



República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA III

Libro del Estudiante

Undécimo grado



Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

El **Libro del Estudiante - Matemática III - del Undécimo grado de Educación Media**, es propiedad de la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras, C.A.

Presidencia de la República de Honduras
Secretaría de Estado en el Despacho de Educación
Sub Secretaría de Asuntos Técnico Pedagógicos
Sub Secretaría de Asuntos Administrativos y Financieros
Dirección General de Desarrollo Profesional

Esta obra fue elaborada y revisada en el marco del **Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM Fase III)**, que ejecutó la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación en coordinación con la **Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM)**, con el apoyo técnico de la **Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)**.

Autores - UPNFM

Luis Antonio Soto Hernández
Karla Valesca Matute Colindres

Equipo Técnico de Revisión – UPNFM – 2018

Luis Antonio Soto Hernández
Flavia María Romero Camacho

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2017

Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Carlos Antonio Mejía
José Hipólito Vásquez Rodríguez

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2018

Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Luisa Naomi Herrera Torres

Revisión Técnico Gráfico y Pedagógico 2017, 2018
Dirección General de Innovación Tecnológica y Educativa

© **Secretaría de Educación,**
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán,
Agencia de Cooperación Internacional del Japón.
1ª Calle entre 2ª y 4ª Avenida,
Comayagüela, M.D.C. Honduras, C.A.
www.se.gob.hn
Libro del Estudiante, Matemática III, Undécimo grado
Primera Edición 2017
Revisión 2018



Se prohíbe la reproducción total o parcial de este libro por cualquier medio, sin el permiso por escrito de la Secretaría de Educación de Honduras.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA – PROHIBIDA SU VENTA

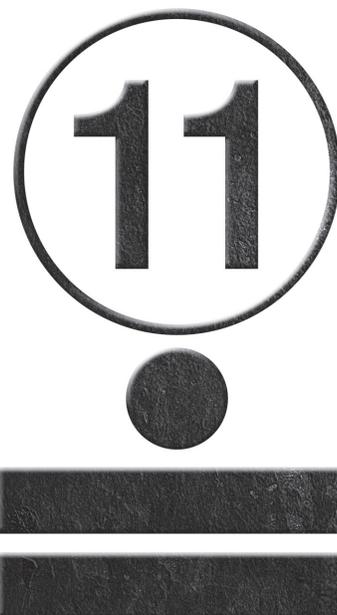


República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA III

Libro del Estudiante

Undécimo grado



Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en este Libro, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

Jóvenes de HONDURAS:

Es una gran satisfacción para la Secretaría de Educación, presentar este Libro del Estudiante que ha sido elaborado para ustedes con mucho esmero y con el propósito de que encuentren en él la oportunidad de aprender matemática.

El Libro del Estudiante que tienen en sus manos, está diseñado de manera sencilla considerando sus experiencias diarias, sus capacidades y habilidades y sobre todo haciendo énfasis en la realización de actividades que les permitan aprender y aprender a hacer, mediante la aplicación de conceptos, resolución de problemas y ejercicios.

La orientación oportuna de sus docentes, el apoyo de sus padres y fundamentalmente sus esfuerzos por aprender, son la vía para el logro del derecho universal que les asiste: Educación de Calidad. Derecho estimado como el tesoro más preciado de nuestra querida Patria.

Como autoridades educativas tenemos un gran compromiso con ustedes, asegurarles un mejor futuro y para eso estamos trabajando con mucho esfuerzo, para encaminarlos en la formación de valores, hábitos, actitudes, habilidades y conocimientos que le permitan integrarse a la vida social como personas capacitadas e independientes; que sepan ejercer su libertad con responsabilidad, para convertirse cada día en mejores ciudadanos.

Se espera que este Libro del Estudiante se convierta en una herramienta de aprendizaje de mucha utilidad en su proceso de formación.

SECRETARIA DE ESTADO
EN EL DESPACHO DE EDUCACIÓN

ORIENTACIONES SOBRE EL USO DEL LIBRO DEL ESTUDIANTE

Queridos Estudiantes:

*La Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras con mucha satisfacción le entrega este **Libro del Estudiante**, para que lo use en el aprendizaje de las Matemáticas. El mismo pertenece a su centro educativo: por lo tanto, debe apreciarlo, cuidarlo y tratarlo con mucho cariño para que pueda ser utilizado en años posteriores. Para cuidarlo le sugerimos lo siguiente:*

1. *Forre el **Libro del Estudiante** con papel y/o plástico, y sobre el forro escriba su nombre, grado, sección a la que pertenece, el nombre del docente y del centro educativo.*
2. *Evite rayar, manchar o romper las partes internas o externas del **Libro**, para que al devolverlo el mismo esté en buenas condiciones.*
3. *Todos los ejercicios propuestos en el **Libro** debe desarrollarlos en su cuaderno de Matemáticas.*
4. *Está permitido llevar a su casa el **Libro**, cuidando que otras personas que conviven con usted se lo manchen, rayen o rompan.*
5. *Recuerde llevar el **Libro** al centro educativo todos los días que tenga la clase de Matemáticas.*
6. *Antes de usar su **Libro**, por favor lávese y séquese las manos, evite las comidas y bebidas cuando trabaje en él; asimismo, limpie muy bien la mesa o el lugar donde lo utilice.*
7. *Tenga cuidado de usar su **Libro** como objeto para jugar, evite tirarlo o sentarse en él.*
8. *Al pasar las hojas o buscar el tema en el **Libro**, debe tener cuidado de no doblarles las esquinas, rasgarlas o romperlas; también cuide que no se desprendan las hojas por el mal uso.*

Recuerde que este Libro es una herramienta de apoyo para usted, por lo que debe conservarlo muy bonito, aseado y sobre todo evitar perderlo, porque no lo encontrará a la venta.

ESTIMADO DOCENTE: POR FAVOR EXPLIQUE A SUS ESTUDIANTES LA FORMA DE CUIDAR Y CONSERVAR EL LIBRO DEL ESTUDIANTE, YA QUE PERTENECE AL CENTRO EDUCATIVO.



Índice

| | |
|---|----|
| Unidad I: Geometría elemental | |
| Lección 1: Congruencia de triángulos | 2 |
| Lección 2: Semejanza de triángulos | 19 |
| Unidad II: Límite y continuidad | |
| Lección 1: Límite de funciones | 26 |
| Lección 2: Continuidad de funciones | 39 |
| Lección 3: Asíntotas | 42 |
| Unidad III: Diferenciación e integrales de funciones polinómicas | |
| Lección 1: Derivada de funciones polinómicas | 46 |
| Lección 2: Aplicación de las derivadas | 51 |
| Lección 3: Integrales | 58 |

Explicación de iconos en el libro

Cada ícono representa:



El desarrollo de un ejemplo.



La propuesta de ejercicios o problemas.



Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro, a la vez, algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.



Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.



Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.



Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

Geometría elemental

- Lección 1: Congruencia de triángulos
- Lección 2: Semejanza de triángulos

Algo de historia



Euclides
(330 a.c. – 275 a.c.)

Euclides fue un matemático griego, se conoce muy poco de su vida, sin embargo por su legado es considerado como uno de los matemáticos más famosos de su época junto a Apolonio y Arquímedes. Euclides fundó una escuela de matemática en Alejandría la cual durante varios años se consideró una de las más célebres del mundo.

El nombre de Euclides está ligado a la geometría, al escribir su famosa obra llamada Elementos, está compuesta por 13 libros en las cuales se explican las bases de la geometría.

La influencia de los Elementos de Euclides fue muy fuerte, convirtiéndolo en texto ejemplar en la enseñanza inicial de la matemática, conservando la vigencia en nuestro tiempo.

Los primeros seis libros tratan sobre lo que hoy se conoce como geometría plana o elemental, en los libros séptimo al décimo se estudian temas relacionados con la teoría de números y los tres restantes tratan los temas de los sólidos, culminando con la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas. Esta obra generó muchas discusiones posteriores por diferentes matemáticos los cuales llegaron a confirmar la veracidad de la misma, de igual forma ha sido de mucha ayuda en diferentes campos de la ciencia como ser física, química, astronomía, ingeniería entre otros.

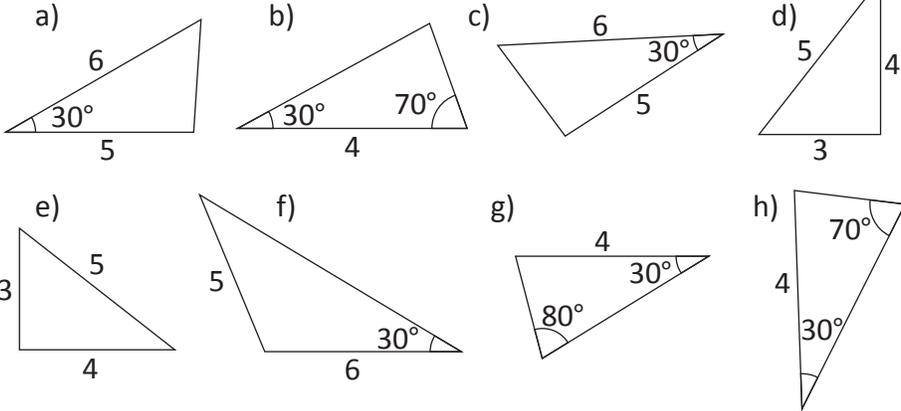
Fuente: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euclides.htm>

Lección 1. Congruencia de Triángulos

Clase 1. Criterios de congruencia de triángulos

Congruencia de triángulo

 **Ejercicio 1.1.** Encuentre las parejas de triángulos congruentes.



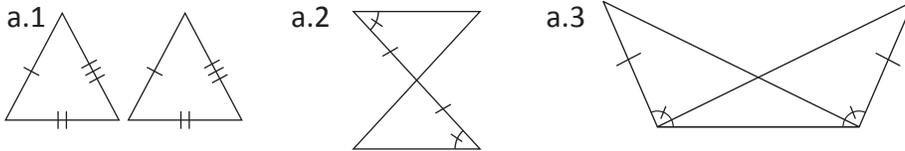
Pareja 1: _____ Pareja 2: _____ Pareja 3: _____
 Criterio: _____ Criterio: _____ Criterio: _____

Dos triángulos son congruentes si satisfacen uno de los siguientes criterios:

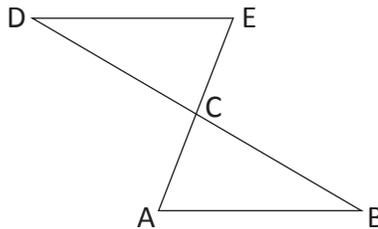
- Los tres lados son respectivamente congruentes (LLL).
- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes (LAL).
- Un lado y los dos ángulos adyacentes a él son respectivamente congruentes (ALA).

 **Ejercicio 1.2.**

a) Para cada par de triángulos dibujados a continuación diga cuál es el criterio de congruencia.



b) En la figura \overline{AE} interseca a \overline{BD} en C tal que $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. Demuestre que el $\angle A \cong \angle E$.

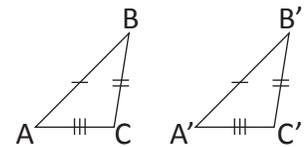


[A]



En una congruencia de triángulos se da una correspondencia entre vértices, lados y ángulos.

En la congruencia



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ Se da:

*Correspondencia entre vértices

$A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$

*Lados correspondientes de triángulos congruentes son congruentes

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

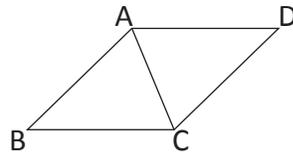
*Los ángulos correspondientes son congruentes

$$\angle A \cong \angle A'$$

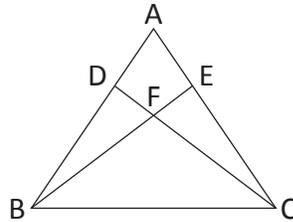
$$\angle B \cong \angle B'$$

$$\angle C \cong \angle C'$$

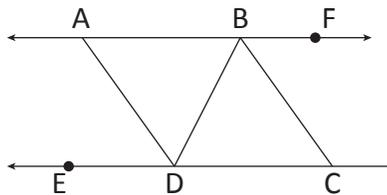
- c) La figura ABCD es un cuadrilátero donde $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$.
Demuestre que $\triangle ABC \cong \triangle CDA$



- d) En el triángulo isósceles $\triangle ABC$, hay dos puntos D y E en los lados congruentes AB y AC respectivamente y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.
Demuestre que:
d1. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.
d2. Si F es el punto donde se cortan \overline{BE} y \overline{CD} entonces $\overline{BF} \cong \overline{CF}$

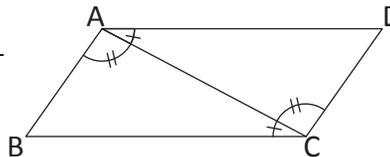


- e) En la figura las rectas AB y DC son paralelas, \overline{DA} biseca el $\angle BDE$ y \overline{BC} biseca el $\angle DBF$. Demuestre:
e1. $\triangle DAB \cong \triangle BCD$
e2. $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Aplicación de congruencia a los cuadriláteros

Ejercicio 1.3. Demuestre que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Llene las casillas en blanco.

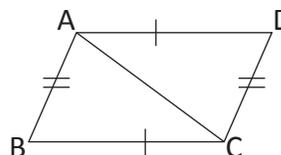


| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. En el $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$, el $\angle BAC \cong \angle DCA$ y $\angle BCA \cong \angle DAC$ | <input type="text"/> |
| 2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$ | <input type="text"/> |
| 3. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ | Por 1, 2 y criterio de congruencia <input type="text"/> |
| 4. $\overline{AB} \cong$ <input type="text"/> $\overline{BC} \cong$ <input type="text"/> | Por 3 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes. |

Teorema 1.1
Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Ejercicio 1.4. En el cuadrilátero ABCD, $AD = BC$ y $AB = DC$.
Demuestre lo siguiente:

- a) Los $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ son congruentes
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



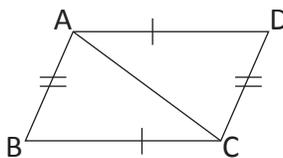
En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes y viceversa.

[B] La relación de los ángulos que se forman cuando se tienen dos rectas paralelas y una transversal.

Clase 2. Características de los cuadriláteros

Condiciones para ser paralelogramo

 **Ejemplo 1.1.** Demuestre que un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes es un paralelogramo.



| Proposición | Justificación |
|---|--|
| 1. En el $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{CA} \cong \overline{AC}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 3. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ | Por 1, 2 y criterio de congruencia LLL |
| 4. $\angle CAB \cong \angle ACD$ $\angle BCA \cong \angle DAC$ | Por 3 y ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes |
| 5. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ | Por 4 y condición de paralelismo (ángulos alternos internos) |
| 6. ABCD es un paralelogramo. | Por 5 y definición de paralelogramo. |

[A]



Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

Teorema 1.2

Condiciones para ser un paralelogramo

Un cuadrilátero es un paralelogramo si cumple una de las siguientes condiciones:

- Dos pares de lados opuestos son paralelos. (Definición)
- Dos pares de lados opuestos son congruentes.
- Dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.
- Un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.

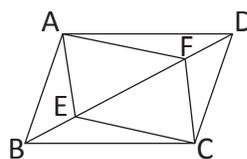


Otra condición para ser un paralelogramo: Los ángulos consecutivos son suplementarios.

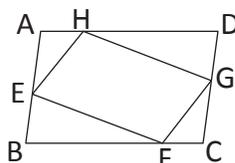
Ejercicio 1.5.

a) Demuestre las condiciones c, d y e para que un cuadrilátero sea un paralelogramo.

b) En el dibujo los puntos E y F están en la diagonal BD del paralelogramo ABCD y distan lo mismo de los vértices B y D respectivamente. Demuestre que el cuadrilátero AECF es un paralelogramo.



c) Se toman 4 puntos E, F, G y H en los lados AB, BC, CD y DA del paralelogramo ABCD de modo que $AE = CG$ y $BF = DH$. Demuestre que EFGH es un paralelogramo.

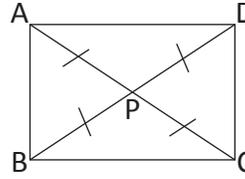


Tenga en cuenta las condiciones para ser un paralelogramo al demostrar b y c.

Rectángulos, rombos y cuadrados



Ejercicio 1.6. Demuestre que un cuadrilátero cuyas diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio es un rectángulo. Llene las casillas en blanco.



| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. $PA = PB = PC = PD$ | Hipótesis |
| 2. $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ son triángulos <input type="text"/> | <input type="text"/> |
| 3. $\angle APD \cong \angle CPB,$ $\angle APB \cong \angle CPD$ | <input type="text"/> |
| 4. $\triangle PAD \cong \triangle PCB$ $\triangle PAB \cong \triangle PCD$ | <input type="text"/> |
| 5. $m\angle PAD = \square = \square = \square$ y $m\angle PAB = \square = \square = \square$ | <input type="text"/> |
| 6. $m\angle DAB = m\angle ABC = m\angle BCD$ $m\angle CDA = 90^\circ$ | Por 5 y (suma de los ángulos internos de cuadrilátero) $\div 4$ |
| 7. ABCD es un rectángulo. | <input type="text"/> |

Teorema 1.3

Las diagonales de un:

Rectángulo son congruentes y se cortan en el punto medio.

Rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio.

Cuadrado son congruentes y perpendiculares y se cortan en el punto medio.



Ejercicio 1.7.

- Demstrar que, si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares, congruentes y se cortan en el punto medio entonces este es un cuadrado.
- Demuestre que el cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

[B]



Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos.



Es importante saber que:

Todo cuadrado es un rectángulo.

Todo cuadrado es un rombo.

La inversa no se cumple.

Clase 3. Teorema de los dos puntos

Ejercicio 1.8.

Construya:

- Dibuje un $\triangle ABC$
- Marque los puntos medios de \overline{AB} y \overline{BC} , nombrándolos como D y E respectivamente
- Trace \overline{DE}

Verifique:

- $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
- Compare DE con respecto a AC.

[A]



En el Ejercicio 1.8, utilice regla para las mediciones y escuadras para verificar el paralelismo.

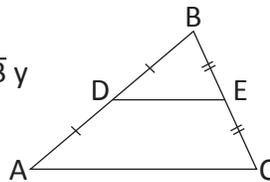
El resultado anterior se cumple por el siguiente teorema.

Teorema 1.4

Teorema de los dos puntos

En el $\triangle ABC$, D y E son los puntos medios de \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y

$$DE = \frac{1}{2} AC.$$



[B]



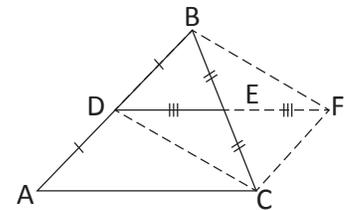
Teorema de los dos puntos también se llama “Teorema del segmento medio de un triángulo” y “Teorema del conector de puntos medios”.

