República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA II

Guía del Docente

Décimo grado

10

Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

La **Guía del Docente - Matemática II - del Décimo grado de Educación Media**, es propiedad de la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación de Honduras, C.A.

Presidencia de la República de Honduras
Secretaría de Estado en el Despacho de Educación
Sub Secretaría de Asuntos Técnico Pedagógicos
Sub Secretaría de Asuntos Administrativos y Financieros
Dirección General de Desarrollo Profesional

Esta obra fue elaborada y revisada en el marco del **Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM Fase III)**, que ejecutó la Secretaría de Estado en el Despacho de Educación en coordinación con la **Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM)**, con el apoyo técnico de la **Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)**.

Autores - UPNFM
Luis Antonio Soto Hernández
Karla Valesca Matute Colindres

Equipo Técnico de Revisión – UPNFM – 2018
Luis Antonio Soto Hernández
Flavia María Romero Camacho

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2017
Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Carlos Antonio Mejía
José Hipólito Vásquez Rodríguez

Equipo Técnico de Revisión – SE – 2018
Víctor Manuel Carranza Menjivar
Mirna Lizeth Rodríguez Gudiel
Luisa Naomi Herrera Torres

Revisión Técnico Gráfico y Pedagógico 2017, 2018
Dirección General de Innovación Tecnológica y Educativa

1ª Calle entre 2ª y 4ª Avenida,
Comayagüela, M.D.C. Honduras, C.A.
www.se.gob.hn
Guía del Docente, Matemática II, Décimo grado
Primera Edición 2017
Revisión 2018

ISBN 978-99979-53-79-7
9 789997 953797

DISTRIBUCIÓN GRATUITA – PROHIBIDA SU VENTA

República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA II

Guía del Docente

Décimo grado

10

Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Bachillerato Técnico Profesional
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

La Secretaría de Educación presenta la **“Guía del Docente”** de Matemática para Educación Media, que tiene su fundamento en el Plan de Estudio y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, misma que fue elaborada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con esta Guía se pretende apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido y las formas de aprendizaje. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos que impacten en la motivación de los jóvenes y como consecuencia, se incremente la retención y aprobación, y se mejore el rendimiento académico de los estudiantes en los centros educativos.

En la búsqueda del cambio hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes realicen una labor educativa con calidad y pertinencia y la Secretaría de Educación a su vez, se compromete para que la población tenga acceso a una educación, que mejore en cada generación.

Secretaría de Estado
en el Despacho de Educación

Instructivo de uso
“Guía del Docente”

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar los contenidos para cada grado, prescritos en el Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, usando como parte del proceso el Libro del Estudiante.

Hay un plan de estudio para todas las clases y se espera que el docente lo ajuste según el rendimiento y el entorno de sus estudiantes.

En el Libro del Estudiante hay una diversidad de ejercicios para garantizar el trabajo individual. Muchos de éstos podrán ser utilizados como tareas para resolver en casa y deben ser revisados individualmente o en forma colectiva, siempre dirigida por el docente para afianzar el conocimiento.

Para mayor información véase la “Estructura y Aplicación de la Guía del Docente”.

Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

Desarrollo de Clases de cada Unidad

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas. Si el Docente aprovecha esta Guía, le ayudará a desarrollar su clase de manera efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura Global: Está formada por dos partes: la "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía y la forma como se utiliza y el "Desarrollo de Clases de cada Unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la Unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales tomados del Plan de Estudios y Programas Curriculares (PEPC). La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el PEPC, utilizando eficazmente el Libro del Estudiante (LE), para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar la clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo, se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la Programación Semestral y Desarrollo de Clases de cada Unidad.

4. Programa Semestral

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el PEPC, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan semestral de modo que se cumplan todos los temas.

Desarrollo de Clases de cada Unidad

Está divida en cinco secciones:

1) Competencias de la unidad: Presenta las competencias que se pretenden desarrollar en el estudiante en el desarrollo de la unidad.

2) Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado por semestre, relacionándolos con contenidos de grados anteriores y con las matemáticas siguientes.

3) Plan de estudio de la unidad: Presenta la distribución de las clases en cada lección.

4) Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.

5) Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, la evaluación y el proceso de enseñanza.

1) Competencias de la unidad

Se presentan las competencias para cada unidad, tal y como están descritas en el PEPC Área de Matemáticas.

2) Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase. Para el menor manejo del contenido, es mejor darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que lo necesiten.

3) Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la Guía.

4) Puntos de lección

Como cada unidad está dividida en lecciones, en esta parte se explican los puntos en que se deben prestar mayor atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por lo cual se desarrolla el plan de clase.

5) Desarrollo de clase

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, la evaluación y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

a. Objetivo

Se representa el objetivo de la clase (hay casos donde un sólo aplica a dos o más clases seguidas). Es necesario tener éste claro para cada clase.

b. Evaluación

Se indican los ejercicios que el estudiante debe realizar en forma independiente o grupal considerando la estrategia que decida el docente con el propósito de verificar el logro del objetivo.

En caso de que existan dificultades en la mayoría de los estudiantes el docente debe reforzar esa parte.

c. Proceso de enseñanza

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes concluir en la regla, definición, principio, etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en algunas clase se utiliza la simbología M, RP y *.

M: Significa preguntas o indicaciones de los docentes a los estudiantes.

No es recomendable hace preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como “si” y “no”. Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los concentre en el tema de la clase.

RP: Significa reacciones previsibles de los estudiantes.

Hay que preveer las reacciones de los estudiantes, incluyendo las respuestas equivocadas. Para corregir las respuestas equivocadas, no es bueno decir solamente <<esta mala>> y enseñar la respuesta correcta o hacer que contesten otros niños.

Hay que dar tiempo para que piensen porque está equivocada, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

***:** Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

En algunos casos en el LE aparecen ciertas clase utilizando asterisco (*) esto significa que son clases o ejemplos, ejercicios opcionales que el docente puede desarrollar dependiendo el nivel de entendimiento de los estudiantes.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

- La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo, propone como se puede evaluar éste, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
- No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
- Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
- Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores cada 5 ejercicios, o una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
- Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
- La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible. Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:
  - Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
  - En el receso después de la clase.
  - En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo fila para que el docente corrija)

En la Guía del Docente se indica en la página del Libro del Estudiante las partes punteadas que se sugieren que el docente debe tener en la pizarra, sin embargo cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra.

La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, clases, ejercicios de la lección (algunas unidades no tienen ejercicios de lección). Cada clase tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la clase. En la orientación de estos ejemplos es importante hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de resolverlo.

Para resaltar los puntos importantes de la clase estos se remarcan.

En el LE se proponen ejercicios de lección esto con el objetivo de suministrar suficientes ejercicios para que el estudiante pueda resolver en el aula o como tarea en casa. El docente deberá utilizarlos de acuerdo a conveniencia ya que no se tiene tiempo estipulado para esta sección.

