{4}{3}[x^3]_{-2}^0 - \frac{3}{2}[x^2]_{-2}^0 - 2[x]_{-2}^0 = -\frac{26}{3}$

**Objetivo:** Aplicar la propiedad de integral definida acerca de sus límites.

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 4

**Evaluación:** Ejercicio 3.8, 3.10

### Clase 4. Propiedad de integral definida

**Propiedades de la integral definida 2**

d) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

En f) los integrandos deben ser iguales.
En f) $b$ no está necesariamente entre $a$ y $c$.

Demostración: Sea que $F'(x) = f(x)$.

d) $\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\}$

$= -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c$

$= \{F(b) - F(a)\} + \{F(c) - F(b)\} = F(c) - F(a) = [F(x)]_a^c = \int_a^c f(x)\,dx$

**Ejemplo 3.7.** Calcule: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

Aplique propiedad f).

Solución: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

$= \int_1^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 - [x^2]_1^4 - [x]_1^4$

$= \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) - (4^2 - 1^2) - (4 - 1) = 21 - 15 - 3 = 3$

**Ejercicio 3.8.** Calcule.

a) $\int_0^2 (-x^2 + 4x + 2)\,dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x + 2)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx$

**Ejercicio 3.9.** Demuestre.

Aplique e); luego f).

a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$

**Ejercicio 3.10.** Calcule.

a) $\int_2^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx - \int_1^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

b) $\int_{-1}^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx - \int_{-1}^0 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

Unidad III • Lección 3 • Clase 4. Propiedad de integral definida | 61

### Propiedad de la integral definida 2
(10 min)

Si no hay tiempo, se puede omitir estos cálculos.

### Ejemplo 3.7
(8 min)

### Ejercicio 3.8
(9 min) Solución:

a) $\int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)\,dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_0^3 + 2[x^2]_0^3 + 2[x]_0^3$

$= 15$

b) $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx$

$= \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 - [x^2]_{-1}^2 + 2[x]_{-1}^2$

$= 6$

### Ejercicio 3.9
(10 min)

a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ por e)

$= \int_a^c f(x)\,dx$ por f)

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$ por e)

$= \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

$= \int_c^b f(x)\,dx$ por f)

### Ejercicio 3.10. (8 min) Aplicando Ejercicio 3.8

a) $\int_2^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = [x^3]_2^1 - [x^2]_2^1 + [x]_2^1 = -5$

b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^3 + 2[x^2]_0^3 - [x]_0^3 = 24$

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 5

**Objetivo:** Establecer la relación entre integral definida y derivación.

**Evaluación:** Ejercicio 3.11

**Relación entre integral definida y derivación.**
(10 min)

**Ejemplo 3.8**
(3 min)

**Ejercicio 3.11**
(5 min) Solución
a) $x^2 + 3x + 3$
b) $x^2 + x - 3$
c) $s + 3$
d) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 - t)\, dt$
$= \frac{d}{dx}\left\{-\int_x^1 (t^2 - t)\, dt\right\}$
por Clase 4 e)
$= -\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 - t)\, dt$
por Clase 1.3 b)
$= -(x^2 - x)$
$= -x^2 + x$

**Ejemplo 3.9**
(10 min)
Se puede omitir el Ejemplo 3.9 y Ejercicio 3.12, si no hay tiempo.

**Ejercicio 3.12**
(17 min) Solución
a) $f(x) = 2x - 3$
$a^2 - 3a + 2 = 0$
$a = 1, 2$
b) $f(x) = -2x + 2$
$-a^2 + 2a + 3 = 0$
$a = 3, -1$

### Clase 5. Integral definida y derivación

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $F'(t) = f(t)$.

Por lo tanto, para un número real $a$,
$$\int_a^x f(t)\, dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$
es una función de $x$.

Derivando ambos lados con respecto a $x$, se tiene que
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = \{F(x) - F(a)\}' = F'(x) = f(x).$$

$F'(x)$ es una derivada con respecto a $x$.
$F'(t)$ es una derivada con respecto a $t$.

Relación entre integral definida y derivación
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Se le denomina a este resultado Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, pero con diferente definición de la integral definida.

**Ejemplo 3.8.** Calcule: $\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1)\, dt$.

Solución: $\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1)\, dt = 3x^2 - 2x + 1$

**Ejercicio 3.11.** Calcule.

a) $\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 + 3t + 3)\, dt$ b) $\frac{d}{dx}\int_{-2}^x (t^2 + t - 3)\, dt$

c) $\frac{d}{ds}\int_1^s (x + 3)\, dt$ d) $\frac{d}{dx}\int_x^1 (t^2 - t)\, dt$

En d) aplique Clase 4 e).

**Ejemplo 3.9.** Encuentre la función $f(x)$ y el número real $a$, que satisfacen:
$$\int_a^x f(t)\, dt = x^2 + 3x - 4.$$
Solución: Derivando ambos lados con respecto a $x$,
se tiene que $f(x) = 2x + 3$.