 **Ejemplo 1.2. Demostración de Teorema de los dos puntos.** Utilice la siguiente construcción auxiliar: Sea F el punto que pertenece a la prolongación de \overline{DE} tal que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, tal como se muestra en la figura.

$$1) \overline{DE} \parallel \overline{AC}$$

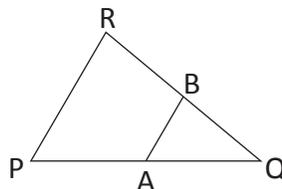
$$2) DE = \frac{1}{2} AC$$

| Proposición | Justificación | Proposición | Justificación |
|---|---------------------------------------|--------------------------|--|
| 1. $\overline{BD} \cong \overline{DA}$ | Hipótesis | 1. $DF = 2DE$ | E es punto medio del \overline{DF} . |
| 2. $\overline{BE} \cong \overline{EC}$ | Hipótesis | 2. $DF = AC$ | ADFC es un paralelogramo |
| 3. $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ | Hipótesis | 3. $2DE = AC$ | Por 1 y 2 |
| 4. E es el punto medio de \overline{BC} y \overline{DF} | Por 2 y 3 | 4. $DE = \frac{1}{2} AC$ | Por 3 |
| 5. BDCF es un paralelogramo | Por 4 y condición de paralelogramo | | |
| 6. $\overline{BD} \cong \overline{FC}$ | Por 5 | | |
| 7. $\overline{DA} \cong \overline{FC}$ | Por 1 y 6 | | |
| 8. $\overline{DA} \parallel \overline{FC}$ | Por 5 y ser A, D, B colineales | | |
| 9. ADFC es un paralelogramo | Por 5, 8 y condición de paralelogramo | | |
| 10. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ | Por 9 y definición de paralelogramo | | |

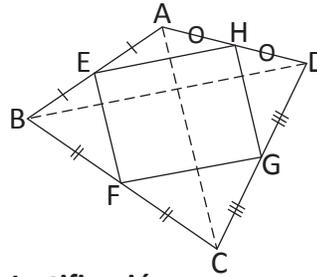


Para realizar las demostraciones, debe analizar los teoremas de la lección anterior sobre congruencia de triángulos y sobre cuadriláteros.

 **Ejercicio 1.9.** En el $\triangle PQR$, A y B son los puntos medios de \overline{PQ} y \overline{RQ} respectivamente. Si $RP = 16$, $m\angle P = 58^\circ$ y $m\angle Q = 38^\circ$, obtenga AB y $m\angle BAQ$.



 **Ejercicio 1.10.** Demuestre que el cuadrilátero EFGH que se obtiene uniendo los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. Llene las casillas en blanco.



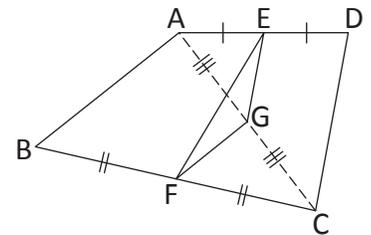
| Proposición | Justificación |
|---|---------------------------|
| 1. E, F, G y H son puntos medios de \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} respectivamente | Hipótesis |
| 2. En el $\triangle ABD$, $\overline{EH} \parallel \overline{BD}$ | <input type="text"/> |
| 3. En el $\triangle BCD$, <input type="text"/> | Teorema de los dos puntos |
| 4. $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ | Igualando 2 y 3 |
| 5. En $\triangle ACD$, $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ | <input type="text"/> |
| 6. <input type="text"/> | Teorema de los dos puntos |
| 7. $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ | Igualando 5 y 6 |
| 8. EFGH es un paralelogramo. | <input type="text"/> |



Para los ejercicios 1.10 y 1.11: Aplique el teorema del segmento medio de un triángulo a los triángulos que se forman con las diagonales.

 **Ejercicio 1.11.**

En el dibujo $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y los puntos E y F son los puntos medios de los lados AD y BC respectivamente. El punto G es el punto medio de la diagonal AC, ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle EFG$?



Clase 4, 5 y 6. Propiedad de la mediatriz

Propiedad de la mediatriz

 **Ejercicio 1.12.**

Construya:

- Trace un segmento, \overline{AB}
- Trace la mediatriz de \overline{AB}
- Coloque un punto P sobre la mediatriz, no colineal con A y B

Verifique:

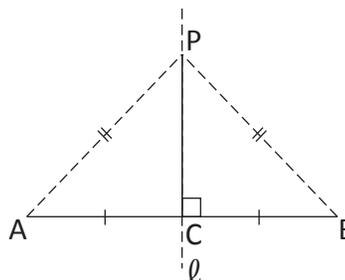
- Compare PA con PB

Lo anterior es una propiedad.

Teorema 1.5 Propiedad de la mediatriz

La recta ℓ es la mediatriz de \overline{AB} .

- 1) Si P está en ℓ , entonces $PA = PB$
- 2) Si $PA = PB$, entonces P está en ℓ .



[A]

Construcción



La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Demostración:

1) Si P está en ℓ , $PA = PB$

| Proposición | Justificación |
|--|---|
| 1. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ | C es punto medio del \overline{AC} . |
| 2. $\angle ACP \cong \angle BCP$ | Perpendicularidad (ángulos rectos). |
| 3. $\overline{PC} \cong \overline{PC}$ | Congruencia del mismo segmento |
| 4. $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia LAL |
| 5. $PA \cong PB$ | Por 4 y ser lados correspondientes de triángulos congruentes. |

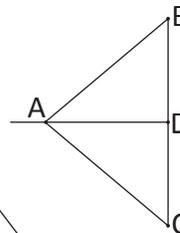
2) Demuestre que si $PA = PB$, entonces P está ℓ .



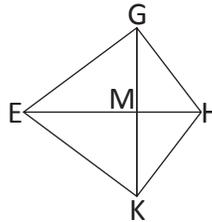
Para la parte 2), debe llegar a demostrar que C es punto medio y que $m\angle ACP = m\angle BCP = 90^\circ$

Ejercicio 1.13.

a) Si D es el punto medio de \overline{BC} y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, demuestre que el $\triangle ABC$ es isósceles.



b) En la figura, M está en el \overline{GK} , $GE = KE$, $GM = KM$ y H está en la recta EM. Demostrar que $GH = KH$.



En el ejercicio a), no utilice congruencia de triángulos en la demostración, emplee la propiedad de la mediatriz.

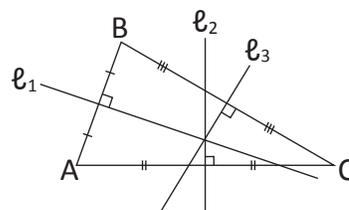
Circuncentro de un triángulo

Ejercicio 1.14.

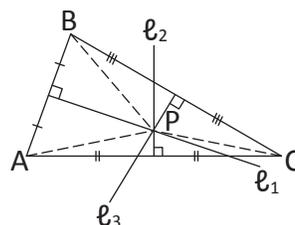
- Construya el $\triangle ABC$
- Trace las mediatrices de los lados del $\triangle ABC$.
- ¿Qué observa respecto a las mediatrices? ¿Coinciden en un punto?

Teorema 1.6. Concurrencia de las mediatrices.

Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Su punto de concurrencia equidista de los vértices del triángulo.



Ejercicio 1.15. Demuestre el teorema anterior considerando a P como punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 , aplicando la propiedad de la mediatriz debe concluir que P también está en la recta ℓ_3 y que $PA = PB = PC$.



[B]

Construcción



Dos o más rectas son **concurrentes** si hay un solo punto que está en todas ellas.



Ejercicio 1.16.

Utilice la construcción del Ejercicio 1.14 y nombre con P el punto de intersección de las mediatrices y trace una circunferencia con centro en P y con radio PA.

- 1) ¿Qué observa con respecto a la circunferencia y los vértices del triángulo?
- 2) ¿Cómo se llama este tipo de circunferencia?

Al punto P se le llama **circuncentro**.

Definición 1.1

El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo se llama circuncentro del triángulo.



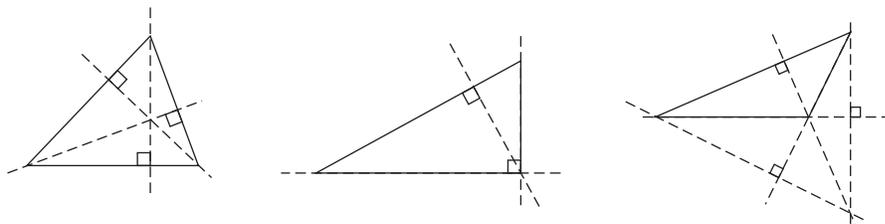
Ejercicio 1.17.

- a) Construya un triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo; y la circunferencia circunscrita a cada uno. Compare la ubicación del circuncentro en cada caso.
- b) ¿Cómo ha de ser el triángulo para que el circuncentro se sitúe en uno de sus lados? Cuando eso sucede, ¿con qué punto coincide el circuncentro? ¿Por qué?

Ortocentro



Ejercicio 1.18. Para cada uno de los siguientes triángulos se han trazado sus tres alturas.



- a) ¿Qué tienen en común los tres triángulos?
- b) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en un vértice?
- c) ¿En qué tipo de triángulos las alturas se intersecan en el interior del triángulo?
- d) ¿En cuál se intersecan en el exterior?

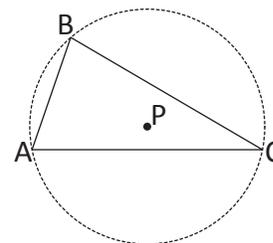
Ese punto se llama **ortocentro**.

Teorema 1.7. Concurrencia de las alturas.

Las tres alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro del triángulo.



Circunferencia circunscrita.



Es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo

[C]



Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

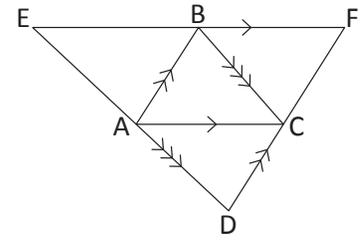
 **Ejercicio 1.19.**

Demuestre el teorema anterior.

Considere la siguiente construcción auxiliar:

En el $\triangle ABC$, por cada vértice se trazó una paralela al lado opuesto, formando el $\triangle DEF$. Demuestre que las mediatrices de los lados del $\triangle DEF$ son las tres alturas del $\triangle ABC$.

Utilice las condiciones para ser paralelogramo.



Los símbolos $>$, $>>$ en los segmentos están indicando paralelismo.

Clase 7 y 8. Bisectriz

 **Ejercicio 1.20.**

Construya:

- Dibuje el $\angle ABC$ y trace su bisectriz.
- Marque un punto P en la bisectriz.
- Desde P , trace segmentos que sean perpendiculares a los lados BA y BC .
- Nombre los puntos de intersección como K y L respectivamente.

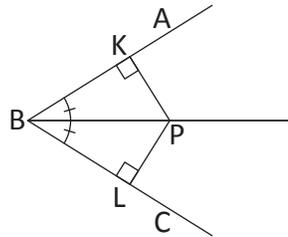
Verifique:

Compare la longitud de \overline{KP} con respecto a la de \overline{LP} .

El resultado anterior se cumple en el siguiente teorema:

Teorema 1.8. Propiedad de la bisectriz de un ángulo.

El punto P está en el interior del $\angle ABC$.
 P equidista de los rayos BA y BC si y sólo si el rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$.



Demostración:

Si K y L equidistan de P , entonces el rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$.

| Proposición | Justificación |
|--|--|
| 1. $PK = PL$ | Hipótesis |
| 2. $\overline{PK} \perp \overline{BA}$; $\overline{PL} \perp \overline{BC}$ | Hipótesis |
| 3. $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ | Congruencia del mismo segmento. |
| 4. $\triangle BKP \cong \triangle BLP$ | Por 1, 2, 3 y criterio de congruencia hipotenusa-cateto de triángulos rectángulos. |
| 5. $\angle KBP \cong \angle LBP$ | Por 4 y por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes. |
| 6. Rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$ | Por 5 y definición de bisectriz. |

 **Ejercicio 1.21.** Demuestre el otro sentido del teorema.

Si rayo BP es la bisectriz del $\angle ABC$ entonces K y L equidistan de P .

[A] Construcción



Puede trazar la bisectriz utilizando regla y compás, o haciendo uso del transportador.



La bisectriz de un ángulo lo divide en dos ángulos congruentes.

Equidista:

P equidista de \overline{BA} y \overline{BC} entonces $\overline{PK} \perp \overline{BA}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$,
 Además, $PK = PL$.



Para demostrar un teorema que involucre un “si y sólo si” deben demostrarse ambos sentidos.



Considere:

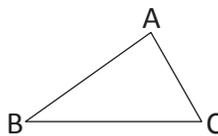
$\overline{PK} \perp \overline{BA}$,
 $\overline{PL} \perp \overline{BC}$ y los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.



Ejercicio 1.22.

En el $\triangle ABC$,

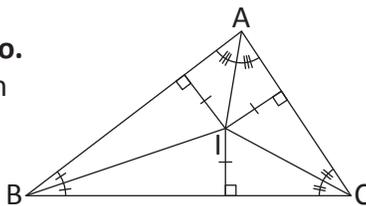
- Trace las bisectrices de sus ángulos.
- ¿Coinciden las bisectrices en un punto?, si es así ¿el punto está en el interior o exterior del triángulo? Nombre el punto de intersección como I.
- Trace desde éste, segmentos perpendiculares a \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} . (Nombre esos puntos P, Q y R respectivamente).
- Compare la medida de estos segmentos (\overline{IP} , \overline{IQ} y \overline{IR}).



Esto nos lleva al siguiente teorema:

Teorema 1.9. Concurrencia de las bisectrices de un triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes en un punto que equidista de los tres lados.



Ejercicio 1.23. Complete la demostración del teorema 1.9.

En el $\triangle ABC$, sea I el punto de intersección de las bisectrices de $\angle BAC$ y $\angle BCA$.

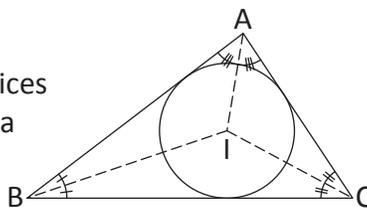
| Proposición | Justificación |
|---|------------------------------------|
| 1. \overline{AI} es la bisectriz del $\angle BAC$ | Hipótesis |
| 2. <input type="text"/> es la bisectriz del $\angle BCA$ | Hipótesis |
| 3. I equidista de \overline{AB} y \overline{AC} | Por 1 y propiedad de bisectriz. |
| 4. I equidista de \overline{AC} y <input type="text"/> | Por 2 y <input type="text"/> |
| 5. I equidista de \overline{AB} y \overline{BC} | Por 3, 4 y propiedad transitiva. |
| 6. <input type="text"/> es la bisectriz de <input type="text"/> | Por 5 y propiedad de la bisectriz. |



Ejercicio 1.24. Utilizando la construcción empleada en el Ejercicio 1.22, trace la circunferencia de centro I con radio PI. ¿Por qué la circunferencia es tangente a los tres lados?

Definición de Incentro

El punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos de un triángulo se llama Incentro.



[B]



La construcción del Ejercicio 1.22 se utiliza posteriormente.



Circunferencia inscrita:

Si una circunferencia es tangente a los tres lados de un triángulo entonces se dice que la circunferencia está inscrita en el triángulo y el triángulo está circunscrito en la circunferencia.

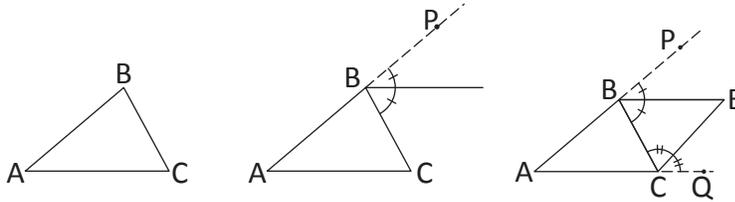


Ejercicio 1.25. Realice la siguiente construcción:

Construya un triángulo equilátero y luego construya su circunferencia inscrita.



Ejercicio 1.26. Explique las construcciones realizadas en cada paso.



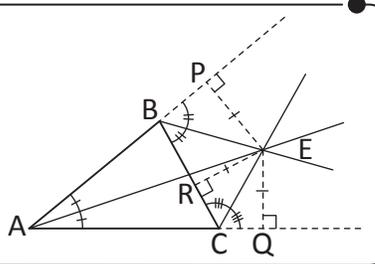
Conteste:

- ¿Cómo se llaman los ángulos PBC y QCB?
- ¿Qué son los rayos BE y CE?
- Verifique si la bisectriz del ángulo interior $\angle BAC$ es también concurrente en el punto E.

El punto E se llama **Excentro**.

Teorema 1.10

El punto donde se intersectan dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior en un triángulo, se llama excentro y éste equidista de los lados del triángulo.



Ejercicio 1.27. Complete la demostración. Considere en el ΔABC las bisectrices BE y CE de los ángulos exteriores $\angle PBC$ y $\angle QCB$ respectivamente y tome tres puntos P, Q y R tal que, $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$. Demuestre que el rayo AE es la bisectriz del $\angle BAC$. (Vea la figura de Teorema 1.10).

| Proposición | Justificación |
|--|------------------------------------|
| 1. Rayo BE es la bisectriz de $\angle PBC$ | <input type="text"/> |
| 2. <input type="text"/> es la bisectriz de <input type="text"/> | Hipótesis |
| 3. $\overline{PE} \perp \overline{AP}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, $\overline{QE} \perp \overline{AQ}$ | <input type="text"/> |
| 4. $PE = RE$ | Por 1, 3 y propiedad de bisectriz. |
| 5. <input type="text"/> | Por 2, 3 y propiedad de bisectriz. |
| 6. $PE = QE$ | <input type="text"/> |
| 7. <input type="text"/> es la bisectriz de <input type="text"/> | <input type="text"/> |

[C]



Puede calcar las figuras y hacer las verificaciones con regla, transportador y compás.



La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, se le llama bisectriz exterior.



Está es también una aplicación de la propiedad de la bisectriz.



La circunferencia inscrita en un triángulo es tangente a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos.

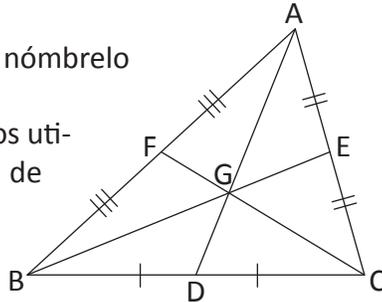
¿Cuántas de estas circunferencias se pueden construir en el ΔABC ?