La página del LE tiene dos columnas. Una columna de contenidos y otra columna de recordatorios, sugerencias o notas. En el desarrollo de cada clase se encuentran varios iconos, que a continuación se explica cada uno.

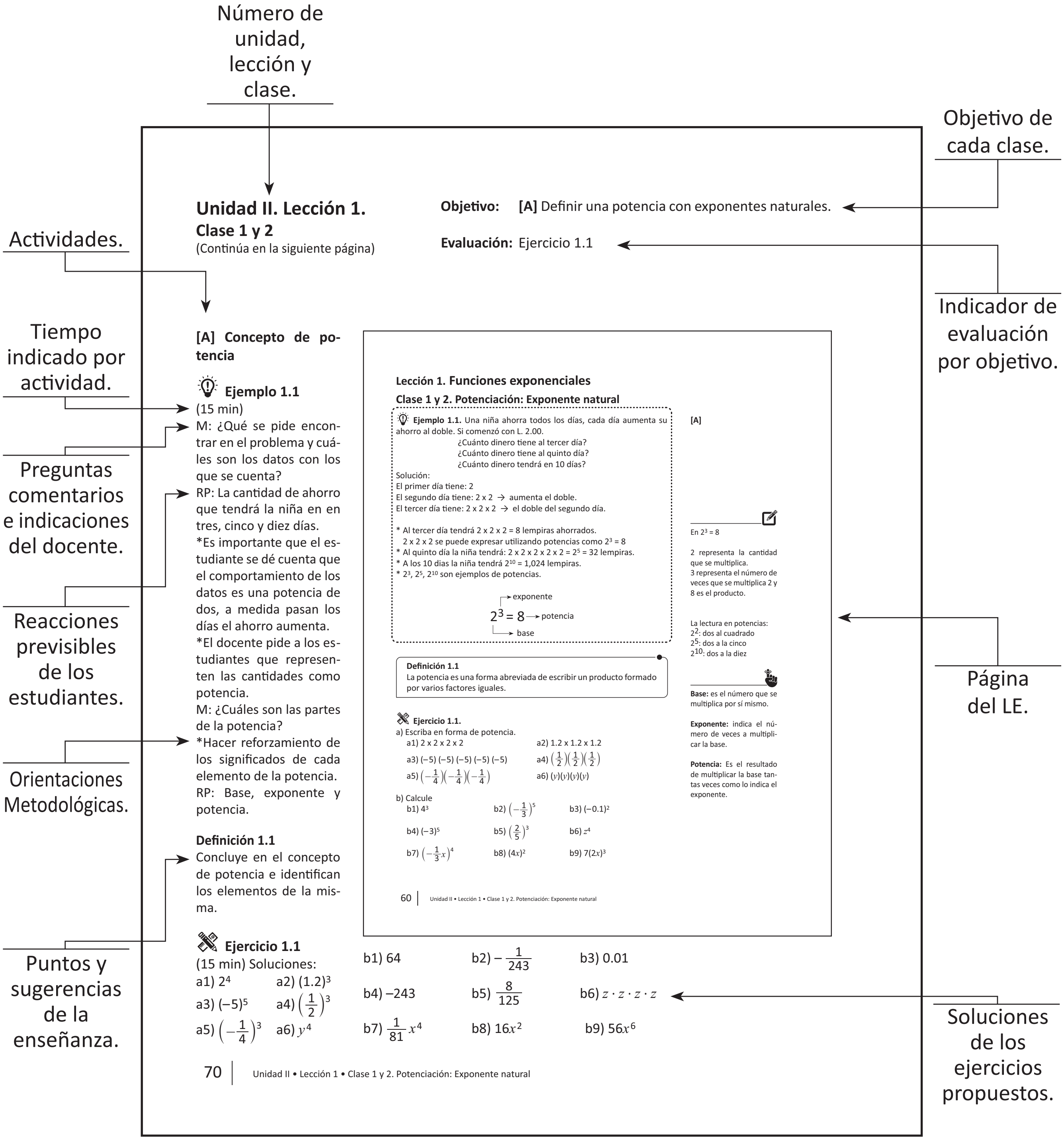
Cada ícono representa:

Icono	**Explicación**
💡	El desarrollo de un ejemplo.
📐	La propuesta de ejercicios o problemas.
📋	Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro a la vez algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.
🤞	Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.
🧠	Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.
📝	Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

A continuación se explica el significado y simbología de la página del desarrollo de clases.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases.



Unidad II. Lección 1.
Clase 1 y 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definir una potencia con exponentes naturales.

Evaluación: Ejercicio 1.1

[A] Concepto de potencia

Ejemplo 1.1
(15 min)
M: ¿Qué se pide encontrar en el problema y cuáles son los datos con los que se cuenta?
RP: La cantidad de ahorro que tendrá la niña en en tres, cinco y diez días.
*Es importante que el estudiante se dé cuenta que el comportamiento de los datos es una potencia de dos, a medida pasan los días el ahorro aumenta.
*El docente pide a los estudiantes que representen las cantidades como potencia.
M: ¿Cuáles son las partes de la potencia?
*Hacer reforzamiento de los significados de cada elemento de la potencia.
RP: Base, exponente y potencia.

Definición 1.1
Concluye en el concepto de potencia e identifican los elementos de la misma.

Lección 1. Funciones exponenciales

Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural

Ejemplo 1.1. Una niña ahorra todos los días, cada día aumenta su ahorro al doble. Si comenzó con L. 2.00.
¿Cuánto dinero tiene al tercer día?
¿Cuánto dinero tiene al quinto día?
¿Cuánto dinero tendrá en 10 días?

Solución:
El primer día tiene: 2
El segundo día tiene: 2 x 2 → aumenta el doble.
El tercer día tiene: 2 x 2 x 2 → el doble del segundo día.

* Al tercer día tendrá 2 x 2 x 2 = 8 lempiras ahorrados.
2 x 2 x 2 se puede expresar utilizando potencias como $2^3 = 8$
* Al quinto día la niña tendrá: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^5 = 32 lempiras.
* A los 10 dias la niña tendrá 2^{10} = 1,024 lempiras.
* 2^3, 2^5, 2^{10} son ejemplos de potencias.

$$\overset{\text{exponente}}{2^3} = 8 \rightarrow \text{potencia}$$
$$\underset{\text{base}}{}$$

Definición 1.1
La potencia es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

Ejercicio 1.1.
a) Escriba en forma de potencia.
a1) 2 x 2 x 2 x 2
a2) 1.2 x 1.2 x 1.2
a3) (−5) (−5) (−5) (−5) (−5)
a4) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$
a5) $\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$
a6) $(y)(y)(y)(y)$

b) Calcule
b1) 4^3
b2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$
b3) $(-0.1)^2$
b4) $(-3)^5$
b5) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
b6) z^4
b7) $\left(-\frac{1}{3}x\right)^4$
b8) $(4x)^2$
b9) $7(2x)^3$

[A]

En $2^3 = 8$

2 representa la cantidad que se multiplica.
3 representa el número de veces que se multiplica 2 y 8 es el producto.