Sustituyendo $x = a$ en ambos lados, se tiene que:
$0 = a^2 + 3a - 4,\quad (a + 4)(a - 1) = 0,\quad a = -4, 1$
Respuesta: $f(x) = 2x + 3$, $a = -4, 1$

$\int_x^a f(t)\, dt = 0$ (Clase 4 d)

**Ejercicio 3.12.** Encuentre $f(x)$ y $a$.

a) $\int_a^x f(t)\, dt = x^2 - 3x + 2$ b) $\int_a^x f(t)\, dt = -x^2 + 2x + 3$

c) $\int_a^x f(t)\, dt = 2x^2 - 3x + 1$ d) $\int_x^a f(t)\, dt = -2x^2 + x + 6$

62 | Unidad III • Lección 3 • Clase 5. Integral definida y derivación

c) $f(x) = 4x - 3$
$2a^2 - 3a + 1 = 0 \qquad a = 1, \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 4x - 1$
$-2a^2 + a + 6 = 0 \qquad a = -\frac{3}{2}, 2$

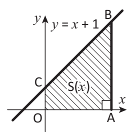
**Objetivo:** Representar área aplicando la integral definida.

**Evaluación:** Reproducir la fórmula del área.

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 6

### Clase 6. Integral definida y área

**Ejemplo 3.10.** En la figura, la ecuación de la recta BC es $y = x + 1$. Sea $(x, 0)$ las coordenadas del punto A donde $x > 0$.




a) Exprese AB con $x$.
b) Sea $S(x)$ área del trapecio OABC. Exprese $S(x)$ con $x$.
c) Encuentre $S'(x)$.

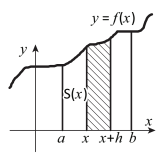
Solución: a) AB = (la coordenada $y$ del punto B) = $x + 1$

b) $S(x) = \frac{1}{2}\,(0C + AB) \cdot 0A = \frac{1}{2}\,\{1 + (x + 1)\}x = \frac{1}{2}\,x^2 + x$

c) $S'(x) = x + 1$

En este ejemplo $S'(x)$ = (la ecuación de la gráfica).
Esta relación se verifica con cualquier función continua como la siguiente:

Sea $a$ y $b$ dos números reales tal que $a < b$.
Sea $f(x)$ una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea $S(x)$ el área de la parte delimitada por $y = f(x)$, el eje $x$ y las rectas paralelas al eje $y$ y que pasan por $(a, 0)$ y $(x, 0)$ donde $a < x < b$.




Sea $h$ un número positivo tal que $x + h < b$.
Sea $M_h$ el máximo y $m_h$ el mínimo de $f(x)$ en $[x, x + h]$. Entonces el área de la parte sombreada, se tiene que:

$$h \cdot m_h \leq S(x + h) - S(x) \leq h \cdot M_h.$$

Como $h > 0$, se tiene que: $m_h \leq \dfrac{S(x + h) - S(x)}{h} \leq M_h$.

Como $\lim\limits_{h\to 0^+} M_h = \lim\limits_{h\to 0^+} m_h = f(x)$, se tiene que: $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{S(x + h) - S(x)}{h} = f(x)$.

De la misma manera se verifica $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{S(x + h) - S(x)}{h} = f(x)$.

Luego $S'(x) = f(x)$.

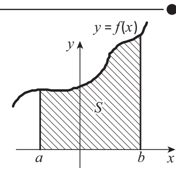
Por lo tanto, se tiene que $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$.

Como $\lim\limits_{x\to a^+} S(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = 0$, se tiene que $C = 0$.
Sea $S$ el área de la parte rodeada por $y = f(x)$, el eje $x$, las rectas $x = a$ y $x = b$.

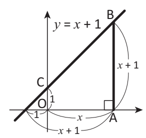
Como $\lim\limits_{x\to b^-} S(x) = S$ y $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)$, se tiene lo siguiente:

Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área $S$ de la parte sombreada es:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$






La función $\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable, por lo tanto, continua (Clase 1.2).
Luego, $\lim\limits_{x\to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Es esencial que la parte sombreada este por encima del eje $x$.

**Ejemplo 3.10**
(10 min)

**Derivada del área**
(25 min)

**Fórmula del área**
(10 min)

# Unidad III. Lección 3.

## Clase 7

**Objetivo:** Encontrar el área de la figura que está por encima del eje $x$.

**Evaluación:** Ejercicio 3.13

## Clase 8

**Objetivo:** Encontrar el área comprendida entre dos gráficas.

**Evaluación:** Ejercicio 3.14

### Ejemplo 3.11
(10min)
Lo importante es que la parte sombreada está por encima del eje $x$.

### Ejercicio 3.13
(35 min) Solución

a) $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3 + \left[x\right]_0^3 = 12$

b) $\int_{-1}^2 (-x^2+5)\,dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^2 + 5\left[x\right]_{-1}^2$

$= 12$

c) $\int_0^1 (x^3+2x^2)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{11}{12}$