Clase 9 y 10. Baricentro

Trazar las medianas de un triángulo

💡 Ejemplo 1.3.

- Dibuje en el cuaderno un triángulo y nómbrelo $\triangle ABC$.
- Encuentre los puntos medios de los lados utilizando la construcción de la mediatriz de un segmento.
- Una los vértices con el punto medio del lado opuesto correspondiente.



Una **mediana** de un triángulo es el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo tiene 3 medianas.

Teorema 1.11 Las tres medianas de un triángulo se intersecan en un punto.

💡 Ejemplo 1.4. Demuestre el Teorema 1.11.

Solución:

En el $\triangle ABC$, sean D y E los puntos medios de \overline{AB} y \overline{AC} respectivamente (Vea la figura de la derecha).

| Proposición | Justificación |
|---|---|
| 1. En el $\triangle ABC$, \overline{BE} y \overline{CD} son medianas y se cortan en G. | Construcción e hipótesis |
| 2. Rayo AG corta a \overline{BC} en L y se extiende a R tal que $\overline{AG} \cong \overline{GR}$. | Construcción |
| 3. D es el punto medio de \overline{AB} . | Por 1 |
| 4. G es el punto medio de \overline{AR} . | Por 2 |
| 5. En el $\triangle ABR$, $\overline{DG} \parallel \overline{BR}$ | Teorema de los dos puntos |
| 6. $\overline{GC} \parallel \overline{BR}$ | Por 5 |
| 7. E es punto medio de \overline{AC} . | Hipótesis |
| 8. En el $\triangle ARC$, $\overline{GE} \parallel \overline{RC}$ | Teorema de los dos puntos |
| 9. $\overline{BG} \parallel \overline{RC}$ | Por 8 |
| 10. BGCR es paralelogramo. | Por 6, 9 y definición de paralelogramo |
| 11. $\overline{BL} \cong \overline{LC}$ | Por 10 y la propiedad de la diagonal del paralelogramo. |
| 12. L es el punto medio de \overline{BC} y \overline{AL} es una mediana del $\triangle ABC$. | Por 11 |

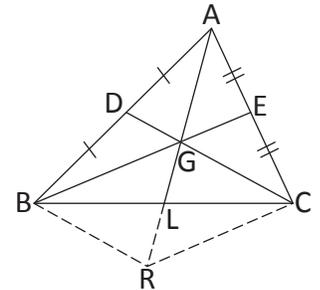
[A]



Los segmentos AD, CF y BE son medianas del $\triangle ABC$.
 \overline{AD} , \overline{CF} y \overline{BE} se cortan en el punto G.



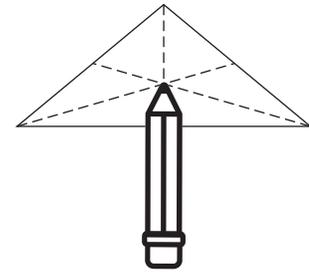
En esta demostración trazamos segmentos auxiliares como estrategia para su solución.



El punto donde se intersecan las medianas de un triángulo se llama baricentro.

 **Ejemplo 1.5.**

- Dibuje un triángulo escaleno grande en una cartulina y recórtelo.
- Trace dos medianas y encuentre el Baricentro.
- Ubique la punta del lápiz en el baricentro.
- Comente con sus compañeros que sucedió.



Note que el triángulo se equilibró.

El baricentro es el centro de masa o centro de gravedad de un triángulo.

 **Ejercicio 1.28.**

- Construya un triángulo escaleno, un equilátero y un isósceles y trace las medianas utilizando regla y compás.
- Dado el $\triangle ABC$ con mediana AD perpendicular al lado BC . Demuestre que:
 - \overline{AD} biseca a $\angle BAC$
 - $\triangle ABC$ es isósceles.
- Demuestre que la mediana correspondiente al lado no congruente de un triángulo isósceles es perpendicular al lado y biseca al ángulo opuesto a la base.
- Demuestre que las medianas correspondientes a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.
- Dados dos triángulos congruentes, la mediana de uno de los triángulos es congruente con la mediana del lado correspondiente del otro.

 **Ejercicio 1.29.**

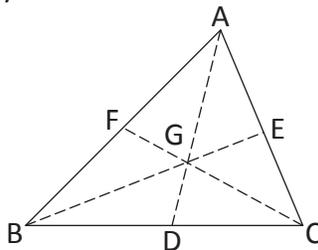
En el $\triangle ABC$, demuestre que si \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} son medianas y G es el baricentro entonces $AG : GD = 2 : 1$, $BG : GE = 2 : 1$, $CG : GF = 2 : 1$.

En el $\triangle ABC$, \overline{AD} , \overline{BE} y \overline{CF} son medianas y G es el baricentro. Se cumple que:

$$AG = \frac{2}{3} AD \text{ ó } AG = 2GD$$

$$BG = \frac{2}{3} BE \text{ ó } BG = 2GE$$

$$CG = \frac{2}{3} CF \text{ ó } CG = 2GF$$



[B]

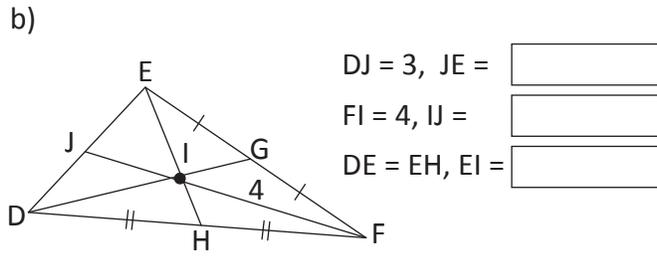
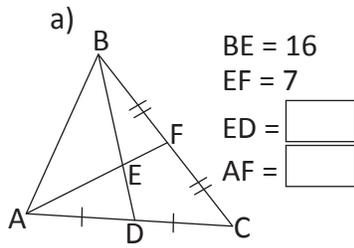


Puede utilizar como referencia la figura del Ejemplo 1.4.



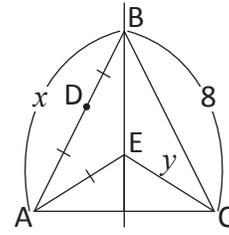
Ejercicio 1.30.

Encuentre las medidas.

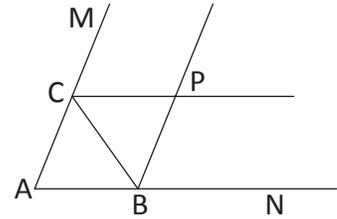


Ejercicios de la lección

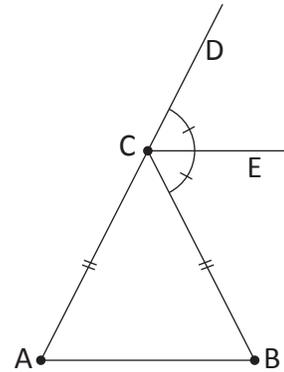
- 1) En la figura $\triangle ABC$ es isósceles donde $BA = BC$, \overline{BE} es la mediatriz de \overline{AC} . Si los segmentos tienen las longitudes indicadas, halle x, y .



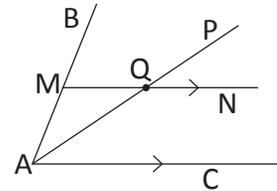
- 2) En el $\triangle ABC$, las bisectrices de dos ángulos externos de $\angle B$ y $\angle C$ se intersecan en P. Demuestre que la suma de la medida del ángulo BPC y la mitad de la medida del ángulo A es igual a 90° (ángulo recto).



- 3) Demuestre que en todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo externo opuesta a los ángulos congruentes es paralela al lado desigual.

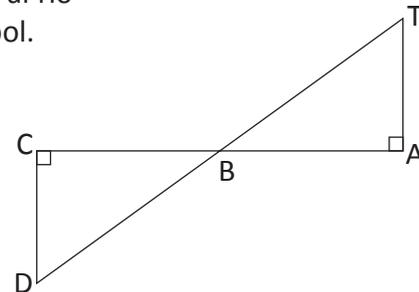


- 4) Demuestre que si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles. Demuestre que el triángulo MAQ es isósceles.

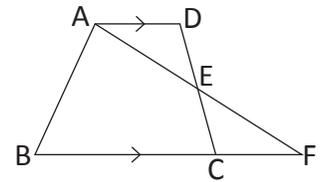


- 5) Dos exploradores Luis y María están parados a la orilla de un río en el punto A directamente enfrente de un árbol T que se encuentra al otro lado del río. Ellos marcan cierta distancia a un punto B donde María permanece, sin embargo, Luis camina exactamente la misma distancia de A a B a un punto C, luego gira y camina en dirección opuesta al río hacia un punto D donde él puede ver a María alineada con el árbol. A, B y C son colineales.

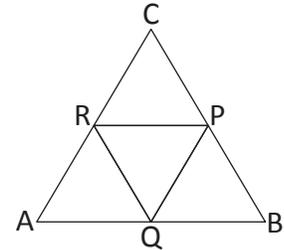
- Identifique la correspondencia de pares de lados y ángulos congruentes
- Demuestre que $\triangle ABT \cong \triangle CBD$
- ¿Cómo podrían ellos usar la información que se tiene para encontrar el ancho del río?



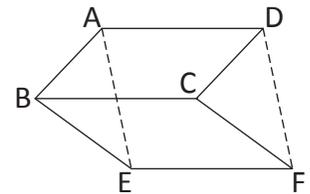
6) En la figura de la derecha $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y E es el punto medio de \overline{CD} . Demuestre que los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle FCE$ son congruentes.



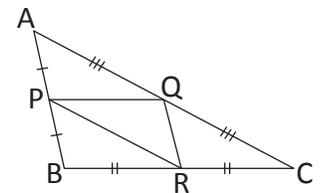
7) En la figura P, Q y R son puntos medios de los lados del triángulo equilátero $\triangle ABC$. Demuestre que el triángulo $\triangle PQR$ es equilátero.



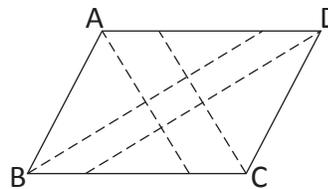
8) En la figura los cuadriláteros ABCD y BEFC son paralelogramos. Demuestre que el cuadrilátero AEFD también es paralelogramo.



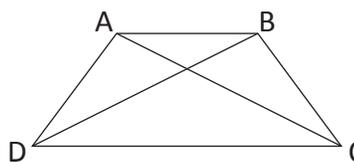
9) Se da cualquier $\triangle ABC$ y los puntos medios de los lados, P, Q y R. Demuestre que el perímetro del $\triangle PQR$ es la mitad del perímetro del $\triangle ABC$.



*10) ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma con las bisectrices de los 4 ángulos de un paralelogramo? Demuéstrelo.



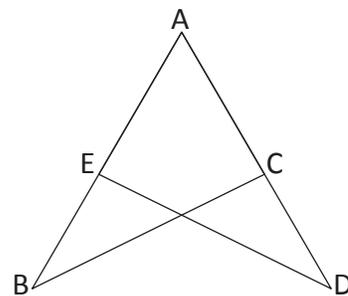
11) Demuestre que las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes



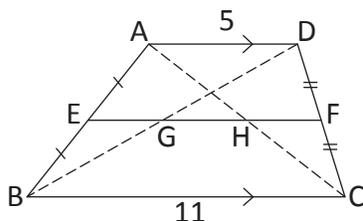
 Primero demuestras que las bisectrices de ángulos opuestos del paralelogramo son paralelas entre sí.

12) Para cada una de las siguientes opciones decide si la información dada es suficiente para concluir que $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, si es así demuéstrela.

- a) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\angle B \cong \angle D$
- b) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$; $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
- c) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AE} \cong \overline{AC}$
- d) $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$



13) En la figura $AD \parallel BC$, $AE = EB$ y $DF = FC$. Encuentre la longitud de los segmentos \overline{EF} y \overline{GH} .



 Considere la siguiente propiedad, la mediana de un trapecio es paralela a sus bases y su longitud es igual a la mitad de la suma de ellas.

Lección 2. Semejanza de Triángulos

Clase 1. Criterios de semejanza de triángulos

Definición de semejanza

Se dice que dos figuras son semejantes, cuando se pueden colocar en la posición como muestra la Fig. 2.1 donde

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$$

A este valor se le denomina

razón de semejanza entre los triángulos $A'B'C'$ y ABC .

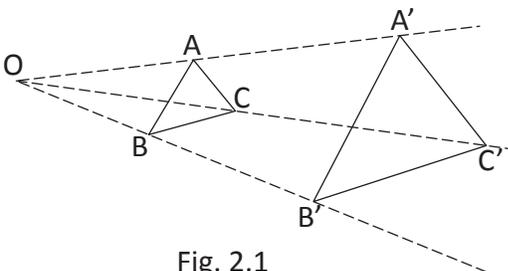


Fig. 2.1

En el caso de los triángulos se tiene la siguiente definición de semejanza:

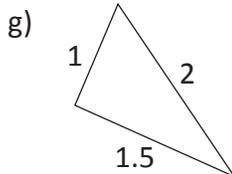
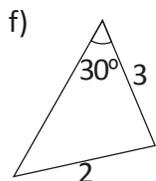
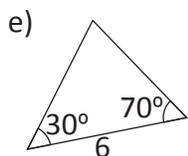
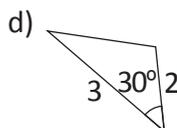
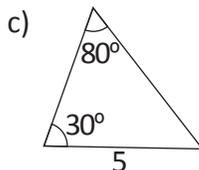
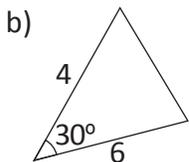
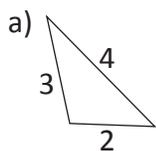
Los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes cuando

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}, \quad m\angle A = m\angle A', \quad m\angle B = m\angle B', \\ m\angle C = m\angle C'$$

El valor de $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ coincide con la razón de semejanza entre los triángulos $A'B'C'$ y ABC .

Para confirmar la semejanza de triángulos, no es necesario verificar todas las condiciones

Ejemplo 2.1. Encuentre las parejas de triángulos que son semejantes y diga la condición de semejanza:



[A]



Se puede dar la vuelta a una de estas figuras. Cada punto de las dos figuras se corresponde como los puntos A y A' , etc.



Se denota la semejanza con el signo " \sim ", $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

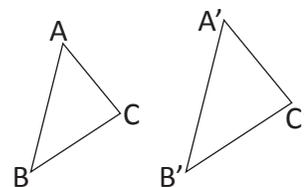


En 9no. grado se aprendió el criterio de semejanza de triángulos.

Criterio de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes cuando cumplen una de las siguientes condiciones:

- a) Dos pares de lados son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados tienen la misma medida (LAL).
- b) Dos pares de ángulos tienen la misma medida (AA).
- c) Los tres lados son proporcionales (LLL).



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$m\angle B = m\angle B' \text{ (LAL)}$$

$$m\angle A = m\angle A',$$

$$m\angle B = m\angle B' \text{ (AA)}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

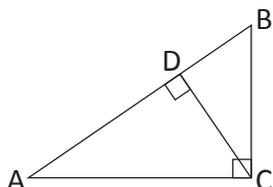
(LLL)

[B]

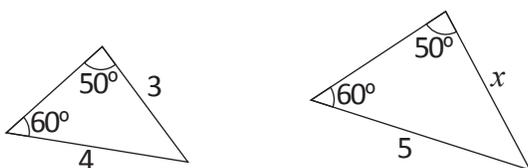


Ejercicio 2.1.

Demuestre que $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$



Ejemplo 2.2. Encuentre los valores de x

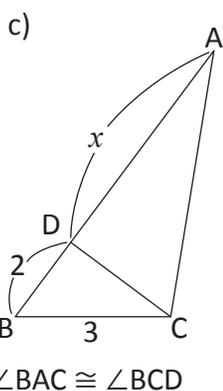
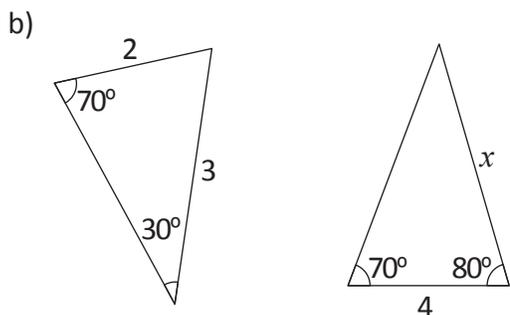
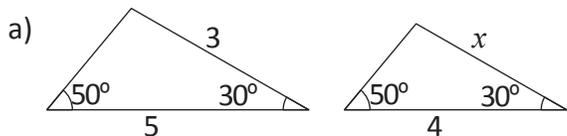


Solución: En los dos triángulos hay dos pares de ángulos iguales, por lo tanto son semejantes, así que se tiene que

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4} ; x = \frac{5}{4}(3) = \frac{15}{4} \text{ (Respuesta)}$$



Ejercicio 2.2. Encuentre el valor de x .

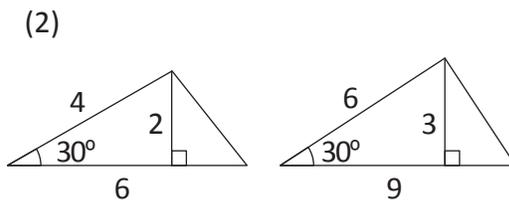
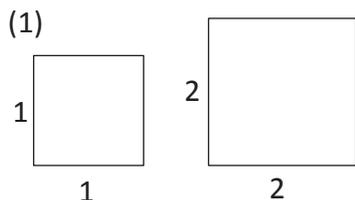


Clase 2. Semejanza y razón de área



Ejemplo 2.3. En (1) y (2):

- Encuentre la razón de semejanza entre la figura de la derecha y la de la izquierda.
- Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda.
- ¿Qué observa?