La lectura en potencias:
2^2: dos al cuadrado
2^5: dos a la cinco
2^{10}: dos a la diez

Base: es el número que se multiplica por sí mismo.

Exponente: indica el número de veces a multiplicar la base.

Potencia: Es el resultado de multiplicar la base tantas veces como lo indica el exponente.

60 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural

Ejercicio 1.1
(15 min) Soluciones:
a1) 2^4
a2) $(1.2)^3$
a3) $(-5)^5$
a4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
a5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$
a6) y^4

b1) 64
b2) $-\frac{1}{243}$
b3) 0.01
b4) −243
b5) $\frac{8}{125}$
b6) $z \cdot z \cdot z \cdot z$
b7) $\frac{1}{81}x^4$
b8) $16x^2$
b9) $56x^6$

70 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural

4. Programación Semestral:

Unidad (horas)	Contenido	Pág. de GD (Pág. de LE)
I. Funciones algebraicas (36 horas)	Polinomios	2 – 14 (2 – 8)
	Números complejos	15 – 20 (9 – 14)
	Ecuaciones de grado mayor que dos	21 – 32 (15 – 26)
	Inecuaciones de grado mayor que dos	33 – 40 (27 – 34)
	Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto	41 – 47 (35 – 41)
	Gráfica de funciones polinómicas	48 – 51 (42 – 45)
	Expresiones algebraicas racionales	52 – 55 (46 – 49)
	Gráfica de funciones racionales	56 – 59 (50 – 53)
	Funciones especiales	60 – 64 (54 – 57)
II. Funciones trascendentales (39 horas)	Funciones exponenciales	65 – 94 (60 – 82)
	Funciones logarítmicas	95 – 109 (83 – 95)
	Resolución de triángulos	110 – 118 (96 – 104)
	La gráfica de las funciones trigonométricas	119 – 133 (105 – 114)
III. Estadística (14 horas)	Muestras	135 – 151 (116 – 127)
	Medidas de tendencia central	152 – 159 (128 – 135)
	Medidas de dispersión	159 – 166 (135 – 142)

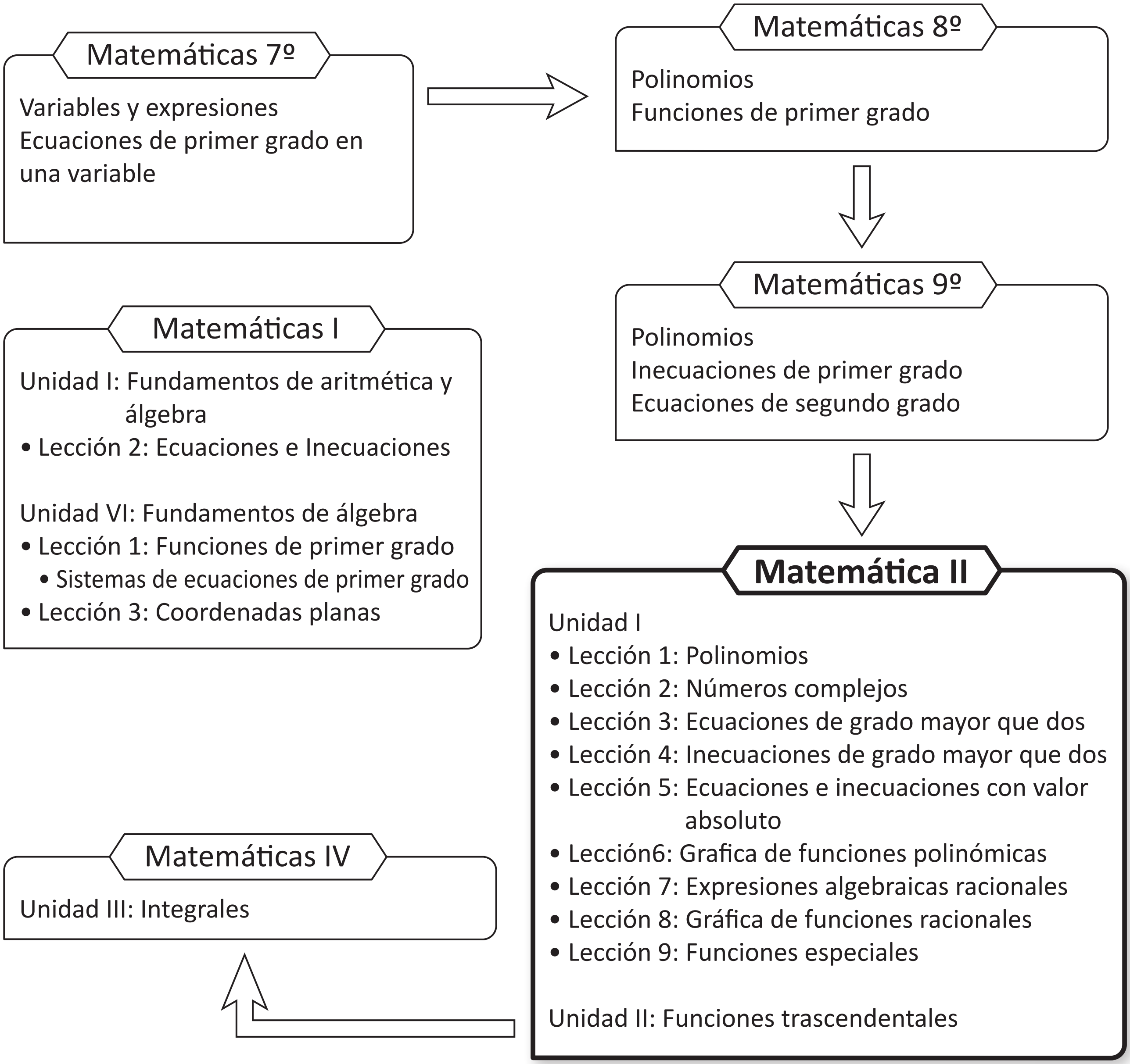
Desarrollo de Clases

Matemáticas II
Unidad I

Funciones algebráicas

1. **Competencias de la Unidad**
    1. Resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual a dos.
    2. Resolver inecuaciones polinómicas de grado mayor o igual a dos.
    3. Identificar las características de las funciones polinómicas, racionales, radicales y especiales para establecer su definición.
    4. Graficar funciones polinómicas racionales y especiales.