d) $\int_1^2 (-x^3+2x^2+3x)\,dx$

$= -\frac{1}{4}\left[x^4\right]_1^2 + \frac{2}{3}\left[x^3\right]_1^2$

$+ \frac{3}{2}\left[x^2\right]_1^2$

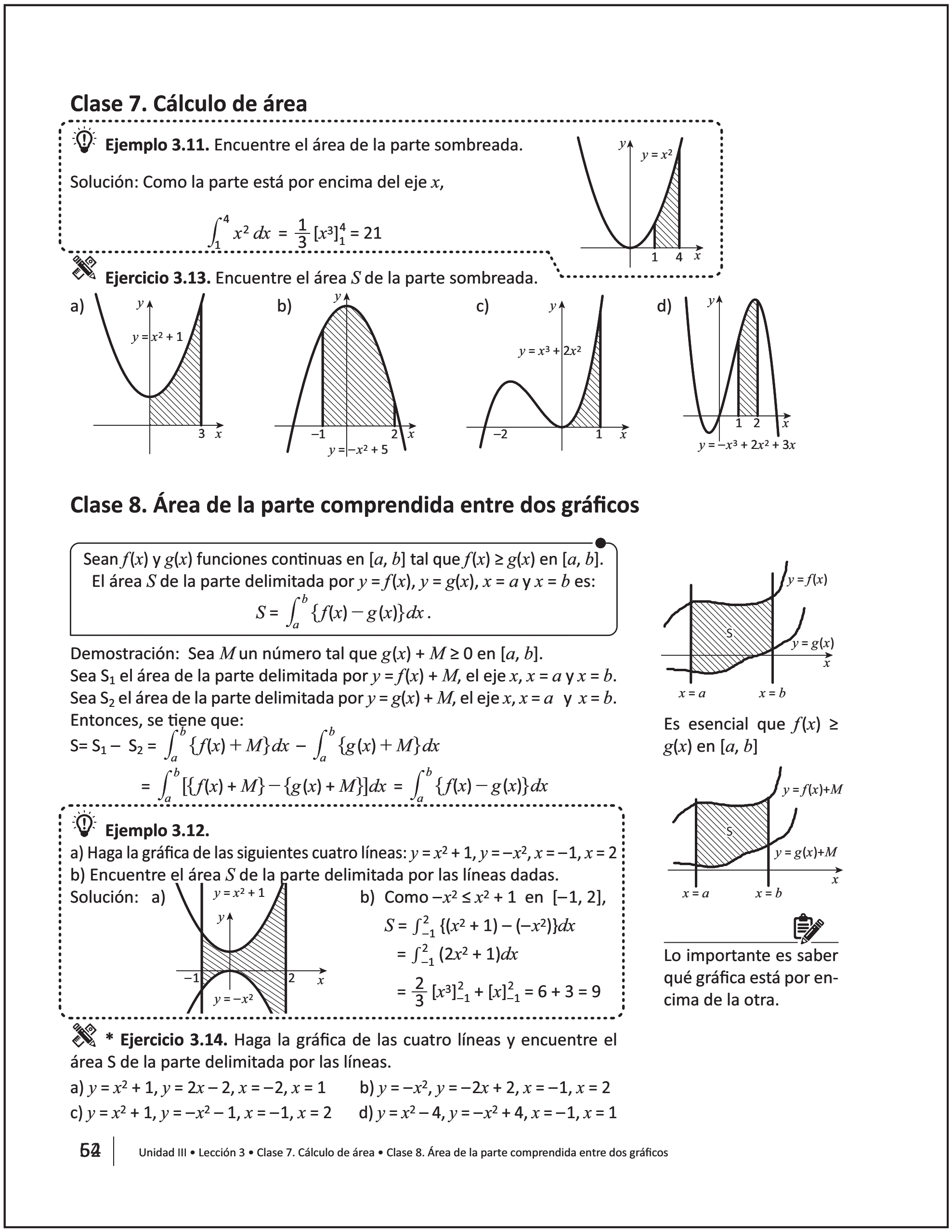
$= \frac{65}{12}$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

**Fórmula del área entre dos gráficos** (25 min)
El punto es subir las gráficas para poder aplicar la fórmula de la clase 6.

### Ejemplo 3.12
(20 min)
Para saber qué gráfica está por encima de la otra, hay que dibujar el esquema.



**Clase 7. Cálculo de área**

**Ejemplo 3.11.** Encuentre el área de la parte sombreada.

Solución: Como la parte está por encima del eje $x$,

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 = 21$$

**Ejercicio 3.13.** Encuentre el área $S$ de la parte sombreada.

a) $y = x^2 + 1$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = x^3 + 2x^2$ d) $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$

**Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$.
El área $S$ de la parte delimitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ es:

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx.$$

Demostración: Sea $M$ un número tal que $g(x) + M \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea $S_1$ el área de la parte delimitada por $y = f(x) + M$, el eje $x$, $x = a$ y $x = b$.
Sea $S_2$ el área de la parte delimitada por $y = g(x) + M$, el eje $x$, $x = a$ y $x = b$.
Entonces, se tiene que:

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b \{f(x) + M\}dx - \int_a^b \{g(x) + M\}dx$$
$$= \int_a^b [\{f(x) + M\} - \{g(x) + M\}]dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

Es esencial que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$

**Ejemplo 3.12.**
a) Haga la gráfica de las siguientes cuatro líneas: $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$
b) Encuentre el área $S$ de la parte delimitada por las líneas dadas.
Solución: a)
b) Como $-x^2 \leq x^2 + 1$ en $[-1, 2]$,

$$S = \int_{-1}^2 \{(x^2+1) - (-x^2)\}dx$$
$$= \int_{-1}^2 (2x^2+1)dx$$
$$= \frac{2}{3}[x^3]_{-1}^2 + [x]_{-1}^2 = 6 + 3 = 9$$

Lo importante es saber qué gráfica está por encima de la otra.