Solución: a) (1) $\frac{2}{1} = 2$

(2) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

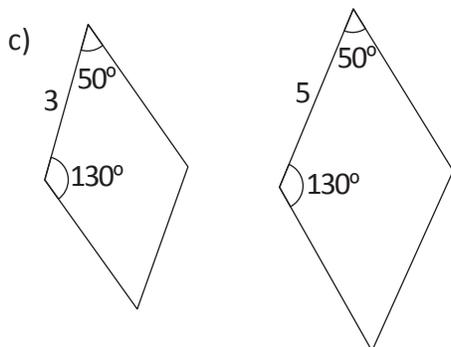
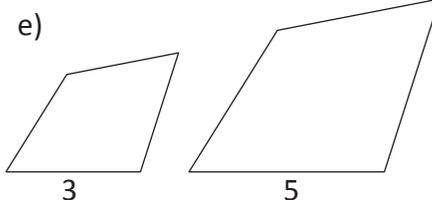
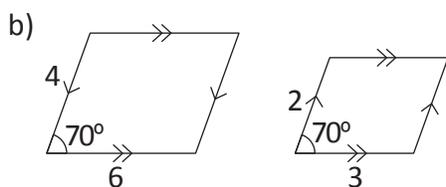
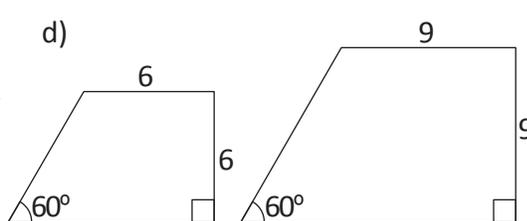
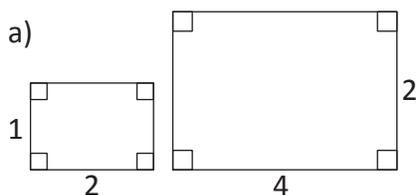
b) (1) $\frac{2^2}{1^2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ (2) $\frac{\frac{1}{2}(9)(3)}{\frac{1}{2}(6)(2)} = \left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

c) La razón de área = (La razón de semejanza)²

La relación de arriba se aplica a cualquier figura.



Ejercicio 2.3. Encuentre la razón de área entre la figura de la derecha y la de la izquierda. En cada caso las dos figuras son semejantes.



En (2) si k es la razón de semejanza,

$$k = \frac{9}{6} = \frac{6}{4}$$

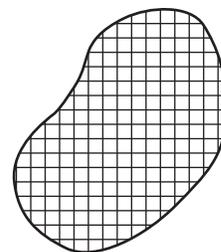
$$9 = 6k; 6 = 4k; 3 = 2k$$

El área del triángulo de derecho

$$= \frac{1}{2}(9)(3) = \frac{1}{2}(6k)(2k)$$

$$= (\text{El de izquierdo}) \times (k^2)$$

Es porque se puede evaluar el área por conjunto de cuadrados con cualquier exactitud.

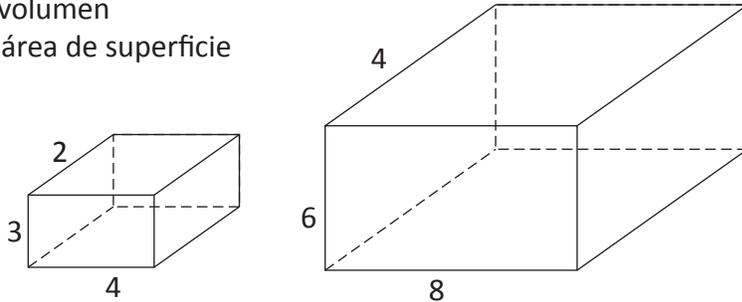


Clase 3. Semejanza y razón de volumen y área de superficie

Ejemplo 2.4.

Encuentre las siguientes razones entre el paralelepípedo rectangular de la derecha y el de la izquierda,

- a) De semejanza
- b) De volumen
- c) Del área de superficie



El volumen del paralelepípedo rectangular es (largo) x (ancho) x (altura)

Solución: a) $\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{8(4)(6)}{4(2)(3)} = \frac{8}{4} \left(\frac{4}{2}\right) \left(\frac{6}{3}\right) = 2^3 = 8$

c) La razón de área de cada cara = (La razón de semejanza)² = 2² = 4
Por lo tanto, la razón de área de superficie es 4

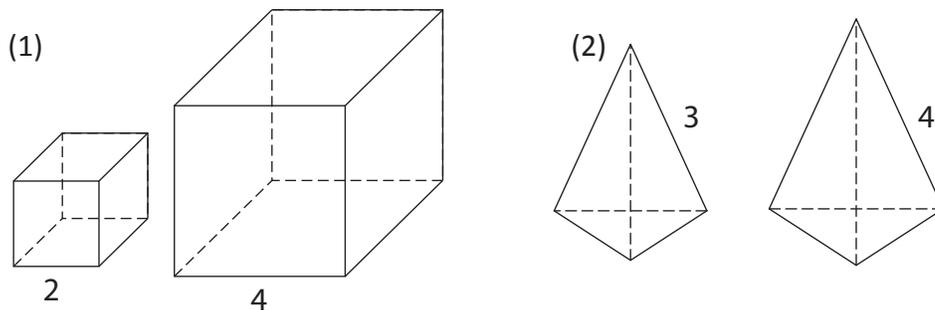
La razón de arriba se aplica a todos los sólidos

La razón de volumen = (la razón de semejanza)³
La razón de área de superficie = (La razón de semejanza)²

Ejercicio 2.4.

- a) Encuentre la razón de volumen entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.
- b) Encuentre la razón del área de superficie entre el sólido de la derecha y el de la izquierda.

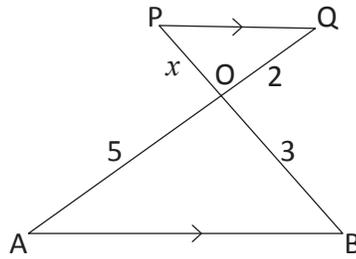
En cada caso los sólidos son semejantes



Ejercicios de la lección

1) En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$.

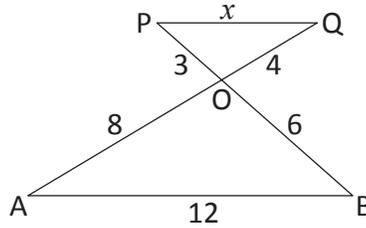
- Demuestre que $\triangle OAB \sim \triangle OQP$.
- Encuentre el valor de x .



Clase 1

2) En la figura

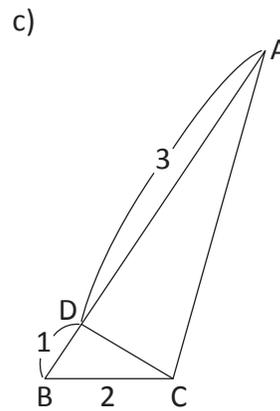
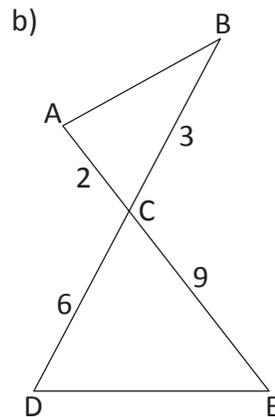
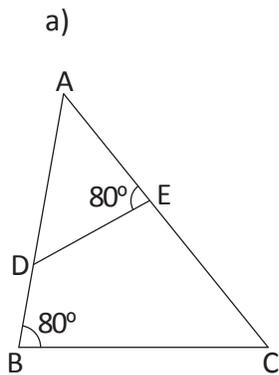
- Demuestre que $\triangle OAB \sim \triangle OQP$.
- Encuentre el valor de x .



Clase 1

3) En cada uno de los dibujos, indique los triángulos semejantes y el criterio de semejanza utilizado.

Clase 1



Límites y continuidad

- Lección 1: Límite de funciones
- Lección 2: Continuidad de funciones
- Lección 3: Asíntotas

Algo de historia



Julius Wilhelm Richard Dedekind
(1831 – 1916)

Dedekind fue un matemático alemán. Nació y falleció en Brunswick. Su campo de especialización es álgebra y teoría de números. Con relación al tema de esta unidad, él definió rigurosamente el conjunto de los números reales y estableció la continuidad de los números reales dando así el fundamento de análisis que empezó con el descubrimiento del cálculo infinitesimal, que venía careciendo de fundamento.

Para esta meta él utilizó los conjuntos llamados corte de los números racionales como lo siguiente: Se divide el conjunto de los números racionales en dos subconjuntos A y B no vacíos de modo que los números que pertenece a A son menor que los de B.

Entonces hay tres casos. a) En A existe un número que es mayor que cualquier otro número de A y en B no existe el mínimo número. b) En B existe el mínimo número y en A no existe el máximo número. c) En A no existe el máximo número y en B tampoco existe el mínimo número. En c) el par de subconjuntos define un número irracional. Después de añadir los números irracionales al conjunto de los números racionales, en el corte de estos números siempre ocurre sólo los casos a) y b), lo que es la continuidad de los números reales.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Nota: a partir de esta unidad se utiliza la unidad de medida radián para medir los ángulos.

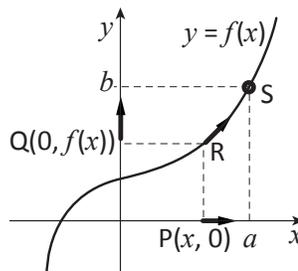
Términos y notación: sean a y b números reales tal que $a < b$

| | |
|------------------------|--|
| Intervalo abierto | $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ |
| Intervalo cerrado | $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ |
| Intervalo semi abierto | $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ |
| | $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ |

Lección 1. Límite de funciones

Clase 1. Definición de límite de funciones

Explicación 1. En la figura, en el eje x el punto $P(x, 0)$ tiende al punto $(a, 0)$, pero no alcanza a este punto. En la gráfica el punto R que corresponde al punto P tiende al punto S . En el eje y el punto $Q(0, f(x))$ que corresponde al punto R y representa el valor de $f(x)$ tiende al punto $(0, b)$.



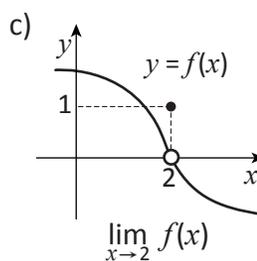
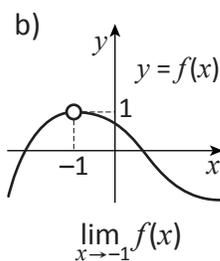
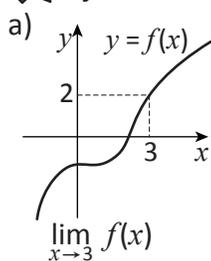
En resumen, cuando x tiende sin límite a a tomando valores diferentes de a , $f(x)$ tiende sin límite a b .

Se expresa esta situación como: " $f(x)$ converge a b " y se denota mediante:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

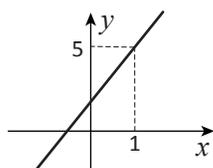
El valor de b se le llama **límite** de $f(x)$ cuando x tiende sin límite a a .

Ejercicio 1.1. Encuentre los límites:



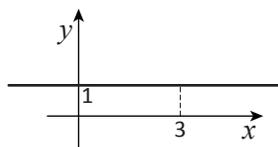
Ejemplo 1.1. Encuentre los límites: a) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} 1$

Solución: a)



de gráfica se ve que $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$

b)



$$\lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1$$

De b) se ve que:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

(c : constante)

No es necesario que $f(x)$ esté definida en $x = a$.

También se utiliza la siguiente notación:

$$f(x) \rightarrow b \quad (a \rightarrow x)$$

En b) $f(x)$ no está definida en $x = -1$; en c) $f(2) = 1$.

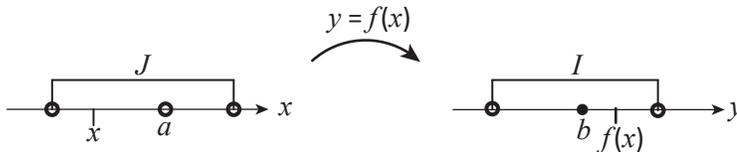


Ejercicio 1.2. Encuentre el límite:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} (-5)$ c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$ d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x$
 e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} 10^x$ g) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_2 x$ h) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}$

*** Explicación 2.** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ equivale lo siguiente:

Cuando está dado un intervalo abierto I que contiene el valor de b , existe un intervalo abierto J tal que: $x \in J, x \neq a \Rightarrow f(x) \in I$



En la figura de arriba puede limitarse I y J en la forma:

$$I = (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}, |y - b| < \varepsilon\}$$

$$J = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta\}$$

con los números positivos ε y δ .



Entonces la definición tiene la siguiente forma:

Definición de límite de funciones.

Sea $f(x)$ una función definida alrededor de $x = a$ salvo en a . Se denota $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ cuando se verifica lo siguiente:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



Para el tratamiento más riguroso, hay que definir el límite de tal manera que explica el sentido de “tender sin límite”.



Esta forma es uno de los resultados de la actitud crítica del siglo XIX, hacia la base del cálculo infinitesimal que data del siglo XVII.

Clase 2. Propiedades del límite

Propiedades del límite:

Sean α , β y k números reales, $f(x)$ y $g(x)$ funciones. Se supone que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$.

- a) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$
 b) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$
 c) $\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x)\} = k\alpha$
 d) $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$
 e) Si $\beta \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$



Para la demostración se utiliza la definición de la Explicación 2 de la Clase 1.

Nota: Utilizando d) y e) repetidamente se tiene que:

$$f) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = a^n \quad (n: \text{número entero})$$

*** Explicación 3:** sobre la demostración: se utilizan las siguientes relaciones:

- a) $|\{f(x) + g(x)\} - (\alpha + \beta)| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta|$
- b) $|\{f(x) - g(x)\} - (\alpha - \beta)| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta|$
- c) $|kf(x) - k\alpha| = |k| |f(x) - \alpha|$
- d) $|f(x)g(x) - \alpha\beta| \leq |f(x) - \alpha| |g(x)| + |\alpha| |g(x) - \beta|$
- e) $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq \frac{|f(x) - \alpha| |\beta| + |\alpha| |g(x) - \beta|}{|\beta| \{|\beta| - |g(x) - \beta|\}}$

Donde $|g(x) - \beta| < |\beta|$

Tenga en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} |s + t| &\leq |s| + |t| \\ |s t| &= |s| |t| \\ |g(x)| &= |g(x) - \beta + \beta| \\ &\leq |g(x) - \beta| + |\beta| \\ |g(x)| &= |g(x) - \beta + \beta| \\ &\geq |\beta| - |g(x) - \beta| \end{aligned}$$

Cuando

$$|\beta| \geq |g(x) - \beta|$$

 **Ejemplo 1.2.** Encuentre los límites: a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x}$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 4)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 \quad \text{por a) y b)} \\ &= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4 \quad \text{por f) y d)} \\ &= 2^2 - 3(2) + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Este valor equivale a $f(2)$, donde

$$f(x) = x^2 - 3x + 4.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3 \neq 0$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) \div \lim_{x \rightarrow 3} x = \frac{8}{3}$

Nota: de a) se ve los siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ donde } f(x) \text{ es un polinomio de } x$$

 **Ejercicio 1.3.** Encuentre el límite:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^3$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x - 1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x^2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -1} x^3 2^x$

Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

 **Ejemplo 1.3.** Encuentre el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Solución. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$



Transforme la función en la forma donde el denominador no converge a 0.

 **Ejercicio 1.4.** Encuentre el límite.

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{2x - 1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x}{x}$

- *e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
- *f) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$
- *g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2}$

 **Ejemplo 1.4.** Encuentre el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución 1: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$

Solución 2: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$

 **Ejercicio 1.5.** Encuentre el límite:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$ *e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+\sqrt{x}-2}$

 **Ejemplo 1.5.** Encuentre el valor de a y b que satisfacen $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 3$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2+ax+b}{x-1} \cdot (x-1) \right\}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \quad \text{por d) de la Clase 2.}$$

$$= 3 \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, como x tiende a 1 (se sustituye convenientemente en x^2+ax+b)

$$a+b+1=0.$$

Luego, $x^2+ax+b = x^2+ax+(-a-1)$ Sustituyendo $b = -a-1$
 $= (x-1)(x+a+1)$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2,$$

Por lo tanto, $a+2=3$, $a=1$. Respuesta: $a=1$, $b=-2$

 **Ejercicio 1.6.** Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = -4$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+ax+b}{x+2} = 2$



En el Ejemplo 1.4 solución 1 aplique la racionalización del denominador.



En el Ejemplo 1.4 solución 2 aplique la factorización al numerador:
 $x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$



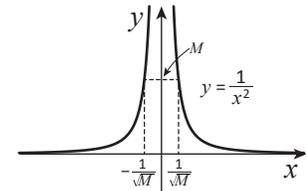
Si el denominador converge a 0 y existe el límite, entonces el numerador converge en 0.

Clase 4. Divergencia

 **Ejemplo 1.6.** Describa el cambio del valor de $\frac{1}{x^2}$ cuando x tiende al 0.

Solución: si $x \rightarrow 0$, entonces $x^2 > 0$ y tiende al 0. Por lo tanto, el valor de $\frac{1}{x^2}$ aumenta sin límite.

En efecto, a cualquier número positivo M , si se toma x en $(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0)$ o $(0, \frac{1}{\sqrt{M}})$, entonces se tiene que $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M$.



Cuando se escribe $x \rightarrow a$, x no toma el valor de a .

Si el valor de $f(x)$ aumenta sin límite cuando $x \rightarrow a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito positivo** y se denota mediante

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

De la misma manera si el valor de $f(x)$ disminuye sin límite cuando $x \rightarrow a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito negativo** y se denota mediante.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

El símbolo ∞ no es un número, tampoco se llama límite.

 **Ejercicio 1.7.** Investigue si converge o diverge.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$

Propiedades de divergencia

- a) $f(x) > 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
 $f(x) < 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
 b) $f(x) \leq g(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
 $g(x) \leq f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \{-f(x)\} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \{-f(x)\} = \infty$
 d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ o ∞ , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ o $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = -\infty$
 e) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha > 0$ o ∞ , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \infty$
 f) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ o $-\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$



Se omite la demostración.

Ejemplo 1.7. Encuentre $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan^2 x$.

Se utiliza la propiedad e).

Solución: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2} > 0$ y $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^2 x = \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan^2 x = \infty$$

Ejercicio 1.8. Calcule:

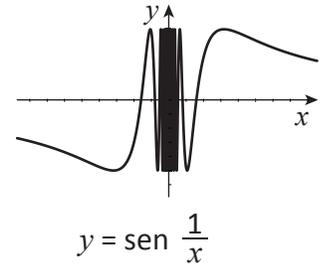
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-2}{\cos^2 x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{(x-3)^2}$

Ejemplo 1.8. Investigue los valores de $\sin \frac{1}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$.

Solución: $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$. Por otra parte, para cada número $b \in [-1, 1]$, hay valores de x en cualquier cercanía del 0 que satisface $\sin \frac{1}{x} = b$

Del Ejemplo 1.8 se sabe que $\sin \frac{1}{x}$ no converge cuando $x \rightarrow 0$.

En este caso se dice que $\sin \frac{1}{x}$ **diverge** cuando $x \rightarrow 0$.



Ejercicio 1.9. Investigue si $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ converge o no.