2. **Relación y Desarrollo**



Matemáticas 7º

Variables y expresiones
Ecuaciones de primer grado en una variable

Matemáticas 8º

Polinomios
Funciones de primer grado

Matemáticas 9º

Polinomios
Inecuaciones de primer grado
Ecuaciones de segundo grado

Matemáticas I

Unidad I: Fundamentos de aritmética y álgebra
- Lección 2: Ecuaciones e Inecuaciones

Unidad VI: Fundamentos de álgebra
- Lección 1: Funciones de primer grado
    - Sistemas de ecuaciones de primer grado
- Lección 3: Coordenadas planas

Matemática II

Unidad I
- Lección 1: Polinomios
- Lección 2: Números complejos
- Lección 3: Ecuaciones de grado mayor que dos
- Lección 4: Inecuaciones de grado mayor que dos
- Lección 5: Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto
- Lección6: Grafica de funciones polinómicas
- Lección 7: Expresiones algebraicas racionales
- Lección 8: Gráfica de funciones racionales
- Lección 9: Funciones especiales

Unidad II: Funciones trascendentales

Matemáticas IV

Unidad III: Integrales

3. **Plan de Estudio de la Unidad** (30 y *6 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Polinomios	1 y 2	División de polinomios	P(x): polinomio, polinomio dividendo, polinomio divisor y polinomio cociente
	3	Teorema del residuo	Polinomio lineal: $x - c$. Si se divide P(x) entre $x - c$, P(c) es el residuo
	4	Teorema de factor	$x - c$ es un factor si P(c) = 0
	5	División sintética	
2. Números complejos	1	Números complejos, adición y sustracción	$i = \sqrt{-1}$: número imaginario, $i^2 = -1$ $a + bi$: forma estándar de un número complejo C: conjunto de los números complejos $z_1 = a + bi$
	2	Multiplicación de números complejos	$(a + bi)(c + di)=$ $ac + (ad + bc)i - bd$
	3	División de números complejos	z: Número complejo, $\bar{z}$: Conjugado de un número complejo $z = a + bi$; $\bar{z} = a - bi$
	4	Soluciones imaginarias de ecuaciones de segundo grado	Si $b^2 - 4ac < 0$ las soluciones de la ecuación son imaginarias
3. Ecuaciones de grado mayor que dos	1	Ecuaciones de grado mayor o igual que 3	
	*2,*3	Ecuaciones bicuadradas	Bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ variable auxiliar
	*4,*5	Ecuaciones Recíprocas	Recíproca, $P_n(x) = 0$, ecuaciones simétricas, ecuación hemisimétrica
	*6,*7	Raíz imaginaria de una ecuación con coeficientes reales	Raíz imaginaria
	8	Teorema fundamental del álgebra	Multiplicidad de raíces

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
4. Inecuaciones de grado mayor que 2	1, 2, 3	Solución de inecuaciones por factorización 1	Diagrama de signos, valores prueba, $ax^2 + bx + c < 0$
	4, 5	Solución de inecuaciones por factorización 2	
		Ejercicios de la lección	
5. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto	1	Ecuaciones con valor absoluto (caso simple)	Valor absoluto $\lvert x \rvert = a$ $\lvert x \rvert = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$
	2, 3	Ecuaciones con valor absoluto (caso complejo)	
	4	Inecuaciones con valor absoluto (caso simple)	$\lvert x \rvert < a$; $\lvert x \rvert > a$ $\lvert x \rvert \leq a$; $\lvert x \rvert \geq a$
	5	Inecuaciones con valor absoluto (caso complejo)	
		Ejercicios de la lección	
6. Gráfica de funciones polinómicas	1	Gráfica de funciones polinómicas	Función polinómica $f(x) = x^n$ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$
	2	Gráfica de funciones polinómicas	Teorema del valor medio
		Ejercicios de lección	
7. Expresiones algebraicas racionales	1	Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales	Expresión algebraica racional $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$
	2	Adición y sustracción de expresiones algebráicas racionales	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ Asíntota vertical $x = a$
8. Gráfica de funciones racionales	1	Gráfica de funciones racionales	
	2	Gráfica de funciones racionales	Asíntota horizontal $y = c$
9. Funciones especiales	1 y 2	Gráfica de funciones con valor absoluto	$f(x) = \lvert x \rvert$
	3	Gráfica de funciones con valor absoluto	
		Función mayor entero	Función mayor entero $f(x) = [\![x]\!] = n$

Puntos de lección

Lección 1: Polinomios

Se introduce la división de polinomios haciendo la analogía con la división de números naturales y utilizando la equivalencia con la multiplicación. De la multiplicación $(x + 3)$ $(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ se deduce que $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 4) = x + 3$. El ejemplo introductorio del Libro del Estudiante supone que si los grados del polinomio dividendo y del polinomio divisor son 3 y 1 respectivamente, el grado del polinomio cociente es 2, es decir, tiene la forma general $ax^2 + bx + c$, y estableciendo la igualdad entre los coeficientes de los términos semejantes se encuentran los valores correspondientes a a, b y c del polinomio cociente. Se introduce el cálculo vertical de la división de polinomios como un mecanismo más conveniente de encontrar los resultados.

Cuando un polinomio P(x) de grado mayor o igual que 1 se divide entre un polinomio lineal $(x - c)$ suceden dos situaciones:

1. P(c) = R, donde R es el residuo (Teorema del residuo)
2. Si P(c) = 0, entonces x – c es un factor (Teorema del factor)

Cuando se divide un polinomio de grado mayor o igual que 1 entre un polinomio lineal cuyo coeficiente principal es 1 se utiliza un mecanismo llamado división sintética que permite trabajar sólo con los coeficientes del polinomio dividendo para encontrar fácilmente los coeficientes de los polinomios cociente y residuo.

Lección 2: Números complejos

Se construyen los números complejos utilizando las soluciones de ecuaciones que tienen solución dentro del conjunto de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, es decir, soluciones reales. El objetivo es ir construyendo el conjunto de los números reales para luego construir el conjunto de los números complejos. Luego resolviendo la ecuación $x^2 + 1 = 0$ se define la solución $x = \sqrt{-1}$ como el número imaginario i, de este se deduce que $i^2 = -1$. Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con los números complejos se trabajan en su forma estándar: $z = a + bi$. Para la división se opera con el conjugado: $\bar{z} = a - bi$. Como complemento al conocimiento aprendido sobre las ecuaciones cuadráticas se incorpora las soluciones imaginarias de este tipo de ecuaciones que sucede cuando el discriminante es menor que cero, es decir, cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Lección 3: Ecuaciones de grado mayor que dos

En esta lección se abordan las clases 2 – 7 como clases opcionales en donde se muestra otro tipo de ecuación: la bicuadrada y la recíproca, dependiendo del nivel de profundización que se quiera dar se desarrollarán estas clases, cuyo objetivo es resolver otro tipo de ecuaciones diferentes a las tradicionalmente vistas.

En las ecuaciones bicuadradas se utiliza un método de sustitución para convertirla en una ecuación cuadrática.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$

$ay^2 + by + c = 0$ y luego resolverla por cualquiera de los métodos conocidos, sin embargo el hecho de hacer la sustitución conduce a una serie de procesos que pueden ser complicados para los estudiantes, además de que son ecuaciones que tienen cuatro o más soluciones y algunas de ellas son complejas.