*** Ejercicio 3.14.** Haga la gráfica de las cuatro líneas y encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$, $x = -2$, $x = 1$ b) $y = -x^2$, $y = -2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$
c) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 2$ d) $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 + 4$, $x = -1$, $x = 1$

52 | Unidad III • Lección 3 • Clase 7. Cálculo de área • Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos

### *Ejercicio 3.14
Solucion. Véase la página 96.

**Objetivo:** Encontrar el área delimitada por dos gráficas.

**Evaluación:** Ejercicio 3.15

# Unidad III. Lección 3.
## Clase 9

### Clase 9. Área de la parte delimitada por dos líneas

**Ejemplo 3.13.** Encuentre el área $S$ de la parte delimitada por dos líneas $y = 2x^2$ y $y = 2x + 4$.

Solución: Las coordenadas $x$ de los puntos comunes de ambas líneas son las soluciones de la ecuación $2x^2 = 2x + 4$;

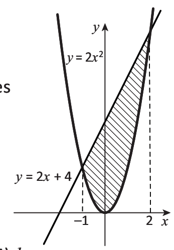
$2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$, $x = 2, -1$

Como $2x^2 \leq 2x + 4$ en $[-1, 2]$.

$$S = \int_{-1}^{2} \{(2x + 4) - 2x^2\}dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$$

$$= -\frac{2}{3}[x^3]_{-1}^{2} + [x^2]_{-1}^{2} + 4[x]_{-1}^{2} = -6 + 3 + 12 = 9$$




Primero haga la gráfica.

La parte en cuestión está delimitada por $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$, $x = -1$ y $x = 2$. Por lo tanto, se aplica la fórmula de Clase 8.

**Ejercicio 3.15.** Encuentre el área $S$ de la parte delimitada por las dos líneas.

a) $y = 2x^2 - 4$, $y = -2x$ b) $y = x^2 - 9$, $y = 0$

c) $y = -x^2 + 4$, $y = -2x - 4$ d) $y = -x^2$, $y = x - 6$

*** Ejemplo 3.14.** Encuentre el área $S$ de la parte delimitada por $y = x^3 - 3x$ y $y = x$.

Solución: Las coordenadas $x$ de los puntos comunes de las líneas:

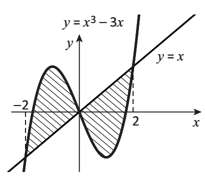
$x^3 - 3x = x$, $x^3 - 4x = 0$.

$x(x + 2)(x - 2) = 0$,

$x = -2, 0, 2$

En $[-2, 0]$ $x \leq x^3 - 3x$

En $[0, 2]$ $x^3 - 3x \leq x$




$$S = \int_{-2}^{0} \{(x^3 - 3x) - x\}\, dx + \int_{0}^{2} \{x - (x^3 - 3x)\}dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3)dx$$

$$= \frac{1}{4}[x^4]_{-2}^{0} - 2[x^2]_{-2}^{0} + 2[x^2]_{0}^{2} - \frac{1}{4}[x^4]_{0}^{2}$$

$$= -4 + 8 + 8 - 4 = 8$$

Lo importante es la relación entre las dos gráficas.

*** Ejercicio 3.16.** Encuentre el área $S$ de la parte delimitada.

a) $y = x^3 + 6x^2$, $y = 7x$ b) $y = x^3 - 6x^2$, $y = 0$

Unidad III • Lección 3 • Clase 9. Área de la parte cerrada por dos líneas | 63

**Ejemplo 3.13**
(10 min)

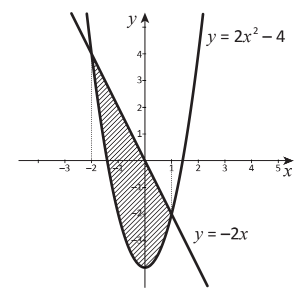
**Ejercicio 3.15**
(35 min) Solución

a) $S = \int_{-2}^{1}\{-2x-(2x^2-4)\}dx$

$= \int_{-2}^{1}(-2x^2 - 2x + 4)dx$

$= -\frac{2}{3}[x^3]_{-2}^{1} - [x^2]_{-2}^{1} + 4[x]_{-2}^{1}$

$= 9$

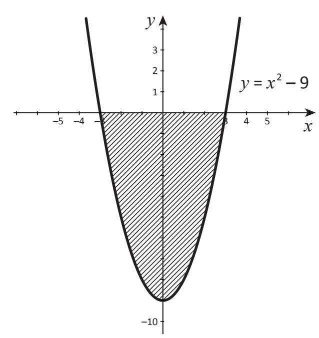



b) $S = \int_{-3}^{3}\{0 - (x^2 - 9)\}dx$

$= \int_{-3}^{3}(-x^2 + 9)dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-3}^{3} + 9[x]_{-3}^{3}$

$= 36$




Incisos c y d véase página 96.