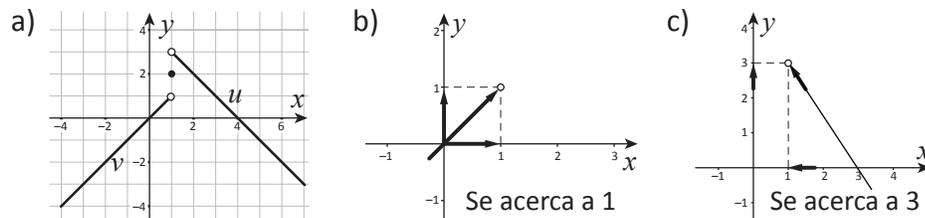
Clase 5. Límites laterales

Ejemplo 1.9. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } x < 1 \\ 2 & \text{cuando } x = 1 \\ -x + 4 & \text{cuando } 1 < x \end{cases}$$

- a) Dibuje la gráfica de $y = f(x)$.
 b) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $x < 1$ y se acerca a 1.
 c) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $1 < x$ y se acerca a 1.

Solución:



En b) del Ejemplo 1.9, al número 1 se le llama **límite por la izquierda** y se denota mediante $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.

En c) al número 3 se le llama **límite por la derecha** y se denota mediante $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$.

Se aplica la notación similar cuando la función diverge. Se verifican las mismas propiedades que el límite anterior.



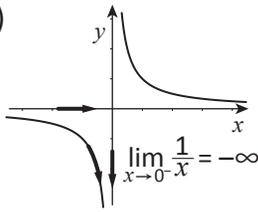
Ambas se les llama **límite lateral**.

 **Ejemplo 1.10.** Calcule.

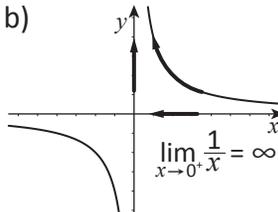
a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

Solución: a)



b)



 **Ejercicio 1.10.** Encuentre los límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$

 **Ejemplo 1.11.** Se define una función que se denota mediante $\llbracket x \rrbracket$ como lo siguiente:

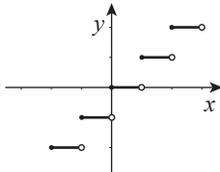
$$\llbracket x \rrbracket = n \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad n \leq x < n + 1$$

Es decir $\llbracket x \rrbracket$ representa el número entero máximo que no sobrepasa x .

a) Dibuje la gráfica de $y = \llbracket x \rrbracket$.

b) Encuentre $\lim_{x \rightarrow 1^-} \llbracket x \rrbracket$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \llbracket x \rrbracket$.

Solución: a)



b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \llbracket x \rrbracket = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \llbracket x \rrbracket = 1$

 **Ejercicio 1.11.** Encuentre el límite lateral.

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \llbracket x \rrbracket$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \llbracket x \rrbracket$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \llbracket x \rrbracket$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \llbracket x \rrbracket$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \llbracket x \rrbracket$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \llbracket x \rrbracket$

*g) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \llbracket x^2 \rrbracket$

*h) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \llbracket x^2 \rrbracket$

Entre el límite y el límite lateral existe la siguiente relación:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ existen y coinciden.}$$

$$\text{En este caso } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

 **Ejemplo 1.12.** Se define la función $f(x)$ como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 3x - 6 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \quad \text{Investigue si } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ existe.}$$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - x^2) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 6) = 4$

Concuerdan, luego $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

 **Ejercicio 1.12.** La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 4x & \text{si } -2 \leq x \end{cases} \quad \text{Investigue si } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ existe.}$$



Se le llama esta función “función de parte entera”.

Ejemplo: $\llbracket 2 \rrbracket = 2$, $\llbracket 2.9 \rrbracket = 2$, $\llbracket -1.3 \rrbracket = -2$



Para g) y h) construya la gráfica de $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$.

Clase 6. Límites en el infinito

 **Ejemplo 1.13.** Investigue el cambio de valor de $\frac{1}{x}$ cuando:

- a) x aumenta sin límite.
 b) $x < 0$ y $|x|$ aumenta sin límite.

Solución: a) $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ b) $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

Se denota el fenómeno de a) mediante $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ y el b) mediante $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

 **Ejercicio 1.13.** Encuentre el límite:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

Los límites en el infinito tienen las mismas propiedades que las de la Clase 2 y 4.

 **Ejemplo 1.14.** Sean $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) y $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ ($b_0 \neq 0$) polinomios.

Encuentre $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

- a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Solución: $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = \infty$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = 1$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = 0$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

 **Ejercicio 1.14.** En el Ejemplo 1.14, encuentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

- a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

 **Ejercicio 1.15.** Encuentre el límite.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x + 2}{x^2 - x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - 4x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{3x^2 - 4x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x + 1}{-x + 3}$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 1}{3x^4 + 5x + 2}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{-x^2 + x}$



Se le llama a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ límite en el infinito positivo y al $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$ límite en el infinito negativo.

 **Ejemplo 1.15.** Calcule: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2)$

Solución: $x^3 - x^2 = x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2) = \infty$

Veáse Clase 4, inciso e)

 **Ejercicio 1.16.** Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x})$

 **Ejemplo 1.16.** Encuentre el límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

Solución: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = 0$


 Aplique la racionalización del denominador.

 **Ejercicio 1.17.** Encuentre el límite:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

La siguiente propiedad es fundamental:

a) Sea n número entero.

Si $a > 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n a^x = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x = 0$

De a) se deduce las siguientes fórmulas:

Sea n número entero,

b) Si $0 < a < 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n a^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x = \begin{cases} \infty & n: \text{par} \\ -\infty & n: \text{impar} \end{cases}$

c) Si $1 < c$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \log_c x = \begin{cases} \infty & (0 \leq n) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$

d) Si $0 < c < 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \log_c x = \begin{cases} -\infty & (0 \leq n) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$

e) Si $1 < c$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \log_c x = \begin{cases} 0 & (0 < n) \\ -\infty & (n \leq 0) \end{cases}$

f) Si $0 < c < 1$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \log_c x = \begin{cases} 0 & (0 < n) \\ \infty & (n \leq 0) \end{cases}$

 * **Ejercicio 1.18.** Deduce b) a f) de a).

Ejemplo 1.17. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2) 3^x$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x}{x^2 + 3x}$

Solución:

a) $(x^3 - x^2) 3^x = (1 - \frac{1}{x})(x^3 3^x)$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1$

y $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 3^x) = \infty$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2) 3^x = \infty$.

b) $\frac{\log_3 x}{x^2 + 3x} = \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} \frac{\log_3 x}{x^2}$. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x}{x^2} = 0$,

Se tiene que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x}{x^2 + 3x} = 1 \cdot 0 = 0$.

Veáse Clase 4 inciso e)

Veáse Clase 6 inciso c)

Ejercicio 1.19. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^4 - x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x + 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x) 2^x$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) \log_2 x$

Clase 8. Límite de funciones trigonométricas

Propiedad del límite 2

a) Sean $f(x) \leq g(x)$ en la cercanía del número a , salvo en a . Si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

b) Sean $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en la cercanía del número a , salvo en a . Si existen $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.



Se omite la demostración.

*** Ejercicio 1.20.** Dé un ejemplo en que $f(x) < g(x)$ en la cercanía de a salvo en a y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

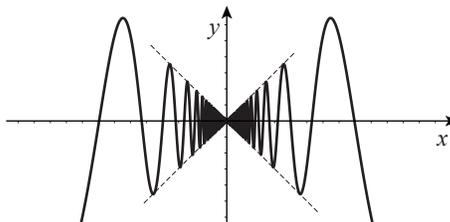
Ejemplo 1.18. Encuentre $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Solución: Como $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$, se tiene que $-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$

Ahora $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

[Por la propiedad b)]



$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \frac{1}{x} \leq 1, 0 < |x| \\ \Rightarrow -|x| &\leq |x| \sin \frac{1}{x} \leq |x|. \\ \text{Si } x > 0 & \\ -|x| &\leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|. \\ \text{Si } x < 0 & \\ -|x| &\leq -x \sin \frac{1}{x} \leq |x|. \\ \text{Luego } |x| &\geq x \sin \frac{1}{x} \geq -|x|. \end{aligned}$$



Ejercicio 1.21. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{2x}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Teorema 1.1. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$

Demostración: En la figura $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\text{PH} = \operatorname{sen} \theta$ y $\text{QA} = \tan \theta$. Por lo tanto, se tiene que:

El área S1 del $\Delta \text{OPA} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta$.

El área S2 del sector circular OPA es $\frac{1}{2} \theta$.

El área S3 del $\Delta \text{OAQ} = \frac{1}{2} \tan \theta$.

Como $S1 < S2$, se tiene que $\operatorname{sen} \theta < \theta$... (1)

Como $S2 < S3$, se tiene que $\theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$... (2)

Ahora, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $0 < \cos \theta$.

Luego de (1) y (2) se tiene que,

$$\cos \theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1 \quad \dots (3)$$

Cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, se tiene que $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y

sustituyendo $-\theta$ en (3), se tiene que;

$$\cos(-\theta) < \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1, \text{ es decir } \cos \theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1.$$

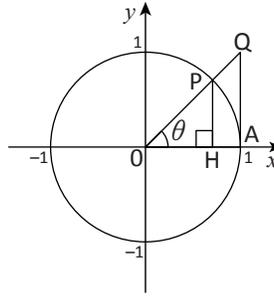
Es decir, se verifica (3) para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Ahora $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \theta = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Luego por la propiedad b)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.$$



Este Teorema es el fundamento del cálculo infinitesimal de las funciones trigonométricas. Es esencial que la unidad de medida del ángulo sea radián.



$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Clase 9. Aplicando el Teorema 1.1

 **Ejemplo 1.19.** Calcule: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Veáse Clase 2 inciso d)

 **Ejercicio 1.22.** Calcule.

a) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen } \theta}$ b) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan \theta}$

 **Ejemplo 1.20.** Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

Solución: Sea $\frac{\pi}{2} - x = t$. Entonces $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t \rightarrow 0$ y

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \text{sen } t,$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1.$


De ahora en adelante se utilizará el resultado de a) y el Teorema 1.1 indistintamente. La variable puede ser cualquier letra.

 **Ejercicio 1.23.** Calcule. a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen } x}{\pi - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

 **Ejemplo 1.21.** Calcule. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x}$

Solución: a) Sea $2x = \theta$. Entonces $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \theta \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x} \cdot 2 = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 2 \cdot 1 = 2$$

b) Sea $2x = \alpha$ y $3x = \beta$. Entonces $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha \rightarrow 0 \Leftrightarrow \beta \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\text{sen } 3x} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta}{\text{sen } \beta} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$


Si se puede, calcule sin utilizar α y β : $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\text{sen } 3x} \\ = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

 **Ejercicio 1.24.** Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 4x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos 2x}$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre el límite.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^3 + 2x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\sqrt{x-1}}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \log_3 \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$ Clase 2

2. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1}}$ Clase 3

3. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 4$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + ax + b} = -\frac{1}{5}$ Clase 3

*c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 3}}{x^2 + ax + b} = \frac{3}{10\sqrt{5}}$

4. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\cos x|}$ Clase 4

5. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x(x-1)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x^2 - x - 2}$ Clase 5

6. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{2x^3 - 2x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x}{x^3 - x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x}{x - 3}$ Clase 6

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x})$

7. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 3^x$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log_2 x$ Clase 7

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{\log_2 x}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - x^3)$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \log_{\frac{1}{3}} x)$

8. Calcule.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log_2 x}$ Clase 8

9. Calcule.

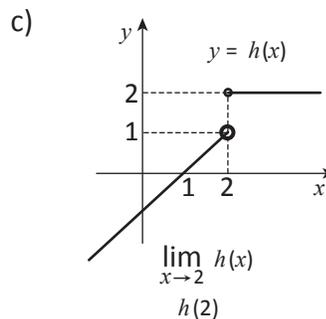
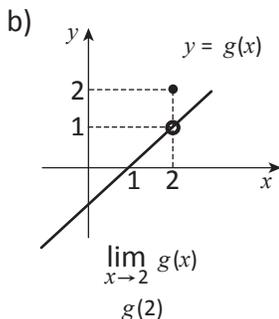
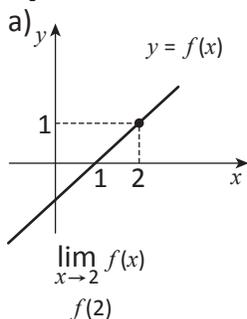
a) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x + \pi}$ b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{x - \pi}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} 4x}$ Clase 9

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

Lección 2. Continuidad de funciones

Clase 1. Continuidad en el punto

 **Ejemplo 2.1.** Encuentre lo que se pide.



Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ no existe
 $f(2) = 1$ $g(2) = 2$ $h(2) = 2$

Definición. Continuidad en el punto

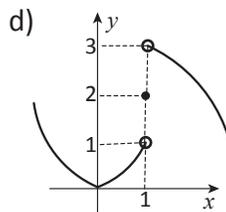
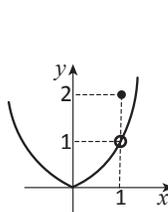
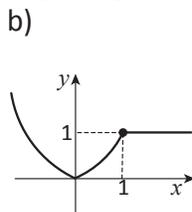
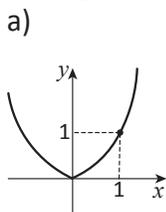
Sea $y = f(x)$ una función, $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ cuando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Nota: Aplicando la Explicación 2 de la Clase 1.1 de la Lección 1, la definición tiene la forma siguiente: $f(x)$ es continua en el punto a , cuando se verifica lo siguiente: Para cualquier número $\epsilon > 0$, existe número $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.



Ejercicio 2.1. Elija las gráficas de funciones que son continuas en $x = 1$



Propiedad de la continuidad

Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces las siguientes son continuas en $x = a$:

a) $y = f(x) + g(x)$

b) $y = f(x) - g(x)$

c) $y = kf(x)$, (k : número real)

d) $y = f(x)g(x)$

e) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(a) \neq 0$)



El signo “o” significa que el punto no pertenece a la gráfica. El signo “•” significa que sí pertenece a la gráfica.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 2$$

En el Ejemplo 2.1 solo $f(x)$ es continua en 2.

$f(x)$ debe ser definida en a y su alrededor.

Demostración de que $y = f(x) + g(x)$ es continua.

De hipótesis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

De a) de la Clase 1.2, se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a).$$



Ejercicio 2.2. Demuestre la continuidad de los demás casos de la propiedad.

Clase 2. Continuidad en el intervalo

Definición de continuidad en el intervalo

$f(x)$ es continua en $x = a$ del intervalo $[a, b]$ cuando $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

$f(x)$ es continua en $x = b$ del intervalo $(a, b]$ cuando $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo, cuando es continua en todos los puntos del intervalo

Propiedad de las funciones continuas.

Funciones continuas tienen la misma propiedad que se explicó en la clase 1.

Además:

f) Si $f(x)$ es continua, entonces $|f(x)|$ lo es.

g) Si $f(x)$ es continua, entonces $\sqrt{f(x)}$ lo es donde $f(x) \geq 0$.

h) Si $f(x)$ es continua y tiene su inversa f^{-1} , entonces f^{-1} lo es.

Ejemplos de funciones continuas:

1. Funciones polinómicas
2. Funciones racionales
3. Funciones trigonométricas y sus inversas
4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición Valor máximo y mínimo

El valor M (respectivamente m) es el máximo (respectivamente mínimo) de la función $y = f(x)$ cuando:

$f(x) \leq M$ [respectivamente $m \leq f(x)$] en su dominio.

Existe un valor $x = a$ en su dominio tal que $f(a) = M$ (respectivamente $f(a) = m$).

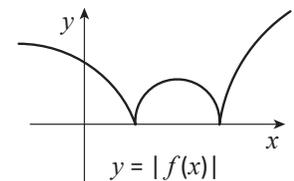
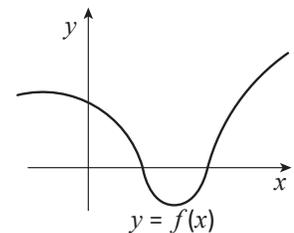
Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.

Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, entonces esta función tiene valor máximo y mínimo en este intervalo.

[A]



Intuitivamente la continuidad significa que la gráfica no está cortada.

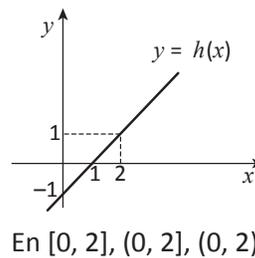
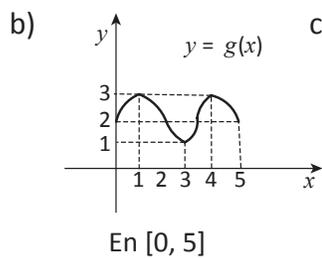
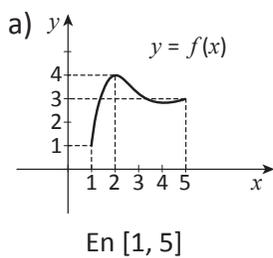


[B]



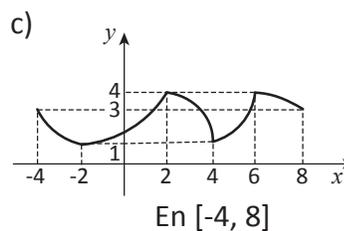
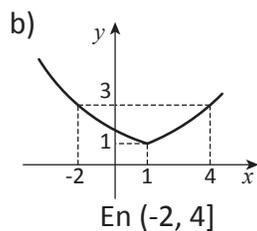
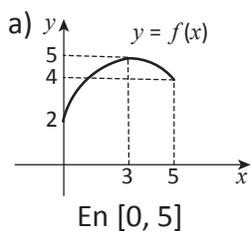
La condición "cerrado" es crucial como se ve en el Ejemplo 2.2. Se omite demostración.

Ejemplo 2.2. Encuentre el valor máximo y/o mínimo en el intervalo indicado si existen.



Solución: a) máximo $f(2) = 4$, mínimo $f(1) = 1$
 b) máximo $g(1) = g(4) = 3$, mínimo $g(3) = 1$
 c) En $[0, 2]$ máximo $h(2) = 1$, mínimo $h(0) = -1$
 En $(0, 2]$ máximo $h(2) = 1$, mínimo no existe.
 En $(0, 2)$ máximo no existe, mínimo no existe.

Ejercicio 2.3. Encuentre el valor mínimo y/o máximo en el intervalo indicado si existen.



Clase 3. Teorema del valor intermedio

Teorema del valor intermedio

Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$. Sea $f(a) \neq f(b)$ y $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$.