También se aborda el teorema fundamental del álgebra (clase 5) el cual es de suma importancia para el desarrollo de los contenidos posteriores, ya que anteriormente se ha estudiado polinomios y sus raíces por lo que con este teorema se consolida el hecho de que todo polinomio de grado mayor o igual que 1 tendrá al menos una raíz real o compleja, de igual manera se estudia el hecho de que hay polinomios que tienen raíces repetidas conociendo esto como duplicidad de raíces.

Lección 4: Inecuaciones de grado mayor que dos

En el tercer ciclo los estudiantes aprendieron las relaciones de orden entre números reales, luego en Matemática I estudiaron las inecuaciones lineales, es decir, expresiones de la forma $x < a$ (Puede ser >, ≥, ≤), en esta lección se encuentran por primera vez con inecuaciones de grado mayor o igual que dos.

Inicialmente se estudian las inecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c < 0$ donde a, b y c son números reales y para resolver se debe recurrir a los métodos de factorización para encontrar los valores críticos (valores que hacen cero la expresión algebraica), luego se construye una tabla de variación de signos que determina el comportamiento de la expresión al sustituir los valores de prueba.
Utilizando las propiedades de la relación de orden en la recta numérica se representan las soluciones de la inecuación, considerando que también estas se pueden representar usando la notación de intervalo y de conjunto. Se recomienda utilizar con los estudiantes la notación de intervalo por ser la más fácil de encontrar.

Una vez que se ha comprendido la solución de inecuaciones de grado dos se proceden a la solución de inecuaciones de grado mayor que dos utilizando métodos anteriormente estudiados.

Lección 5: Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

En séptimo grado se estudió las ecuaciones lineales y el concepto de valor absoluto de números. En esta lección se aplicará el concepto de valor absoluto a ecuaciones ($|x| = a$) e inecuaciones lineales ($|x| < a$), para ello se estudian varios casos con sus respectivos ejemplos y ejercicios.

En la inecuaciones con valor absoluto es importante considerar los casos cuando el conjunto solución es vacío o el conjunto de los números reales, por ejemplo si se tiene una inecuación de la forma $|x| < -2$, por definición de valor absoluto se sabe que no habrá un número que pueda tomar x tal que su valor absoluto sea negativo por lo que su conjunto solución es ∅; a diferencia de $|x| > -2$ donde cualquier valor que tome x será mayor que –2 por lo que el conjunto solución son los números reales.

Lección 6: Gráfica de funciones polinómicas

En octavo grado y en Matemática I se estudia la gráfica de funciones lineales, en esta lección se trata de analizar el comportamiento de gráficas de funciones polinómicas de la forma $f(x) = x^n$ y establecer algunas características, es el primer acercamiento que los estudiantes tendrán con las funciones polinómicas, por lo que se pueden presentar algunas dificultades al momento de identificar qué tipo de función es, sin embargo es importante enseñar las características y la forma que tiene una función cuadrática, cubica para facilitar el trabajo a los alumnos, de igual manera cuando la función es de grado mayor a tres es necesario analizar la tabla de variación den signos para poder graficar y determinar su forma.

Lección 7: Expresiones algebraicas racionales

Se conoce la expresión algebraica racional (EAR) como una relación A/B donde A y B son polinomios. En 9° se estudió polinomios y las operaciones excepto la división; por lo que en esta lección se trata las EAR en una variable y se busca simplificar dichas expresiones utilizando la factorización o la división de polinomios, donde se busca escribirla a su mínima expresión es decir donde los polinomios del numerador y del denominador no tengan factores comunes.

Para escribir la mínima expresión de una EAR por lo general se factoriza el numerador y el denominador. En una EAR se debe tener el cuidado de no sustituir el valor que hace cero el denominador ya que la división entre cero es no definida, a estos valores que hacen cero el denominador se les conoce como valores excluidos.

Con las EAR se pueden efectuar operaciones para el caso se define

La adición como: $\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$

La sustracción: $\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$

Cuando los denominadores son distintos primero se obtienen las EAR con igual denominador utilizando el concepto de fracciones equivalentes y luego se realizan las operaciones correspondientes. Este proceso es similar al que se hace con las fracciones.

La multiplicación y la división se definen:

$\frac{A}{C} \times \frac{B}{D} = \frac{A \times B}{C \times D}$ y $\frac{A}{C} \div \frac{B}{D} = \frac{A \times D}{B \times C}$ respectivamente. Se sabe que A, B, C y D son polinomios.

Al dividir expresiones algebraicas se puede dar el caso donde se obtenga una expresión algebraica compleja es decir donde el numerador y el denominador sean EAR.

Al realizar esta operación es posible que los estudiantes tengan dificultades, por lo que se tiene que tener mucho cuidado especialmente con, los signos.

Lección 8: Gráfica de funciones racionales

En esta lección se estudiará la función racional $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios, se analizarán su dominio, y sus asíntotas tanto vertical como horizontal y sus interceptos.
De igual manera se trazará la gráfica de esta teniendo en cuenta la información anterior.

Se abordarán solo el caso donde el grado del polinomio del numerador es menor o igual que el del polinomio del denominador ya que se espera que en cursos de matemática posteriores se analicen otros casos más complejos.

Lección 9: Funciones especiales

Se define la función valor absoluto y la función mayor entero, sin profundizar mucho, se traza la gráfica y se analiza.

En el caso de la función valor absoluto se parte estudiando el comportamiento de la función $f(x) = x$ y $f(x) = -x$ de tal manera que se pueda llegar a concluir que $f(x)=|x|$ se ve como la gráfica de $f(x) = x$ para $x \geq 0$ y como $f(x) = -x$ para $x < 0$. Se concluye entonces que la función es par y esta es simétrica con respecto al eje y.
En la función mayor entero se analiza el comportamiento que tendrá la función al graficarla en el plano cartesiano por cada intervalo, cual es el dominio, cuál es el rango y sus interceptos, esta función es muy importante para que el estudiante comprenda el concepto de discontinuidad.

Unidad I. Lección 1.

Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Dividir polinomios.

Evaluación: [A] Ejercicios 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

- Establecer la relación entre la multiplicación de números enteros 4 x 3 = 12 y la multiplicación de polinomios $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ para deducir el procedimiento de la división de polinomios.

[A] (5 min)

Ejemplo 1.1.

- Deducir que el polinomio cociente debe ser de grado 2.
- Igualar los coeficientes de los términos semejantes para deducir los coeficientes de los términos cuadrático, lineal e independiente del polinomio cociente. (10 min)
- Explicar el cálculo de la división de polinomios en forma vertical. (10 min)

Ejercicio 1.1.