*** Ejercicio 3.16**
Solucion. Véase la página 97.

*** Ejemplo 3.14**

# Unidad III. Lección 3.
## Ejercicios de la lección

1\. a) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + C$

b) $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + C$

c) $\int(x^3-1)dx = \frac{1}{4}x^4 - x + C$

d) $\int(3t^2 - t - 2)dt$
$= t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + C$

2\. $F(x) = \int(x^2 - x + 1)dx$
$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$
$F(-1) = -\frac{11}{6} + C = 2,$
$C = \frac{23}{6}$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{23}{6}$

3\.
a) $\int_{-2}^{1}(x^2 - 2x - 3)dx$
$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{1} - \left[x^2\right]_{-2}^{1} - 3\left[x\right]_{-2}^{1}$
$= -3$

b) $\int_{0}^{-3}(3x^2 + 2x - 1)dx$
$= \left[x^3\right]_{0}^{-3} + \left[x^2\right]_{0}^{-3} - \left[x\right]_{0}^{-3}$
$= -15$

c) $\int_{-1}^{3}(x^2 - 4)dx$
$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{3} - 4\left[x\right]_{-1}^{3}$
$= -\frac{20}{3}$

**Ejercicios de la lección**

1. Calcule. Sea $C$ el constante de integración. Clase 2
   a) $\int (x^2 - 4x + 5)dx$
   b) $\int (-2x^3 + 5x + 4)dx$
   c) $\int (x - 1)(x^2 + x + 1)dx$
   d) $\int (3t + 2)(t - 1)dt$

2. Encuentre la función $F(x)$ que satisface: Clase 2
   $F'(x) = x^2 - x + 1, \quad F(-1) = 2.$

3. Calcule. Clase 3
   a) $\int_{-2}^{1}(x-3)(x+1)\,dx$
   b) $\int_{0}^{-3}(3x-1)(x+1)\,dx$
   c) $\int_{-1}^{3}(x-2)(x+2)\,dx$

4. Calcule. Clase 4
   a) $\int_{-1}^{3}(t-1)(t+2)\,dt - \int_{-1}^{2}(t-1)(t+2)\,dt$
   b) $\int_{3}^{2}(x^2-x)\,dx - \int_{4}^{2}(x^2-x)\,dx$

5. Encuentre $f(x)$ y constante $a$ que satisfacen: Clase 5
   a) $\int_{a}^{x} f(t)\,dt = 3x^2 + 2x - 1$
   b) $\int_{x}^{a} f(t)\,dt = x^2 - 4x + 4$

   Encuentre el área $S$ delimitada con las líneas.

6. a) $y = -x^2 + 4, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad y = 0$ Clase 7
   b) $y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$

7. a) $y = x^2 - 4x$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$ Clase 8
   b) $y = x^2 - 4$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$
   c) $y = -x^2 + 2x$, $y = -2x + 3$, $x = 0$

8. a) $y = x^2 + 2x$, $y = -x^2 - x + 2$ Clase 9
   b) $y = 2x^2$, $y = x^2 - 2x + 3$

66 | Unidad III • Lección 3 • Ejercicios de la lección

Incisos 4, 5, 6 y 7 a), b) véase solución en la página 97.

Inciso 7 c) y 8 véase solución en la página 98.

### Problemas de la Unidad A

1. Sea $n$ un número entero no negativo. Demuestre:
   a) $\int_{-a}^{a} x^{2n}dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$
   b) $\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx = 0$

2. Demuestre que $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$.

3. Haga la gráfica de $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

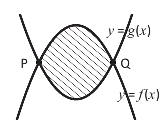
### Problemas de la Unidad B

1. Si dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen puntos comunes P($\alpha$, $f(\alpha)$) y Q($\beta$, $f(\beta)$), donde $\alpha < \beta$ y si:

$$f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{en } [\alpha, \beta],$$

entonces el área $S$ de la parte delimitada por las dos gráficas es:
$S = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$.

Demuéstrelo utilizando Problema de la Unidad A2




Con este resultado se calcula el área de la parte delimitada por parábola y la recta o por dos parábolas.

2. La recta $y = ax$ divide en dos partes de la misma área la parte delimitada por

$$y = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad y = 0.$$

Encuentre el valor de $a$.

Aplique Problema de la Unidad B 1.

3. a) Encuentre las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que satisfacen lo siguiente:

$$|x^2 - 3x| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) & \text{si } 0 < x < 3 \\ h(x) & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

b) Calcule $\int_{-2}^{4} |x^2 - 3x|\, dx$.

4. Encuentre la función $f(x)$ que satisface

$$f(x) = x + \int_0^2 f(t)\,dt$$

$\int_0^2 f(t)\,dt$ es una constante.

Unidad III • Lección 3 • Problemas de la Unidad | 67

Problemas de la Unidad A. Inciso 3 véase solución en la página 98.

Problemas de la Unidad B véase solución en la página 99.

1.

a) $\int_{-a}^{a} x^{2n}dx$

$= \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}\right]_{-a}^{a}$

$= \frac{1}{2n+1}\{a^{2n+1} - (-a)^{2n+1}\}$

$= \frac{2}{2n+1}\ a^{2n+1}$

$= \frac{2}{2n+1}\left[x^{2n+1}\right]_{0}^{a}$

$= 2\int_0^a x^{2n}\,dx$

b) $\int_{-a}^{a} x^{2n+1}dx$

$= \frac{1}{2n+2}\left[x^{2n+2}\right]_{-a}^{a}$

$= \frac{1}{2n+2}\{a^{2n+2} - (-a)^{2n+2}\}$

$= 0$

2. $\int_{a}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx$

$= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\left[x^2\right]_{\alpha}^{\beta}$
$+ \alpha\beta\left[x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$
$- \frac{(\alpha+\beta)}{2}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)$
$+ \alpha\beta(\beta-\alpha)$

$= \frac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$
$- 3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) + 6\alpha\beta\}$

$= \frac{\beta-\alpha}{6}(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)$