Ejemplo 2.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. La función $y = f(x)$ es continua en $[1, 2]$. Por otra parte $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$. Como $f(1) < 0 < f(2)$, por el Teorema del valor medio existe c en $(1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Ejercicio 2.4. Demuestre que cada ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

- a) $2x^3 + x^2 - 4 = 0$ $(1, 2)$ b) $\log_2 x + x - 2 = 0$ $(1, 2)$
 c) $2^x - 3x = 0$ $(3, 4)$ d) $\sin x - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$



Cuando se trata de máximo y mínimo se indica el valor de x donde la función toma estos valores.



El mínimo no existe porque $h(x)$ toma valores mayores que -1 y que están en cualquier cercanía de -1 .



Se omite la demostración, para la cual hay que definir el conjunto de números reales de manera rigurosa.

Ejercicios de la lección

1. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

a) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$ (1, 2) b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 2x - 3 = 0$ (1, 4)

c) $(\frac{1}{3})^x - 2x = 0$ (0, 1) d) $\cos x - 2x = 0$ $(0, \frac{\pi}{4})$

Clase 3

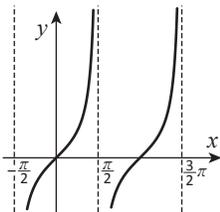
Lección 3. Asíntotas

Clase 1. Asíntotas

Se le denomina **asíntota** a una recta a la cual la gráfica se acerca sin límite y sin tocarla.

Ejemplos de asíntotas verticales:

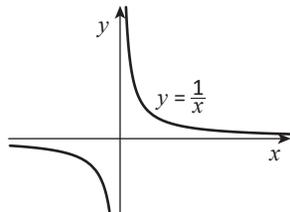
a) $y = \tan x$



$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

(n : número entero)

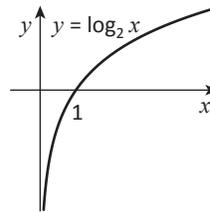
b) $y = \frac{1}{x}$



Asíntotas verticales

$$x = 0$$

c) $y = \log_2 x$



$$x = 0$$

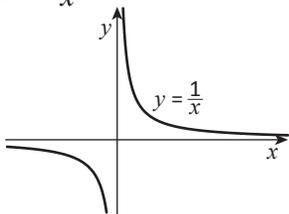


Este tipo de asíntotas aparece en el límite del dominio de la función.

En b) $y = 0$ es la asíntota horizontal.

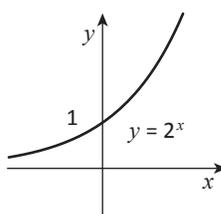
Ejemplos de asíntotas horizontales.

a) $y = \frac{1}{x}$



$$y = 0$$

b) $y = 2^x$



$$y = 0$$

Asíntotas horizontales

En la Unidad IV, se aprenderán otro tipo de asíntotas.



Ejercicio 3.1. Dibuje la gráfica. Encuentre la ecuación de la asíntota.

a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \frac{1}{x+1}$ c) $y = \sec x$ d) $y = 3^x - 1$ e) $y = \log_3(x+1)$

Problemas de la unidad A

1. Calcule.

Clase 1.7

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log_2 x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\sqrt{x}}}{x^2}$

2. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

Clase 2.3

a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2x = 0 \quad \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

b) $\tan x = 3x \operatorname{sen} x \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

Problemas de la unidad B

1. Demuestre que para cada número negativo k , la ecuación $\log_2 x = kx$ tiene solución en el intervalo $(0, 1)$.

Diferenciación e integrales de funciones polinómicas

- Lección 1: Derivadas de funciones polinómicas
- Lección 2: Aplicación de derivadas
- Lección 3: Integrales

Algo de historia



Isaac Newton
(1642 – 1727)

Newton fue un físico matemático inglés. Nació en Woolsthorpe el 25 de diciembre de 1642. Estudió en la Universidad de Cambridge, donde recibió la clase de Isaac Barrowa quien reconoció el talento de Newton. Durante los años 1664 y 1666, cuando estuvo en su casa natal para evitar peste, hizo tres descubrimientos magníficos, es decir el cálculo diferencial, la ley de la gravitación universal y la descomposición de la luz. Sus obras principales fueron: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural) y *Opticks* (Óptica).

Su mayor contribución a la matemática es el descubrimiento del cálculo infinitesimal, el cual comparte con su contemporáneo Leibniz. En los siguientes siglos los matemáticos desarrollaron este método y ha sido uno de las herramientas matemáticas más útiles.

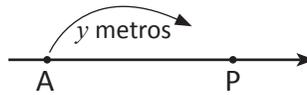
Newton falleció en Londres el 20 de marzo de 1727.

Fuente: E. T. Bell: Men of mathematics

Lección 1. Derivadas de funciones polinómicas

Clase 1. Velocidad en el instante

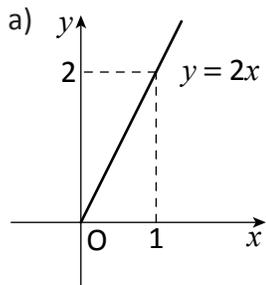
Ejemplo 1.1. En la recta numérica, un punto P sale del punto A y se mueve hacia la derecha. La distancia y metros, entre los puntos P y A después de x segundos está dada como $y = 2x$.



[A] Relación entre la distancia, el tiempo y la velocidad.

- Haga la gráfica de la función $y = 2x$ ($x \geq 0$).
- Encuentre la velocidad metros/segundo (m/s) del punto P.

Solución:



b)

| | | |
|-----------------------------|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 0 | 2 |
| Δx | 1 | |
| Δy | 2 | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | 2 | |

Respuesta:
2 metros/segundo ó
2m/s



Δx , representa la diferencia (o cambio) de x . Se aplica lo mismo a Δy .

$$\Delta x = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta y = 2 - 0 = 2$$

Nota: En este ejemplo, la velocidad no cambia y

velocidad = la pendiente de la gráfica.

Ejemplo 1.2. Una bolita P sale del punto A cae en la pendiente. La distancia y metros entre A y P después de x segundos está dada como $y = x^2$.

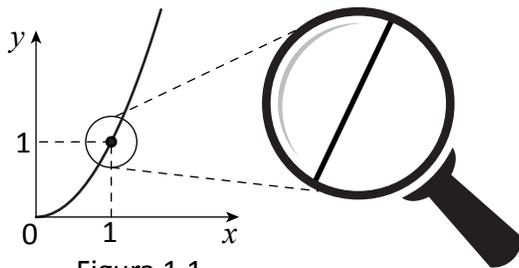
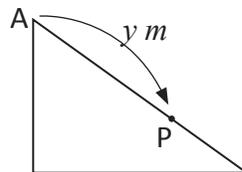


Figura 1.1

Ahora la gráfica de $y = x^2$ no es una recta, lo que quiere decir, la velocidad va cambiando. Sin embargo, si se agranda la parte alrededor del punto (1, 1) la gráfica parece casi una recta. Ahora se trata de encontrar su "pendiente".

Encuentre la pendiente completando la tabla.

| | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|-----|---|------|---|-------|
| x | 1 | 2 | 1 | 1.1 | 1 | 1.01 | 1 | 1.001 |
| y | | | | | | | | |
| Δx | | | | | | | | |
| Δy | | | | | | | | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|-----|---|------|---|-------|---|
| x | 0 | 1 | 0.9 | 1 | 0.99 | 1 | 0.999 | 1 |
| y | | | | | | | | |
| Δx | | | | | | | | |
| Δy | | | | | | | | |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | | | | | | | | |

Solución:

| | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|------|---|--------|---|----------|
| x | 1 | 2 | 1 | 1.1 | 1 | 1.01 | 1 | 1.001 |
| y | 1 | 4 | 1 | 1.21 | 1 | 1.0201 | 1 | 1.002001 |
| Δx | | 1 | | 0.1 | | 0.01 | | 0.001 |
| Δy | | 3 | | 0.21 | | 0.0201 | | 0.002001 |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | | 3 | | 2.1 | | 2.01 | | 2.001 |

→ 2

| | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|------|------|--------|--------|----------|----------|
| x | 0 | 1 | 0.9 | 1 | 0.99 | 1 | 0.999 | 1 |
| y | 0 | 1 | 0.81 | 1 | 0.9801 | 1 | 0.998001 | 1 |
| Δx | | 1 | | 0.1 | | 0.01 | | 0.001 |
| Δy | | 1 | | 0.19 | | 0.0199 | | 0.001999 |
| $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | | 1 | | 1.9 | | 1.99 | | 1.999 |

→ 2

Respuesta: La “pendiente” es 2.



Este corresponde a la “velocidad en $x = 1$ ”.

Clase 2. Definición de derivada

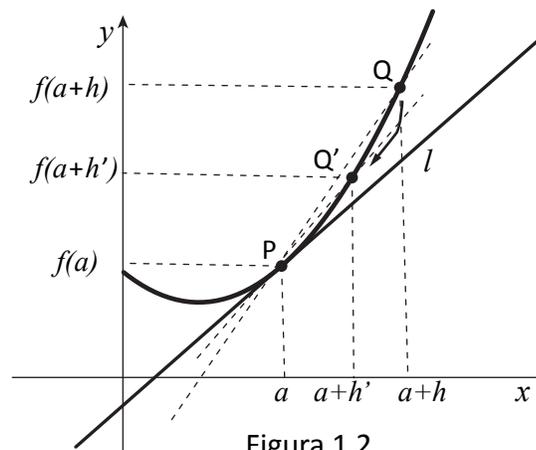
La Figura 1.2 muestra la gráfica de una función. Se toman dos puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a + h, f(a + h))$ en la gráfica. La pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Ahora el punto Q se acerca al punto P. Entonces la pendiente de la recta se acerca a la pendiente de la recta l , es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \text{la pendiente de } l$$

La función que corresponde el valor de $x = a$, a este límite se llama **derivada** de $f(x)$.





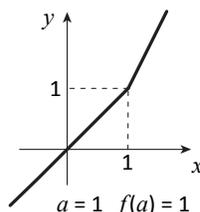
Definición de derivada

Sea $f(x)$ una función. Cuando existe el límite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ se le denomina derivada de $f(x)$.

Se denomina **diferenciación** al encontrar la derivada.

Nota: Hay funciones que no tienen derivada.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \leq x) \end{cases}$



$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ no existe.}$$

! Ejemplo 1.3. Sea $f(x) = x^2$. Encuentre $f'(x)$.

Solución: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+1)h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$

Nota: Si se sustituye $x = 1$ en $f'(x)$, se obtiene $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, el valor que se ha obtenido en el Ejemplo 1.2.

✎ Ejercicio 1.1. Encuentre $f'(x)$ y $f'(1)$.

- a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = x^2 + 3x$

Nota: Una función diferenciable es una función continua.

* Demostración: $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \right\}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$

Luego $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Otras notaciones

$$\frac{d}{dx} f(x).$$

Cuando se trata de la función $y = f(x)$

y' , $\frac{dy}{dx}$ (derivada de y con respecto a x).

Cuando $f(x)$ tiene su derivada se dice que $f(x)$ es **diferenciable (derivable)**.

$$f(1+h) = \begin{cases} 1+h & (h < 0) \\ 2(1+h)-1 & (0 \leq h) \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\{2(1+h) - 1\} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 + 2h - 2}{h} = 2$$

Para encontrar $f'(1)$ basta sustituir $x = 1$ en $f'(x)$.

Clase 3. Cálculo de la derivada

Propiedad de derivada

- a) c es constante $\Rightarrow (c)' = 0$
- b) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ k : constante
- c) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$
- d) $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

Demostración: a) Sea $f(x) = c$. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

b) Sea $g(x) = kf(x)$; $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h}$

$$= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x)$$

c) y d) se demuestran utilizando Matemática III, Unidad II, Lección 1, Clase 2.

De la propiedad anterior, se reduce el cálculo de la derivada de la función polinómica al de monomios. En cuanto a esto último, se tiene la siguiente:

Derivada de monomios

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n: \text{número natural})$$

* Demostración. Primero se tiene la siguiente igualdad

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-1-i}b^i + \dots + b^{n-1})$$

$(n: \text{número natural})$

Para la demostración desarrolle el lado derecho.

Luego, sean $x + h = a$ y $x = b$.

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \dots + x^{n-1})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (a^{n-1} + a^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$



Ejemplo 1.4. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

Solución: $f'(x) = (2x^3 - 3x + 4)'$ $f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 3$

$$= (2x^3)' - (3x)' + (4)'$$

$$= 2(x^3)' - 3(x)'$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 3 \cdot x^{1-1}$$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1$$

$$= 6x^2 - 3$$



$(c)'$ significa derivada de c como función de x .

Se verifica la inversa de a).

$f'(x) = 0$ en un intervalo $\Rightarrow f(x)$ es constante en este intervalo.

Se omite demostración.

III, II, Clase 2.

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$



$$a - x = h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} a = x$$

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.

 **Ejercicio 1.2.** Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

- a) $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
c) $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + 4x$ d) $f(x) = 2x^3 - 3$

 **Ejemplo 1.5.** Sea $y = (2x - 1)(x + 3)$. Encuentre y' .

Solución: $y = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 5x - 3$
 $y' = 4x + 5$

 **Ejercicio 1.3.** Encuentre y' o $f'(x)$.

- a) $y = (3x + 2)(x + 1)$ b) $y = (2x - 1)^2$
c) $f(x) = (x^2 + 2x)(x - 1)$ d) $f(x) = 4(x + 3)(x - 3)$

 **Ejemplo 1.6.** Sea $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$. Encuentre $\frac{d}{dr} V(r)$.

Solución: $\frac{d}{dr} V(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$



$\frac{d}{dr}$ quiere decir “derivar con respecto a r ”.

 **Ejercicio 1.4.** Encuentre la derivada:

- a) $f(r) = \pi r^2$, $\frac{d}{dr} f(r)$ b) $g(s) = 3s^2 - s$, $\frac{d}{ds} g(s)$
c) $y = \pi r^2 h$, $\frac{dy}{dr}$ d) $z = -5y^3 + 3y^2$, $\frac{dz}{dy}$

Ejercicios de la lección

1. Calcule la derivada aplicando la definición.

- a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = x^2 - x$

Clase 2

2. Encuentre lo que piden.

- a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $f'(x)$, $f'(-1)$

- b) $g(x) = (2x + 3)(3x - 1)$ $g'(x)$, $g'(-2)$

- c) $h(t) = \frac{1}{2} gt^2$ $\frac{d}{dt} h(t)$, $\frac{d}{dt} h(1)$

Clase 3

Lección 2. Aplicación de derivada

Clase 1. Tangente

Definición de tangente

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Sea $P(a, f(a))$ un punto de su gráfica. La tangente de la gráfica en el punto P es la línea que pasa por P cuya pendiente es $f'(a)$.

Ecuación de tangente

La tangente de la gráfica $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es
 $y = f'(a)(x - a) + f(a) \dots (1)$

Demostración: la pendiente de (1) es $f'(a)$.
(1) pasa por el punto $(a, f(a))$.

Ejemplo 2.1. Encuentre la tangente a la gráfica de $y = x^2 - x + 3$ en el punto $(2, 5)$ de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2 - x + 3$.
 $f'(x) = 2x - 1$. $f'(2) = 3$

La tangente es una línea que pasa por $(2, 5)$ y cuya pendiente es 3.
Por lo tanto,
 $y - 5 = 3(x - 2)$, $y = 3x - 1$ (Respuesta)

Ejercicio 2.1. Encuentre la tangente de las siguientes gráficas en el punto dado.

- a) $y = x^2 - 3x + 4$, $(1, 2)$ b) $y = -3x^2 + 4x + 1$, $(1, 2)$
c) $y = -x^3 + 2x^2 + 1$, $(-1, 4)$ d) $y = x^3 - 3x$, $(-1, 2)$

Ejemplo 2.2. Encuentre la tangente de la gráfica $y = x^2$ que pasa por el punto $Q(3, 8)$ fuera de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2$. Sea (a, a^2) el punto de tangencia.

La pendiente de la tangente es $f'(a) = 2a$.

Como pasa por el punto (a, a^2) , la tangente es:

$$y = 2a(x - a) + a^2, \quad y = 2ax - a^2 \quad \dots(1)$$

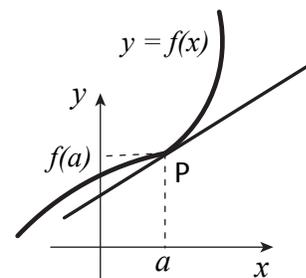
Esta línea pasa por el punto $(3, 8)$, por lo tanto, sustituyendo $(3, 8)$ en (1):

$$8 = 2a \cdot 3 - a^2, \quad a^2 - 6a + 8 = 0, \quad (a - 2)(a - 4) = 0$$
$$a = 2 \text{ y } 4$$

Sustituyendo $a = 2$ en (1), se obtiene que: $y = 4x - 4$

Sustituyendo $a = 4$ en (1), se obtiene que: $y = 8x - 16$

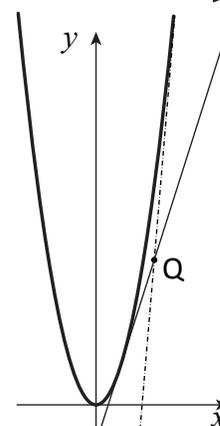
Respuesta: $y = 4x - 4$ y $y = 8x - 16$



La línea que pasa por (a, b) y cuya pendiente es m es:

$$y - b = m(x - a)$$

[Matemática I. Unidad IV]



Los puntos de tangencia:
sustituyendo,

$$a = 2, 4 \text{ en } (a, a^2)$$

$$(2, 4) \text{ y } (4, 16)$$



* **Ejercicio 2.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto dado.

a) $y = x^2$, (2, 3)

b) $y = -x^2 + 3x$, (2, 3)

c) $y = -x^2$, (2, 5)

d) $y = 3x^2 - 1$, (1, -1)

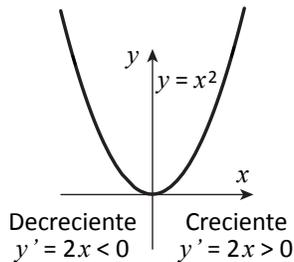
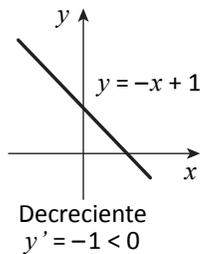
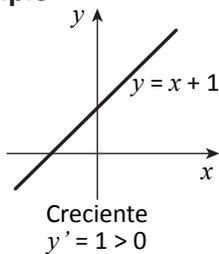
Clase 2. Tabla de variación

Definición: En un intervalo una función $f(x)$ es:

Creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplo



Como se ve en este ejemplo, hay una relación entre el cambio del valor de una función y el signo de su derivada.



Teorema: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) .

$f'(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a, b]$

$f'(x) < 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Para la demostración se utiliza el Teorema del valor medio que se aprenderá en la Unidad IV.