(20 min) Solución

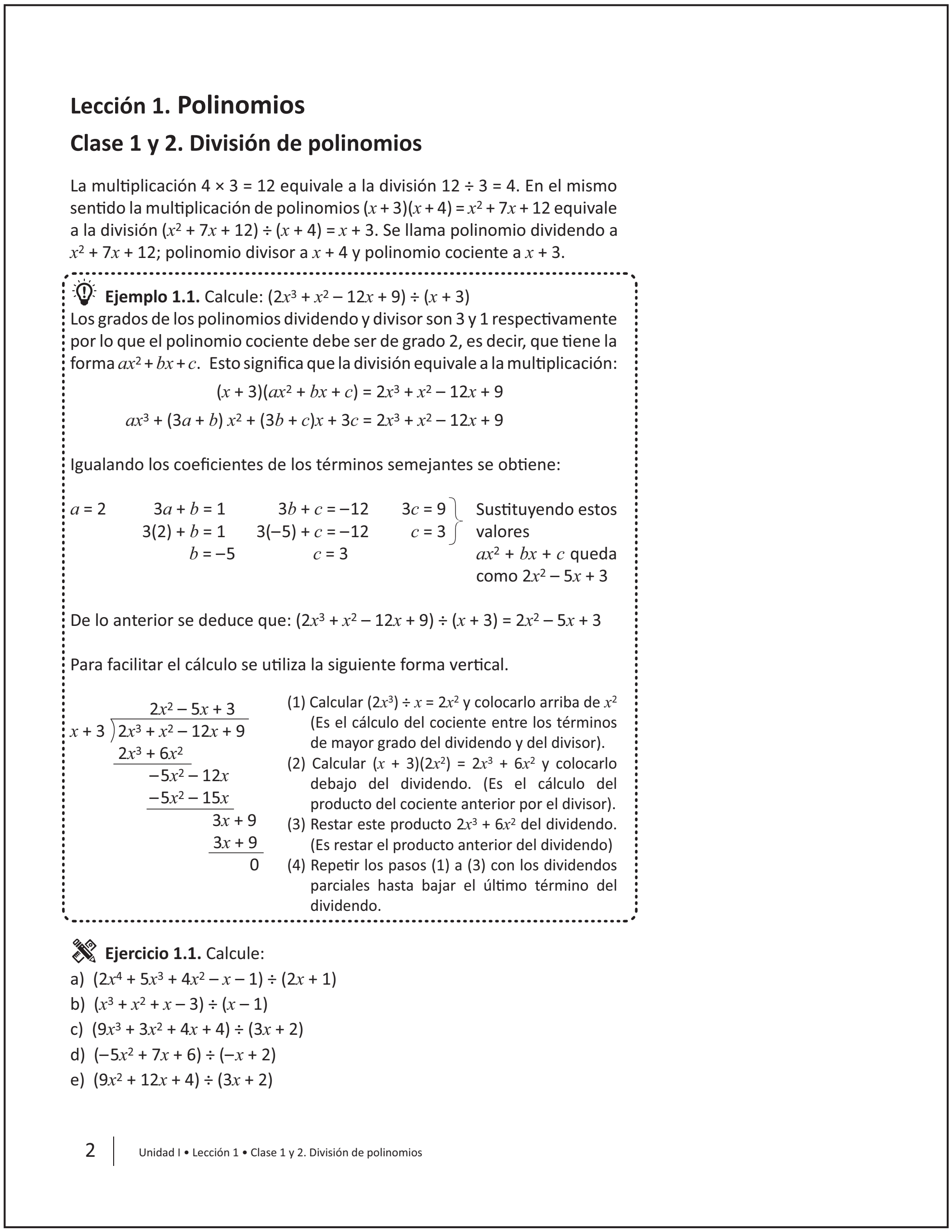
a) Polinomio cociente es: $x^3 + 2x^2 + x - 1$

b) Polinomio cociente es: $x^2 + 2x + 3$

c) Polinomio cociente es: $3x^2 - x + 2$

d) Polinomio cociente es: $5x + 3$

e) Polinomio cociente es: $3x + 2$



Lección 1. Polinomios

Clase 1 y 2. División de polinomios

La multiplicación 4 × 3 = 12 equivale a la división 12 ÷ 3 = 4. En el mismo sentido la multiplicación de polinomios $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ equivale a la división $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 4) = x + 3$. Se llama polinomio dividendo a $x^2 + 7x + 12$; polinomio divisor a $x + 4$ y polinomio cociente a $x + 3$.

Ejemplo 1.1. Calcule: $(2x^3 + x^2 - 12x + 9) \div (x + 3)$

Los grados de los polinomios dividendo y divisor son 3 y 1 respectivamente por lo que el polinomio cociente debe ser de grado 2, es decir, que tiene la forma $ax^2 + bx + c$. Esto significa que la división equivale a la multiplicación:

$$(x + 3)(ax^2 + bx + c) = 2x^3 + x^2 - 12x + 9$$

$$ax^3 + (3a + b)x^2 + (3b + c)x + 3c = 2x^3 + x^2 - 12x + 9$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes se obtiene:

$$\begin{array}{llll} a = 2 & 3a + b = 1 & 3b + c = -12 & 3c = 9 \\ & 3(2) + b = 1 & 3(-5) + c = -12 & c = 3 \\ & b = -5 & c = 3 & \end{array}$$

Sustituyendo estos valores $ax^2 + bx + c$ queda como $2x^2 - 5x + 3$

De lo anterior se deduce que: $(2x^3 + x^2 - 12x + 9) \div (x + 3) = 2x^2 - 5x + 3$

Para facilitar el cálculo se utiliza la siguiente forma vertical.

$$\begin{array}{r}
2x^2 - 5x + 3 \\
x + 3\,\overline{)\,2x^3 + x^2 - 12x + 9} \\
\underline{2x^3 + 6x^2} \\
-5x^2 - 12x \\
\underline{-5x^2 - 15x} \\
3x + 9 \\
\underline{3x + 9} \\
0
\end{array}$$

(1) Calcular $(2x^3) \div x = 2x^2$ y colocarlo arriba de x^2 (Es el cálculo del cociente entre los términos de mayor grado del dividendo y del divisor).

(2) Calcular $(x + 3)(2x^2) = 2x^3 + 6x^2$ y colocarlo debajo del dividendo. (Es el cálculo del producto del cociente anterior por el divisor).

(3) Restar este producto $2x^3 + 6x^2$ del dividendo. (Es restar el producto anterior del dividendo)

(4) Repetir los pasos (1) a (3) con los dividendos parciales hasta bajar el último término del dividendo.