$= -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

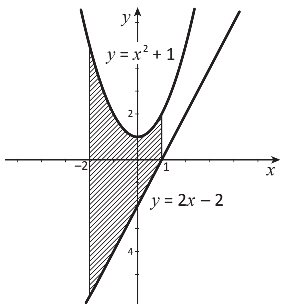
## Unidad III. Lección 3. Ejercicio 3.14. Pág. 92. Solución

a) $S = \int_{-2}^{1} \{(x^2 + 1) - (2x - 2)\}dx$

$= \int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 3\}dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{1} - \left[x^2\right]_{-2}^{1} + 3\left[x\right]_{-2}^{1}$

$= 15$

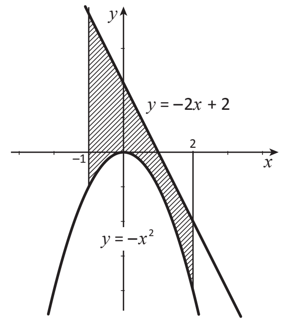



b) $S = \int_{-1}^{2} \{(-2x + 2) - (-x^2)\}dx$

$= \int_{-1}^{2} \{(x^2 - 2x + 2)dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} - \left[x^2\right]_{-1}^{2} + 2\left[x\right]_{-1}^{2}$

$= 6$

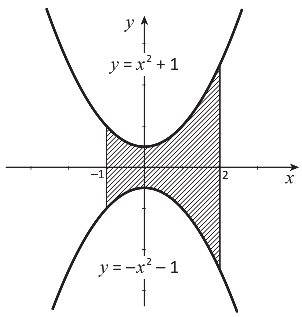



c) $S = \int_{-1}^{2} \{(x^2 + 1) - (-x^2 - 1)\}dx$

$= \int_{-1}^{2} (2x^2 + 2)dx$

$= \frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} + 2\left[x\right]_{-1}^{2}$

$= 12$

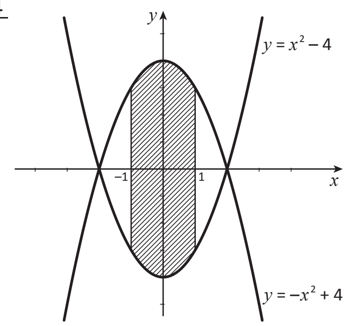



d) $S = \int_{-1}^{1} \{(-x^2 + 4) - (x^2 - 4)\}dx$

$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 8)dx$

$= -\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1} + 8\left[x\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{44}{3}$



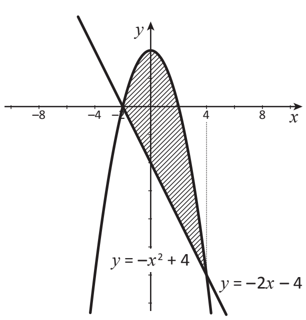

## Unidad III. Lección 3. Ejercicio 3.15. Pág. 93. Solución incisos c y d.

c) $S = \int_{-2}^{4} \{(-x^2 + 4) - (-2x - 4)\}dx$

$= \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8\}dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{4} + \left[x^2\right]_{-2}^{4} + 8\left[x\right]_{-2}^{4}$

$= 36$

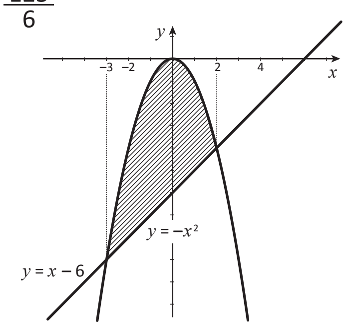



d) $S = \int_{-3}^{2} \{-x^2 - (x - 6)\}dx$

$= \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-3}^{2} - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-3}^{2} + 6\left[x\right]_{-3}^{2}$

$= \frac{125}{6}$

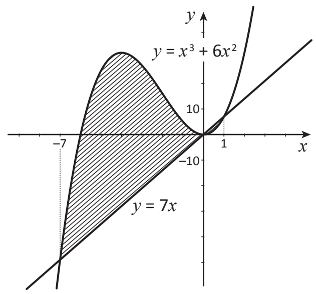


## Unidad III. Lección 3. * Ejercicio 3.16. Pág. 93. Solución

a) $S = \int_{-7}^{0} \{(x^3 + 6x^2) - 7x\}dx + \int_{0}^{1} \{(7x - (x^3 + 6x^2)\}dx$

$= \int_{-7}^{0} (x^3 + 6x^2 - 7x\}dx + \int_{0}^{1} (-x^3 - 6x^2 + 7x)dx$

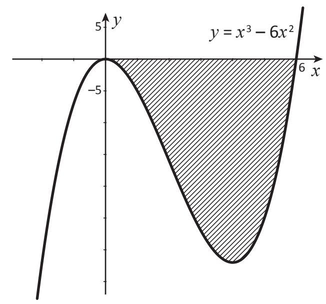
$= \dfrac{517}{2}$




b) $S = \int_{0}^{6} \{(0 - (x^3 - 6x^2)\}dx$

$= \int_{0}^{6} (-x^3 + 6x^2)dx$

$= 108$




## Unidad III. Lección 3. Ejercicios de la Lección. Pág. 94. Solución incisos 4 - 7

4\. a) $\int_{2}^{3} (t^2 + t - 2)dt = \frac{1}{3}[t^3]_2^3 + \frac{1}{2}[t^2]_2^3 - 2[t]_2^3$