Ejemplo 2.3. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Investigue el signo de $f'(x)$ y el cambio de valor de $f(x)$.

Solución: $f'(x) = 2x - 4, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Por lo tanto, se tiene que:

$x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente

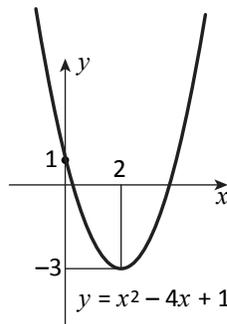
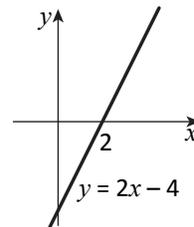
$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$

$2 < x \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

La siguiente tabla representa el resultado del Ejemplo 2.3.

| x | $x < 2$ | 2 | $2 < x$ |
|---------|---------|----|---------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | -3 | ↗ |

En este libro se le llama a esta tabla: tabla de variación.



↘ significa decreciente.

↗ significa creciente.

 **Ejercicio 2.3.** Haga la tabla de variación.

- a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = 3x^2 - 6x$
 c) $f(x) = -x^2 + 2x$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

 **Ejemplo 2.4.** Haga la tabla de variación de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0$, $x = -1$ y 1

| | | | | | |
|---------|----------|------|--------------|-----|---------|
| x | $x < -1$ | -1 | $-1 < x < 1$ | 1 | $1 < x$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 2 | ↘ | -2 | ↗ |

Los signos
 $x < -1$, $-1 < x < 1$ y $1 < x$
 se pueden omitir.

 **Ejercicio 2.4.** Haga la tabla de variación.

- a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$
 c) $f(x) = -x^3 + 3x$ d) $f(x) = -x^3 - 6x^2$

Clase 3. Extremos Relativos

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en el punto x_0 de su dominio. Se le denomina a $f(x_0)$:

máximo relativo si $f(x) \leq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

mínimo relativo si $f(x) \geq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0



Se llama también:
 máximo local,
 mínimo local.

Ambos se llaman extremo relativo (local).

 **Ejemplo 2.5.** Haga la tabla de variación de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ y encuentre los extremos relativos.

Solución: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$
 $= -3(x-3)(x+1) = 0$, $x = 3$ y -1

| | | | | | |
|---------|---|------|---|-----|---|
| x | | -1 | | 3 | |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↘ | -5 | ↗ | 27 | ↘ |

máximo relativo $f(3) = 27$
 mínimo relativo $f(-1) = -5$

En general

| | | | |
|---------|---|--------|---|
| x | | a | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ |



máximo relativo

| | | | |
|---------|---|--------|---|
| x | | a | |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ |



mínimo relativo

 **Ejercicio 2.5.** Haga la tabla de variación y encuentre los extremos relativos.

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$
 c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x$ d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

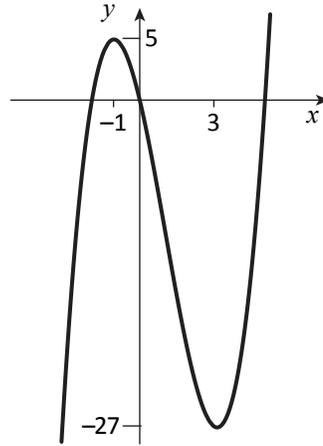
Dése cuenta del cambio de signo de la derivada.

Clase 4. Gráfica de función de tercer grado (1)

Ejemplo 2.6. Encuentre los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ y haga la gráfica.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
 $= 3(x - 3)(x + 1) = 0$
 $x = 3$ y -1

| | | | | | |
|---------|---|-----------------|---|-----------------|---|
| x | | -1 | | 3 | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 5 | ↘ | -27 | ↗ |
| | | Máximo relativo | | Mínimo relativo | |



Ejercicio 2.6. Encuentre los extremos relativos y haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 10$

c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$

d) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$



“La gráfica de $f(x)$ ” quiere decir la gráfica de $y = f(x)$.

Para dibujar la gráfica se necesitan los extremos relativos, si existen.

Para dibujar la gráfica hay que unir los puntos que corresponden a los extremos relativos, el intercepto en y y cuando se pueda los interceptos en x .

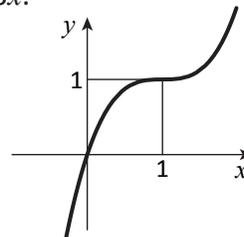
De igual forma se deben hacer los trazos siguiendo el comportamiento de $f(x)$ cuando crece o decrece.

Clase 5. Gráfica de función de tercer grado (2)

Ejemplo 2.7. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$

| | | | |
|---------|---|---|---|
| x | | 1 | |
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 1 | ↗ |



Nota: $f'(a) = 0$, no siempre significa que $f(x)$ tiene su extremo relativo en $x = a$. Hay que investigar el signo del valor alrededor de $x = a$.

Hay cuatro casos:

| | | | |
|---------|---|--------|---|
| x | | a | |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $f(a)$ | ↗ |

mínimo relativo

| | | | |
|---------|---|--------|---|
| x | | a | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↘ |

máximo relativo

| | | | |
|---------|---|--------|---|
| x | | a | |
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $f(a)$ | ↗ |

| | | | |
|---------|---|--------|---|
| x | | a | |
| $f'(x)$ | - | 0 | - |
| $f(x)$ | ↘ | $f(a)$ | ↘ |

↑ No son extremos relativos ↑



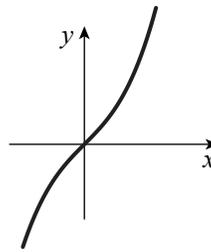
Esta función no tiene extremos relativos.

En $(1, 1)$ la tangente es horizontal.

Ejemplo 2.8. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$

| | |
|---------|---|
| x | |
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | ↗ |



Esta función no tiene extremos relativos.

Ejercicio 2.7. Haga la gráfica.

- a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ b) $y = -x^3$ c) $y = x^3 + x$ d) $y = -x^3 - 3x$

Clase 6. Extremos de funciones

Ejemplo 2.9. Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1, 4]$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$, $x = 0, 2$

| | | | | | | | |
|---------|----|---|---|---|----|---|----|
| x | -1 | | 0 | | 2 | | 4 |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | -4 | ↗ | 0 | ↘ | -4 | ↗ | 16 |

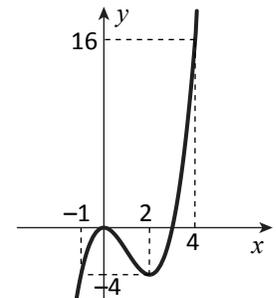
máximo 16 ($x = 4$)
mínimo -4 ($x = -1, 2$)

Ejercicio 2.8. Encuentre el máximo y el mínimo en el intervalo dado.

- a) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $[-2, 2]$ b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$, $[0, 4]$



Comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.



Clase 7. Aplicación de los extremos

Ejemplo 2.10. Hay una chapa de zinc de forma cuadrada cuyo lado mide 6 cm. Cortando los cuadrados del mismo tamaño de las cuatro esquinas, se hace un recipiente sin tapa de la forma paralelepípedo rectangular. Para que la capacidad sea la mayor posible, ¿cuánto deben medir los lados de los cuadrados que se cortan?

Solución: Sea x cm la medida de los lados de los cuadrados, x debe pertenecer al intervalo $(0, 3)$. Sea y cm³ la capacidad del recipiente elaborado.

La base del recipiente tiene la forma de cuadrado cuyo lado mide: $(6 - 2x)$ cm. La altura mide x cm, por lo tanto: $y = (6 - 2x)^2 x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

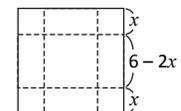
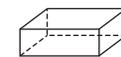
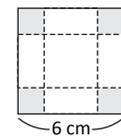
$$y' = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1, 3$$

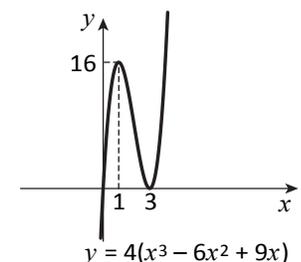
| | | | | | |
|------|---|---|----|---|---|
| x | 0 | | 1 | | 3 |
| y' | | + | 0 | - | |
| y | | ↗ | 16 | ↘ | |

Respuesta 1 cm.

Ejercicio 2.9. En el Ejemplo 2.10, si la chapa mide 5 cm de ancho y 8 cm de largo, ¿cuánto deben medir los lados de los cuadrados que se cortan?



Hay que aclarar el dominio de x .



Clase 8. Aplicación a las ecuaciones (1)

Ejemplo 2.11. Encuentre el número de distintas soluciones reales de la siguiente ecuación:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Para un número real a ,

$x = a$ es una solución de $f(x) = 0$

\Leftrightarrow el punto $(a, 0)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, por lo tanto:

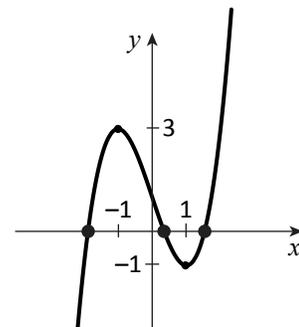
(el número de distintas soluciones reales de $f(x) = 0$) =

(el número de distintos puntos que la gráfica de $y = f(x)$ tiene común con el eje x).

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0, \quad x = 1, -1$$

| | | | | | |
|---------|------------|----|------------|----|------------|
| x | | -1 | | 1 | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \nearrow | 3 | \searrow | -1 | \nearrow |

Como la gráfica tiene tres puntos distintos comunes con el eje x , la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.



Ejercicio 2.10. Encuentre el número de distintas soluciones reales.

a) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ c) $x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$ d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 0$

Clase 9. Aplicación a las ecuaciones (2)

Ejemplo 2.12. Sea a un número real. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - a = 0 \quad \dots (1)$$

Solución: (1) es equivalente a: $x^3 - 3x^2 = a$

Las soluciones reales de (1) corresponde a los puntos comunes entre

$$y = x^3 - 3x^2 \quad \text{y} \quad y = a.$$

Por lo tanto:

(el número de las distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$) =

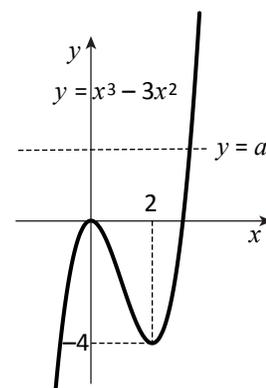
(el número de los puntos comunes entre dos gráficas $y = f(x)$ y $y = a$)

$$y = x^3 - 3x^2$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

| | | | | | |
|---------|------------|---|------------|----|------------|
| x | | 0 | | 2 | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \nearrow | 0 | \searrow | -4 | \nearrow |

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2$



| Valores de a | Número de distintas soluciones reales |
|----------------|---------------------------------------|
| $a < -4$ | 1 |
| $a = -4$ | 2 |
| $-4 < a < 0$ | 3 |
| $a = 0$ | 2 |
| $0 < a$ | 1 |

 **Ejercicio 2.11.** Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación:

a) $x^3 + 6x^2 - a = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 15x - a = 0$ c) $x^3 - 9x^2 + 15x + a = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x + a = 0$

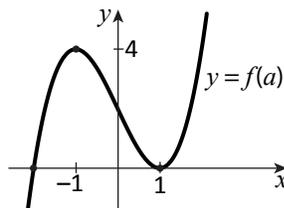
Clase 10. Aplicación a la demostración de inecuación

 **Ejemplo 2.13.** Demuestre que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

| | | | | | |
|---------|------------|----|------------|---|------------|
| x | | -1 | | 1 | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | \nearrow | 4 | \searrow | 0 | \nearrow |



Se puede omitir la parte que corresponde a $(-\infty, 1)$.

De la gráfica se sabe que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

 **Ejercicio 2.12.** Demuestre la inecuación en el intervalo dado.

a) $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$ b) $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$
 c) $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$ d) $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$

Ejercicios de la lección

- Encuentre la tangente de la gráfica en el punto P. Clase 1
 - $y = 2x^2 - 4x + 1$, P(2,1)
 - $y = -2x^2 + 5x - 2$, P(-1, -9)
 - $y = 2x^3 - 4x$, P(1, -2)
 - $y = -2x^3 - 4x + 5$, P(0, 5)
- Encuentre la tangente de la gráfica que pasa por el punto Q, fuera de la gráfica.
 - $y = 2x^2 + x$, Q(1, -5)
 - $y = -2x^2 + x$, Q(2, -4)
 - $y = -x^2 - 2x + 1$, Q(1, 2)
 - $y = x^2 + 4x - 2$, Q(3, -6)
- Haga la gráfica teniendo los extremos relativos en cuenta. Clase 4 y 5
 - $y = -2x^3 + 3x^2 + 36x$
 - $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 50$
 - $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x$
 - $y = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
 - $y = -x^3 - 2x + 1$
 - $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$
- Encuentre el máximo y el mínimo en cada intervalo indicado. Clase 6
 - $y = x^3 - 3x$, 1) $[-2, 2]$ 2) $[-2, 1]$ 3) $[-3, 0]$
 - $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 5$, 1) $[0, 8]$ 2) $(0, 7)$ 3) $[-1, 5]$
- Encuentre el número de distintas soluciones reales. Clase 8
 - $2x^3 - 9x^2 - 10 = 0$
 - $x^3 - 12x - 16 = 0$
- Investigue el número de distintas soluciones reales cuando el valor del número real a varía. Clase 9

$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 3 + a = 0$$
- Demuestre la inecuación. Clase 10

$$2x^3 + 5 \geq 3x^2 + 36x \text{ si } x \geq 5$$

Lección 3. Integrales

Clase 1. Integral indefinida

La Figura 3.1 muestra el conjunto de las funciones cuya derivada es $2x$.

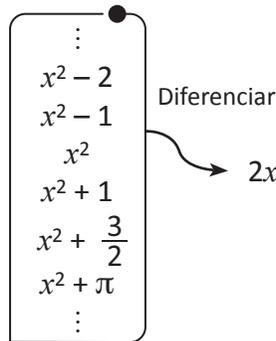
Todas las funciones tienen la forma:

$$x^2 + C; \quad C: \text{constante}$$

(Demostración: sea $F'(x) = 2x$.

Entonces $\{F(x) - 2x\}' = 0$.

De la nota en Clase 1.3, se sabe que $F(x) - x^2 = C$ Figura 3.1



A la función $x^2 + C$ se le denomina **función primitiva**

de $2x$ y se denota mediante $\int 2x \, dx$, es decir:

$$\int 2x \, dx = x^2 + C.$$

Generalmente si $F'(x) = f(x)$, se le llama a $F(x)$ función primitiva de $f(x)$.

A una función $f(x)$ corresponde varias funciones y todas tienen la forma:

$$F(x) + C \quad (C: \text{constante}).$$

Para representar la función primitiva de $f(x)$ en general se utiliza la notación $\int f(x) \, dx$.

En resumen:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Función primitiva de potencia de x

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Demostración: $\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1} x^{(n+1)-1} = x^n$

Ejercicios 3.1. Calcule.

a) $\int dx$

b) $\int x \, dx$

c) $\int x^2 \, dx$

d) $\int x^3 \, dx$

Se llama también anti-derivada. Encontrar la función primitiva es lo que se dice **integrar**. A la constante C se le denomina **constante de integración**.

A $\int f(x) \, dx$ se le llama **integral indefinida**. A $f(x)$ se le denomina integrando.

En a) en lugar de $\int 1 \, dx$ se escribe $\int dx$.

Clase 2. Propiedad de la integral indefinida

Propiedad de integral indefinida

$$\int 0 dx = C$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad k: \text{constante}$$

$$\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Demostración: Al derivar ambos lados utilizando la propiedad de derivada (Clase 1.3) se obtiene las mismas funciones.

 **Ejemplo 3.1.** Calcule: $\int (x^2 - 3x + 4) dx$.

Solución:
$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x + 4) dx &= \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x + C \quad (C: \text{constante de integración}) \end{aligned}$$

 **Ejercicio 3.2.** Calcule.

a) $\int (x^2 - 5x + 3) dx$ b) $\int (3x^2 - 4x - 1) dx$
c) $\int (x^3 - 2x^2 + 5) dx$ d) $\int (-6x^2 + 8x - 5) dx$

 **Ejemplo 3.2.** Calcule: $\int (x + 2)(2x - 1) dx$.

Solución:
$$\begin{aligned} \int (x + 2)(2x - 1) dx &= \int (2x^2 + 3x - 2) dx \\ &= \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 2x + C \quad (C: \text{constante de integración}) \end{aligned}$$

 **Ejercicio 3.3.** Calcule.

a) $\int (x - 3)(2x + 1) dx$ b) $\int (3x + 1)(3x - 1) dx$
c) $\int (2x + 3)(3x - 1) dx$ d) $\int (3x - 2)(3x + 4) dx$

 **Ejemplo 3.3.** Calcule: $\int xt dt$.

Solución:
$$\begin{aligned} \int xt dt &= x \int t dt = x \left(\frac{1}{2} t^2 + C \right) \\ &= \frac{1}{2} x t^2 + C' \quad (C': \text{Constante de integración}) \end{aligned}$$

Nota: Como x es un constante, es mejor utilizar signo más sencillo: C' .

 **Ejercicio 3.4.** Calcule.

a) $\int 3t^2 dt$ b) $\int gt dt$ c) $\int 4\pi r^2 dr$ d) $\int xy^2 z dy$

 * **Ejemplo 3.4.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

$$F'(x) = 4x - 5, \quad F(1) = 2.$$

Solución: $F(x) = \int (4x - 5) dx = 2x^2 - 5x + C$

Sustituyendo $x = 1$ en ambos lados, se tiene que: $2 = C - 3$, $C = 5$.

Luego $F(x) = 2x^2 - 5x + 5$ (Respuesta)

 * **Ejercicio 3.5.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

a) $F'(x) = 2x + 1$ $F(0) = 3$ b) $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $F(1) = -2$



En la igualdad que contiene integral indefinida, se entiende que ambos lados coinciden cuando se toman valores de constante de integral adecuadamente.

No es necesario utilizar diferentes constantes para cada integral indefinida. Basta una.



Primero desarrolle el integrando.



dt significa integrar con respecto a la variable t . Se considera constante la variable x .

Clase 3. Integral definida

Sea $F'(x) = f(x)$. Sean a y b dos números.

Al valor $F(b) - F(a)$ se le denomina **integral definida** de $f(x)$ y se denota mediante $\int_a^b f(x) dx$.

Al mismo tiempo se representa la diferencia $F(b) - F(a)$ por $[F(x)]_a^b$.

Si $G(x)$ es otra función primitiva de $f(x)$, entonces existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.

Por lo tanto:

$[G(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
y este valor no depende de la selección de la función primitiva.