Ejercicio 1.1. Calcule:

a) $(2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - x - 1) \div (2x + 1)$

b) $(x^3 + x^2 + x - 3) \div (x - 1)$

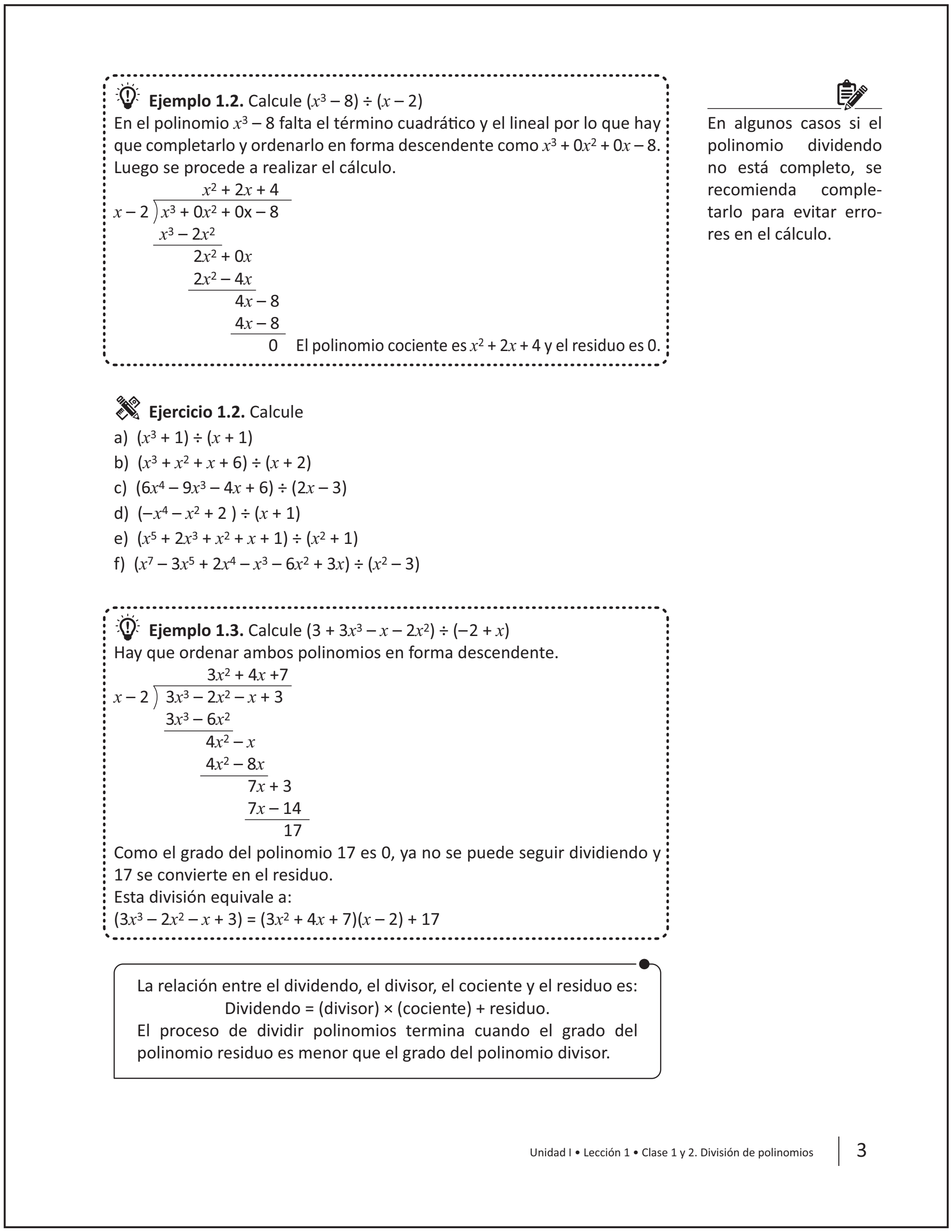
c) $(9x^3 + 3x^2 + 4x + 4) \div (3x + 2)$

d) $(-5x^2 + 7x + 6) \div (-x + 2)$

e) $(9x^2 + 12x + 4) \div (3x + 2)$

2 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1 y 2. División de polinomios

Clase 1 y 2
(Continuación)



Ejemplo 1.2. Calcule $(x^3 - 8) \div (x - 2)$

En el polinomio $x^3 - 8$ falta el término cuadrático y el lineal por lo que hay que completarlo y ordenarlo en forma descendente como $x^3 + 0x^2 + 0x - 8$. Luego se procede a realizar el cálculo.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad x^2 + 2x + 4 \\
\cline{2-2}
x - 2 \,) & x^3 + 0x^2 + 0\text{x} - 8 \\
 & \underline{x^3 - 2x^2} \\
 & \qquad 2x^2 + 0x \\
 & \qquad \underline{2x^2 - 4x} \\
 & \qquad\qquad 4x - 8 \\
 & \qquad\qquad \underline{4x - 8} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

El polinomio cociente es $x^2 + 2x + 4$ y el residuo es 0.

En algunos casos si el polinomio dividendo no está completo, se recomienda completarlo para evitar errores en el cálculo.

Ejercicio 1.2. Calcule

a) $(x^3 + 1) \div (x + 1)$

b) $(x^3 + x^2 + x + 6) \div (x + 2)$

c) $(6x^4 - 9x^3 - 4x + 6) \div (2x - 3)$

d) $(-x^4 - x^2 + 2) \div (x + 1)$

e) $(x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1) \div (x^2 + 1)$

f) $(x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 3x) \div (x^2 - 3)$

Ejemplo 1.3. Calcule $(3 + 3x^3 - x - 2x^2) \div (-2 + x)$

Hay que ordenar ambos polinomios en forma descendente.

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad 3x^2 + 4x + 7 \\
\cline{2-2}
x - 2 \,) & 3x^3 - 2x^2 - x + 3 \\
 & \underline{3x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad 4x^2 - x \\
 & \qquad \underline{4x^2 - 8x} \\
 & \qquad\qquad 7x + 3 \\
 & \qquad\qquad \underline{7x - 14} \\
 & \qquad\qquad\quad 17
\end{array}
$$

Como el grado del polinomio 17 es 0, ya no se puede seguir dividiendo y 17 se convierte en el residuo.

Esta división equivale a:

$(3x^3 - 2x^2 - x + 3) = (3x^2 + 4x + 7)(x - 2) + 17$

La relación entre el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo es:

Dividendo = (divisor) × (cociente) + residuo.

El proceso de dividir polinomios termina cuando el grado del polinomio residuo es menor que el grado del polinomio divisor.

Unidad I • Lección 1 • Clase 1 y 2. División de polinomios | 3

- * Concluir con la relación:
  Dividendo = (divisor) x (cociente) + residuo.
- * Concluir que el proceso de división termina cuando el grado del polinomio residuo es menor que el grado del polinomio divisor. (7 min)

Ejemplo 1.2.

* Concluir que los polinomios dividendo y divisor deben completar y ordenarse en forma descendente para poder efectuar la división de los mismos. (5 min)

Ejercicio 1.2.

(10 min) Solución

a) Polinomio cociente es: $x^2 - x + 1$ y el residuo es 0

b) Polinomio cociente es: $x^2 - x + 3$ y el residuo es: 0

c) Polinomio cociente es: $3x^3 - 2$ y el residuo es: 0

d) Polinomio cociente es: $-x^3 + x^2 - 2x + 2$ y el residuo es: 0

e) Polinomio cociente es: $x^3 + x + 1$ y el residuo es 0

f) Polinomio cociente es: $x^5 + 2x^2 - x$ y el residuo es: 0

Ejemplo 1.3.