$= \dfrac{41}{6}$

b) $\int_{3}^{4} (x^2 - x)dx = \frac{1}{3}[x^3]_3^4 - \frac{1}{2}[x^2]_3^4 = \dfrac{53}{6}$

5\. a) $f(x) = 6x + 2$

$3a^2 + 2a - 1 = 0, \quad a = \frac{1}{3}, -1$

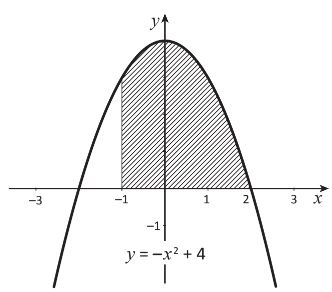
b) $f(x) = -2x + 4$

$a^2 - 4a + 4 = 0, \quad a = 2$

6\. a) $S = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{2} + 4[x]_{-1}^{2}$

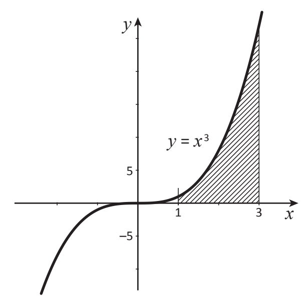
$= 9$




b) $S = \int_{1}^{3} x^3\, dx$

$= \frac{1}{4}[x^4]_1^3$

$= 20$

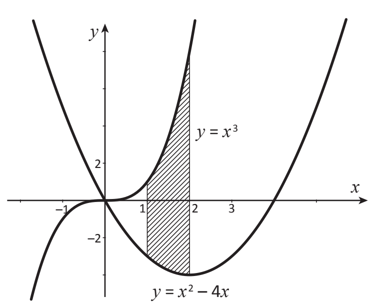



7\. a) $S = \int_{1}^{2} \{x^3 - (x^2 - 4x)\}dx$

$= \int_{1}^{2} (x^3 - x^2 + 4x)dx$

$= \frac{1}{4}[x^4]_1^2 - \frac{1}{3}[x^3]_1^2 + 2[x^2]_1^2$

$= \dfrac{89}{12}$

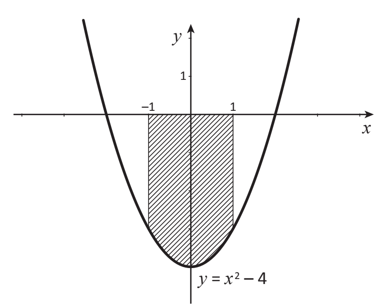



b) $S = \int_{-1}^{1} \{0 - (x^2 - 4)\}dx$

$= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 4)dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} + 4[x]_{-1}^{1}$

$= \dfrac{22}{3}$



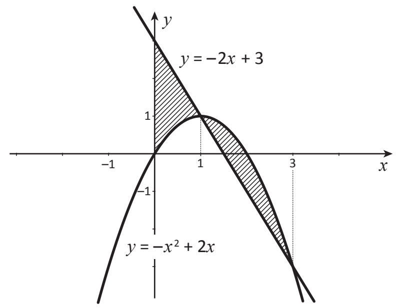
## Unidad III. Lección 3. Ejercicios de la lección. Pág. 94. Solución incisos 7c y 8

7\. c) $S = \int_0^1 \{(-2x+3) - (-x^2+2x)\}dx + \int_1^3 \{(-x^2+2x) - (-2x+3)\}dx$

$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 - 2\left[x^2\right]_0^1 + 3\left[x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^3 + 2\left[x^2\right]_1^3 - 3\left[x\right]_1^3$

$= \frac{8}{3}$

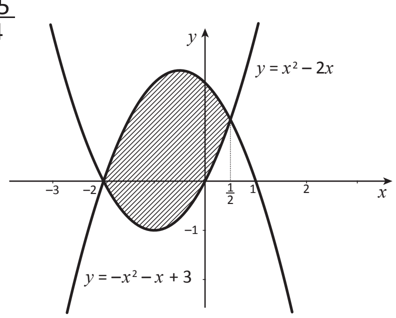



8\. a) $S = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \{(-x^2 - x + 2) - (x^2 + 2x)\}dx$

$= \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-2x^2 - 3x + 2)dx$

$= -\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{\frac{1}{2}} + 2\left[x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{125}{24}$

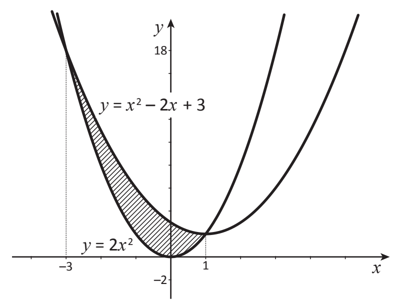



b) $S = \int_{-3}^{1} \{(x^2 - 2x + 3) - 2x^2\}dx$

$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-3}^{1} - \left[x^2\right]_{-3}^{1} + 3\left[x\right]_{-3}^{1}$