En resumen se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{donde } F'(x) = f(x)$$

 **Ejemplo 3.5.** Calcule: $\int_1^2 3x^2 dx$.

Solución: $\int_1^2 3x^2 dx = [x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

 **Ejercicio 3.6.** Calcule.

a) $\int_1^3 2x dx$ b) $\int_0^1 4x^3 dx$ c) $\int_2^5 dx$ d) $\int_1^{-2} 4x dx$

Propiedades de la integral definida 1

a) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

b) $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

c) $\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$

Demostración: Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$,

Entonces $kF(x)$, $F(x) + G(x)$ y $F(x) - G(x)$ son funciones primitivas de $kf(x)$, $f(x) + g(x)$ y $f(x) - g(x)$, respectivamente (Clase 1.3)

La conclusión sale de este hecho y la definición de la integral definida.

 **Ejemplo 3.6.** Calcule $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6) dx$.

Solución: $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6) dx = 2 \int_1^3 x^3 dx - 4 \int_1^3 x dx + 6 \int_1^3 dx$
 $= 2 \cdot \frac{1}{4} [x^4]_1^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} [x^2]_1^3 + 6[x]_1^3$
 $= \frac{1}{2} (3^4 - 1^4) - 2[3^2 - 1^2] + 6(3 - 1) = 40 - 16 + 12 = 36$

 **Ejercicio 3.7.** Calcule.

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1) dx$

c) $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x - 2) dx$

d) $\int_{-2}^0 (-4x^2 - 3x - 2) dx$



Se supone que el dominio de $f(x)$ contiene el intervalo $[a, b]$ o $[b, a]$.



A la constante b se le denomina límite superior y la constante a límite inferior.



El límite superior no necesariamente mayor que el límite inferior.

a) Por ejemplo

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= [kF(x)]_a^b \\ &= kF(b) - kF(a) \\ &= k\{F(b) - F(a)\} \\ &= k[F(x)]_a^b \\ &= k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad se calcula por término.

Es mejor poner coeficientes fuera de corchetes.

Clase 4. Propiedad de integral definida

Propiedades de la integral definida 2

$$d) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$e) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$f) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Demostración: Sea que $F'(x) = f(x)$.

$$d) \int_a^a f(x) dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$e) \int_b^a f(x) dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\} \\ = -[F(x)]_a^b = - \int_a^b f(x) dx$$

$$f) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\ = \{F(b) - F(a)\} + \{F(c) - F(b)\} = F(c) - F(a) = [F(x)]_a^c = \int_a^c f(x) dx$$

 **Ejemplo 3.7.** Calcule: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1) dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1) dx$

Solución: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1) dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1) dx$

$$= \int_1^4 (x^2 - 2x - 1) dx = \frac{1}{3} [x^3]_1^4 - [x^2]_1^4 - [x]_1^4 \\ = \frac{1}{3} (4^3 - 1^3) - (4^2 - 1^2) - (4 - 1) = 21 - 15 - 3 = 3$$

 **Ejercicio 3.8.** Calcule.

$$a) \int_0^2 (-x^2 + 4x + 2) dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x + 2) dx$$

$$b) \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) dx$$

 **Ejercicio 3.9.** Demuestre.

$$a) \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

 **Ejercicio 3.10.** Calcule.

$$a) \int_2^4 (3x^2 - 2x + 1) dx - \int_1^4 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$b) \int_{-1}^3 (x^2 + 4x - 1) dx - \int_{-1}^0 (x^2 + 4x - 1) dx$$



En f) los integrandos deben ser iguales.
En f) b no está necesariamente entre a y c .



Aplique propiedad f).



Aplique e); luego f).

Clase 5. Integral definida y derivación

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $F'(t) = f(t)$.

Por lo tanto, para un número real a ,

$\int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$
es una función de x .

Derivando ambos lados con respecto a x , se tiene que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \{F(x) - F(a)\}' = F'(x) = f(x).$$

Relación entre integral definida y derivación

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

 **Ejemplo 3.8.** Calcule: $\frac{d}{dx} \int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1) dt$.

Solución: $\frac{d}{dx} \int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1) dt = 3x^2 - 2x + 1$

 **Ejercicio 3.11.** Calcule.

a) $\frac{d}{dx} \int_1^x (t^2 + 3t + 3) dt$

b) $\frac{d}{dx} \int_{-2}^x (t^2 + t - 3) dt$

c) $\frac{d}{ds} \int_1^s (x + 3) dt$

d) $\frac{d}{dx} \int_x^1 (t^2 - t) dt$

 **Ejemplo 3.9.** Encuentre la función $f(x)$ y el número real a , que satisfacen:

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 + 3x - 4.$$

Solución: Derivando ambos lados con respecto a x , se tiene que $f(x) = 2x + 3$.

Sustituyendo $x = a$ en ambos lados, se tiene que:

$$0 = a^2 + 3a - 4, \quad (a + 4)(a - 1) = 0, \quad a = -4, 1$$

Respuesta: $f(x) = 2x + 3, a = -4, 1$

 **Ejercicio 3.12.** Encuentre $f(x)$ y a .

a) $\int_a^x f(t) dt = x^2 - 3x + 2$

b) $\int_a^x f(t) dt = -x^2 + 2x + 3$

c) $\int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 3x + 1$

d) $\int_x^a f(t) dt = -2x^2 + x + 6$



$F'(x)$ es una derivada con respecto a x .

$F'(t)$ es una derivada con respecto a t .



Se le denomina a este resultado Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, pero con diferente definición de la integral definida.



En d) aplique Clase 4 e).

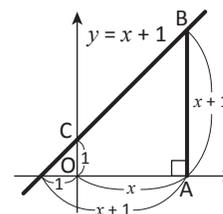
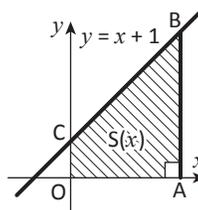


$\int_x^a f(t) dt = 0$ (Clase 4 d)

Clase 6. Integral definida y área

Ejemplo 3.10. En la figura, la ecuación de la recta BC es $y = x + 1$. Sea $(x, 0)$ las coordenadas del punto A donde $x > 0$.

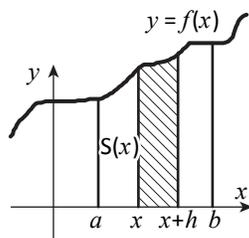
- Expresar AB con x .
- Sea $S(x)$ área del trapecio OABC. Expresar $S(x)$ con x .
- Encuentre $S'(x)$.



Solución: a) $AB = (\text{la coordenada } y \text{ del punto } B) = x + 1$
 b) $S(x) = \frac{1}{2} (OC + AB) \cdot OA = \frac{1}{2} \{1 + (x + 1)\}x = \frac{1}{2} x^2 + x$
 c) $S'(x) = x + 1$

En este ejemplo $S'(x) = (\text{la ecuación de la gráfica})$. Esta relación se verifica con cualquier función continua como la siguiente:

Sea a y b dos números reales tal que $a < b$.
 Sea $f(x)$ una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$.
 Sea $S(x)$ el área de la parte delimitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas paralelas al eje y que pasan por $(a, 0)$ y $(x, 0)$ donde $a < x < b$.



Sea h un número positivo tal que $x + h < b$.
 Sea M_h el máximo y m_h el mínimo de $f(x)$ en $[x, x + h]$. Entonces el área de la parte sombreada, se tiene que:

$$h \cdot m_h \leq S(x + h) - S(x) \leq h \cdot M_h.$$

Como $h > 0$, se tiene que: $m_h \leq \frac{S(x + h) - S(x)}{h} \leq M_h$.

Como $\lim_{h \rightarrow 0^+} M_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} m_h = f(x)$, se tiene que: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} = f(x)$.

De la misma manera se verifica $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{S(x + h) - S(x)}{h} = f(x)$.

Luego $S'(x) = f(x)$.

Por lo tanto, se tiene que $S(x) = \int_a^x f(t) dt + C$.

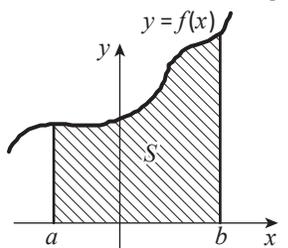
Como $\lim_{x \rightarrow a^+} S(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(t) dt = 0$, se tiene que $C = 0$.

Sea S el área de la parte rodeada por $y = f(x)$, el eje x , las rectas $x = a$ y $x = b$.

Como $\lim_{x \rightarrow b^-} S(x) = S$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$, se tiene lo siguiente:

Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área S de la parte sombreada es:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



La función $\int_a^x f(t) dt$ es derivable, por lo tanto, continua (Clase 1.2).

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

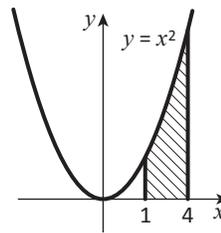
Es esencial que la parte sombreada este por encima del eje x .

Clase 7. Cálculo de área

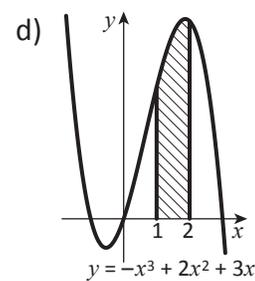
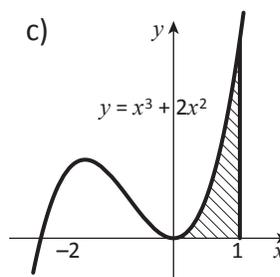
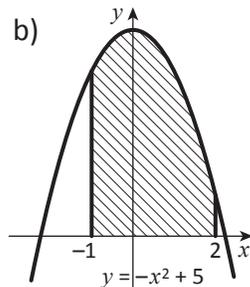
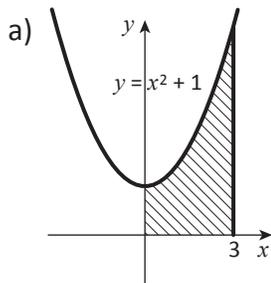
Ejemplo 3.11. Encuentre el área de la parte sombreada.

Solución: Como la parte está por encima del eje x ,

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3]_1^4 = 21$$



Ejercicio 3.13. Encuentre el área S de la parte sombreada.



Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$.

El área S de la parte delimitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ es:

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx.$$

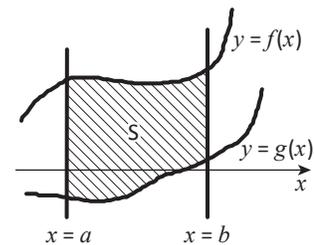
Demostración: Sea M un número tal que $g(x) + M \geq 0$ en $[a, b]$.

Sea S_1 el área de la parte delimitada por $y = f(x) + M$, el eje x , $x = a$ y $x = b$.

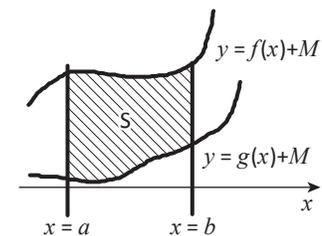
Sea S_2 el área de la parte delimitada por $y = g(x) + M$, el eje x , $x = a$ y $x = b$.

Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 = \int_a^b \{f(x) + M\} dx - \int_a^b \{g(x) + M\} dx \\ &= \int_a^b [\{f(x) + M\} - \{g(x) + M\}] dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx \end{aligned}$$



Es esencial que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$



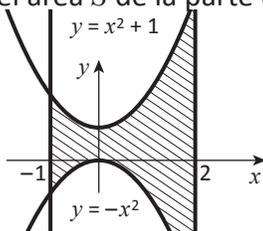
Lo importante es saber qué gráfica está por encima de la otra.

Ejemplo 3.12.

a) Haga la gráfica de las siguientes cuatro líneas: $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$

b) Encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas dadas.

Solución: a)



b) Como $-x^2 \leq x^2 + 1$ en $[-1, 2]$,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(x^2 + 1) - (-x^2)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x^2 + 1) dx \\ &= \frac{2}{3} [x^3]_{-1}^2 + [x]_{-1}^2 = 6 + 3 = 9 \end{aligned}$$

* **Ejercicio 3.14.** Haga la gráfica de las cuatro líneas y encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$, $x = -2$, $x = 1$

b) $y = -x^2$, $y = -2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$

c) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 2$

d) $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 + 4$, $x = -1$, $x = 1$

Clase 9. Área de la parte delimitada por dos líneas

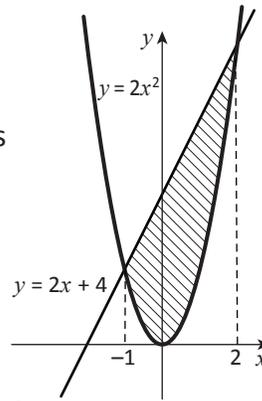
Ejemplo 3.13. Encuentre el área S de la parte delimitada por dos líneas $y = 2x^2$ y $y = 2x + 4$.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de ambas líneas son las soluciones de la ecuación
 $2x^2 = 2x + 4$;
 $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$
 $(x - 2)(x + 1) = 0$, $x = 2, -1$

Como $2x^2 \leq 2x + 4$ en $[-1, 2]$.

$$S = \int_{-1}^2 \{(2x + 4) - 2x^2\} dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$$

$$= -\frac{2}{3} [x^3]_{-1}^2 + [x^2]_{-1}^2 + 4[x]_{-1}^2 = -6 + 3 + 12 = 9$$



Primero haga la gráfica.



La parte en cuestión está delimitada por
 $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$,
 $x = -1$ y $x = 2$.
 Por lo tanto, se aplica la fórmula de Clase 8.

Ejercicio 3.15. Encuentre el área S de la parte delimitada por las dos líneas.

- a) $y = 2x^2 - 4$, $y = -2x$ b) $y = x^2 - 9$, $y = 0$
 c) $y = -x^2 + 4$, $y = -2x - 4$ d) $y = -x^2$, $y = x - 6$

Ejemplo 3.14. Encuentre el área S de la parte delimitada por $y = x^3 - 3x$ y $y = x$.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de las líneas:

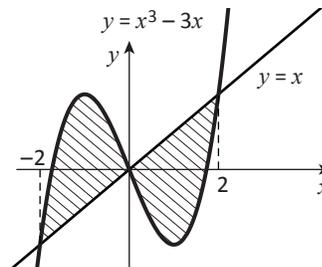
$$x^3 - 3x = x, \quad x^3 - 4x = 0.$$

$$x(x + 2)(x - 2) = 0,$$

$$x = -2, 0, 2$$

En $[-2, 0]$ $x \leq x^3 - 3x$

En $[0, 2]$ $x^3 - 3x \leq x$



$$S = \int_{-2}^0 \{(x^3 - 3x) - x\} dx + \int_0^2 \{x - (x^3 - 3x)\} dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx$$

$$= \frac{1}{4} [x^4]_{-2}^0 - 2[x^2]_{-2}^0 + 2[x^2]_0^2 - \frac{1}{4} [x^4]_0^2$$

$$= -4 + 8 + 8 - 4 = 8$$

Ejercicio 3.16. Encuentre el área S de la parte delimitada.

- a) $y = x^3 + 6x^2$, $y = 7x$ b) $y = x^3 - 6x^2$, $y = 0$



Lo importante es la relación entre las dos gráficas.

Ejercicios de la lección

1. Calcule. Sea C el constante de integración. Clase 2
 - a) $\int (x^2 - 4x + 5)dx$
 - b) $\int (-2x^3 + 5x + 4)dx$
 - c) $\int (x - 1)(x^2 + x + 1)dx$
 - d) $\int (3t + 2)(t - 1)dt$
2. Encuentre la función $F(x)$ que satisfice: Clase 2
 $F'(x) = x^2 - x + 1, \quad F(-1) = 2.$
3. Calcule. Clase 3
 - a) $\int_{-2}^1 (x - 3)(x + 1) dx$
 - b) $\int_0^{-3} (3x - 1)(x + 1) dx$
 - c) $\int_{-1}^3 (x - 2)(x + 2) dx$
4. Calcule. Clase 4
 - a) $\int_{-1}^3 (t - 1)(t + 2) dt - \int_{-1}^2 (t - 1)(t + 2) dt$
 - b) $\int_3^2 (x^2 - x) dx - \int_4^2 (x^2 - x) dx$
5. Encuentre $f(x)$ y constante a que satisfacen: Clase 5
 - a) $\int_a^x f(t) dt = 3x^2 + 2x - 1$
 - b) $\int_x^a f(t) dt = x^2 - 4x + 4$

Encuentre el área S delimitada con las líneas.
6. a) $y = -x^2 + 4, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad y = 0$ Clase 7
b) $y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$
7. a) $y = x^2 - 4x, \quad y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 2$ Clase 8
b) $y = x^2 - 4, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0$
c) $y = -x^2 + 2x, \quad y = -2x + 3, \quad x = 0$
8. a) $y = x^2 + 2x, \quad y = -x^2 - x + 2$ Clase 9
b) $y = 2x^2, \quad y = x^2 - 2x + 3$

Problemas de la Unidad A

1. Sea n un número entero no negativo. Demuestre:

a) $\int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx$

b) $\int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0$

2. Demuestre que $\int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$.

3. Haga la gráfica de $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

Problemas de la Unidad B

1. Si dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen puntos comunes $P(\alpha, f(\alpha))$ y $Q(\beta, f(\beta))$, donde $\alpha < \beta$ y si:

$$f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{en } [\alpha, \beta],$$

entonces el área S de la parte delimitada por las dos gráficas es:

$$S = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3.$$

Demuéstrelo utilizando Problema de la Unidad A2

2. La recta $y = ax$ divide en dos partes de la misma área la parte delimitada por

$$y = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad y = 0.$$

Encuentre el valor de a .

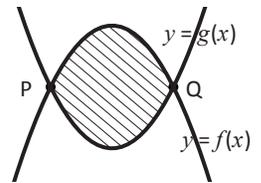
3. a) Encuentre las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que satisfacen lo siguiente:

$$|x^2 - 3x| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) & \text{si } 0 < x < 3 \\ h(x) & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

b) Calcule $\int_{-2}^4 |x^2 - 3x| dx$.

4. Encuentre la función $f(x)$ que satisface

$$f(x) = x + \int_0^2 f(t) dt$$



Con este resultado se calcula el área de la parte delimitada por parábola y la recta o por dos parábolas.

Aplique Problema de la Unidad B 1.

$\int_0^2 f(t) dt$ es una constante.



MATEMÁTICA III

Libro del Estudiante



ALTAR G 1

Serpiente bicéfala, al norte presenta una cabeza encarnada y al sur una descarnada. Se define a este altar como Na-Chan, imagen bicéfala del monstruo cósmico, esquelético al sur y vivo al norte. Fue dedicado en la tierra de Yax-Pac Chan Yat Ahau.

Fotografía: © José Antonio Ramos Cartagena.



República de Honduras
Secretaría de Educación