$= \frac{32}{3}$

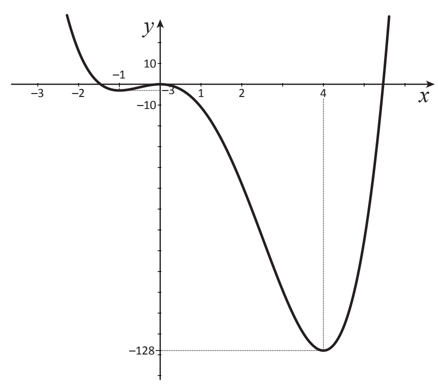



## Unidad III. Problemas de la Unidad A. Pág. 95. Solución inciso 3

3\. $y' = 4x^3 - 12x^2 - 16x$

$= 4x(x-4)(x+1)$

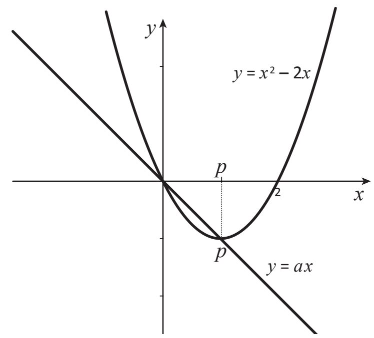
| $x$ | | −1 | | 0 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| $y$ | ↘ | −3 | ↗ | 0 | ↘ | −128 | ↗ |



## Unidad III. Problemas de la Unidad B. Pág. 95. Solución

1. Como la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene distintas soluciones $\alpha$ y $\beta$, por el teorema de factor se tiene que: $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Por lo tanto
$S = \int_\alpha^\beta (ax^2 + bx + c)\,dx = \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ Aplicando Problema A2.

2. Sea $P(p, p^2 - 2p)$ el punto de intersección de las dos líneas el otro que el origen.
El área S de la parte delimitada por $y = x^2 - 2x$
y $y = 0$ es $S = \int_0^2 \{0 - (x^2 - 2x)\}dx$
$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx$
$= -\frac{-1}{6}(2-0)^3$ por B1.
$= \frac{4}{3}$




El área $S_1$ de la parte delimitada por $y = x^2 - 2x$ y $y = ax$ es
$S_1 = \int_0^p \{ax - (x^2 - 2x)\}dx = \int_0^p \{-x^2 + (a+2)x\}dx$
$= -\frac{-1}{6}(p-0)^3 = \frac{p^3}{6}$

Como $S_1 = \frac{1}{2}S$, se tiene que $\frac{p^3}{6} = \frac{2}{3}$, $p^3 = 4$. Como $p > 0$, $p = \sqrt[3]{4}$
(Respuesta)

3. a) $x^2 - 3x = x(x-3)$, por lo tanto $x^2 - 3x \geq 0$ si $x \leq 0$ ó $3 \leq x$ y $x^2 - 3x < 0$ si $0 < x < 3$.
Luego $f(x) = h(x) = x^2 - 3x$,
$g(x) = -x^2 + 3x$

b) $\int_{-2}^4 |x^2 - 3x|\,dx = \int_{-2}^0 |x^2 - 3x|\,dx + \int_0^3 |x^2 - 3x|\,dx + \int_3^4 |x^2 - 3x|\,dx$
$= \int_{-2}^0 (x^2 - 3x)\,dx + \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)\,dx$
$= \frac{1}{3}[x^3]_{-2}^0 - \frac{3}{2}[x^2]_{-2}^0 - \frac{1}{3}[x^3]_0^3 + \frac{3}{2}[x^2]_0^3 + \frac{1}{3}[x^3]_3^4 - \frac{3}{2}[x^2]_3^4 = 15$

4. Sea $a = \int_0^2 f(t)\,dt$, que es un constante y $f(x) = x + a$.
Entonces $a = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (t + a)\,dt = \frac{1}{2}[t^2]_0^2 + a[t]_0^2 = 2a + 2$.
Luego $a = -2$, $f(x) = x - 2$ (Respuesta)

## AGRADECIMIENTO

La Secretaría de Educación, La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y La Agencia de Cooperación Internacional del Japón, AGRADECEN al personal docente y estudiantes de los centros educativos gubernamentales de Educación Media que participaron en el proceso de validación de los contenidos de los Libros y las Guías de Matemática para 10mo y 11mo grado que fueron elaborados en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática Fase III (PROMETAM FASE III).

DISTRITO CENTRAL - FRANCISCO MORAZÁN
***Instituto Héctor Pineda Ugarte***
Braulio Joel Gómez Sierra
Gustavo Adolfo Padilla Maradiaga
Allison Xiomara Chávez Ogando

***Instituto España Jesús Milla Selva***
Edna Evelyn Henríquez Rivera
Franklin Sadí Flores Osorto
Thesla Mariella Cerrato Coello

***Instituto Blanca Adriana Ponce***
Verónica Teodorlinda Acuña Sarantes
Víctor Manuel Mejía C.

***Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE–UPNFM)***
Rooy Estiven Fúnez Posadas

CHOLUTECA, CHOLUTECA
***Instituto José Cecilio del Valle***
Margarita Alvarenga Sandoval

COPÁN,
***Instituto Copán Galel - Corquín***
Rubén Arturo Álvarez Calidonio

***Instituto Bernardo Galindo y Galindo – La Entrada, Nueva Arcadia***
Walter Ananías Murillo Domínguez

SAN PEDRO SULA, CORTÉS
***Instituto José Trinidad Reyes***
Geovanni Javier Andino Sevilla
Martha Elena Perdomo Fernández

DANLÍ, EL PARAÍSO
***Instituto Departamental de Oriente***
Lilibeth Carolina López Zavala

***Escuela Normal España Villa Ahumada***
Digna Zulema Laínez Berríos

GRACIAS, LEMPIRA
***Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE – UPNFM)***
Dioselina Serrano Benítez