* Concluir que el residuo en la división de estos polinomios es distinto de cero.

Clase 1 y 2

(Continuación)

Ejercicio 1.3.

(8 min) Solución

a) Polinomio cociente es: $2x - 1$ y el residuo es: -2

b) Polinomio cociente es: $x^2 - 2x + 3$ y el resido es: $4x - 4$

c) Polinomio cociente es: $3x + 1$ y el residuo es: $-2x + 5$

d) Polinomio cociente es: $x^2 + 3x$ y el residuo es: $-3x + 1$

e) Polinomio cociente es: $x + 3$ y el residuo es: 8

f) Polinomio cociente es: $x^2 - 8$ y el residuo es: 6

g) Polinomio cociente es: $x^3 - 2x + 3$ y el residuo es: $20x - 10$

Ejemplo 1.4.

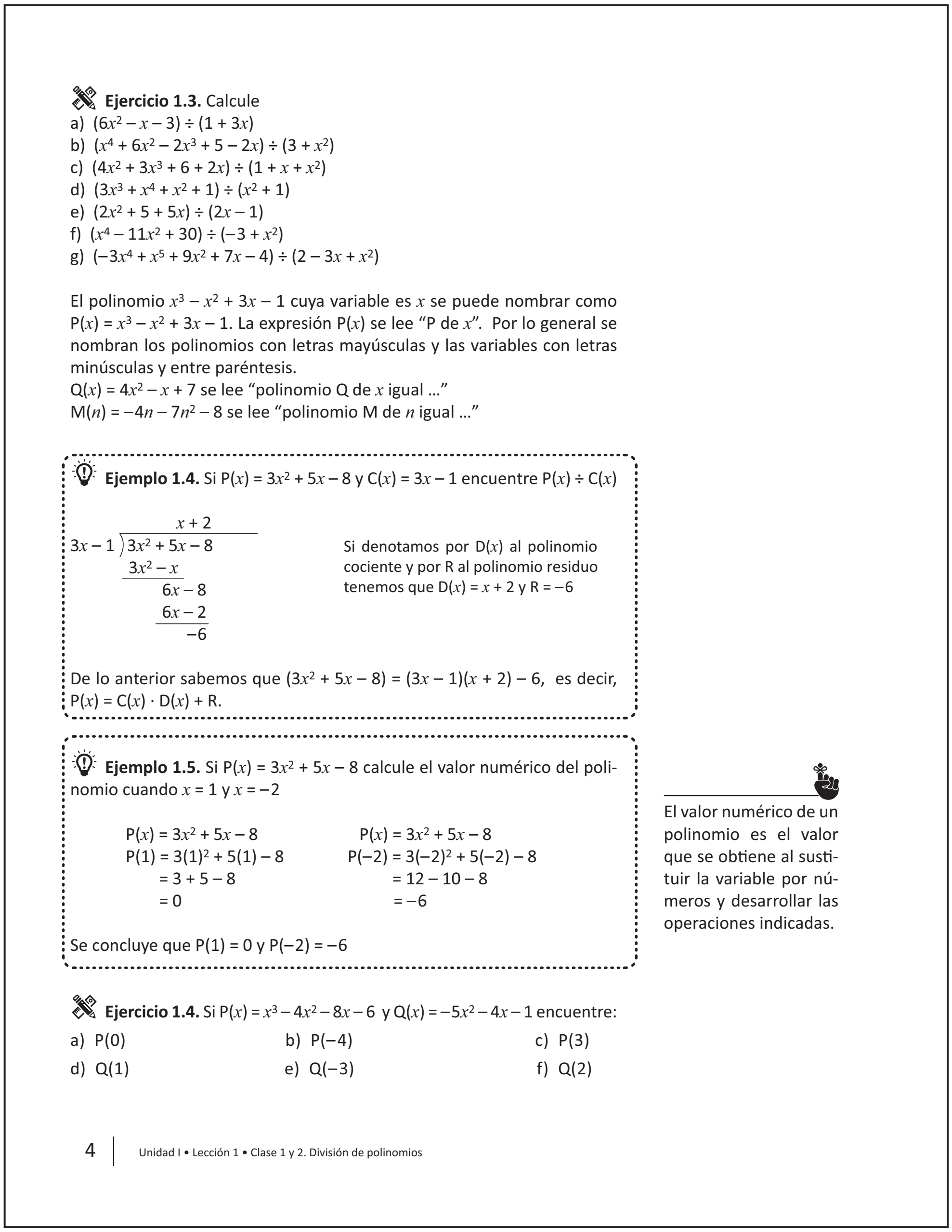
* Nombrar un polinomio utilizando la notación P(x).

* Concluir que los polinomios se nombran con letras mayúsculas y las variables con letras minúsculas.

* Expresar la relación "Dividendo = (divisor) x (cociente) + residuo" utilizando la notación de los polinomios. (5 min)

Ejemplo 1.5.

*Definir el valor numérico de un polinomio. (5 min)



Ejercicio 1.3. Calcule

a) $(6x^2 - x - 3) \div (1 + 3x)$

b) $(x^4 + 6x^2 - 2x^3 + 5 - 2x) \div (3 + x^2)$

c) $(4x^2 + 3x^3 + 6 + 2x) \div (1 + x + x^2)$

d) $(3x^3 + x^4 + x^2 + 1) \div (x^2 + 1)$

e) $(2x^2 + 5 + 5x) \div (2x - 1)$

f) $(x^4 - 11x^2 + 30) \div (-3 + x^2)$

g) $(-3x^4 + x^5 + 9x^2 + 7x - 4) \div (2 - 3x + x^2)$

El polinomio $x^3 - x^2 + 3x - 1$ cuya variable es x se puede nombrar como $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$. La expresión P($x$) se lee "P de x". Por lo general se nombran los polinomios con letras mayúsculas y las variables con letras minúsculas y entre paréntesis.
$Q(x) = 4x^2 - x + 7$ se lee "polinomio Q de x igual ..."
$M(n) = -4n - 7n^2 - 8$ se lee "polinomio M de n igual ..."

Ejemplo 1.4. Si $P(x) = 3x^2 + 5x - 8$ y $C(x) = 3x - 1$ encuentre $P(x) \div C(x)$

$$\begin{array}{rl} & x+2 \\ \cline{2-2} 3x-1 \,\big) & 3x^2+5x-8 \\ & \underline{3x^2-x} \\ & 6x-8 \\ & \underline{6x-2} \\ & -6 \end{array}$$

Si denotamos por D(x) al polinomio cociente y por R al polinomio residuo tenemos que $D(x) = x + 2$ y $R = -6$

De lo anterior sabemos que $(3x^2 + 5x - 8) = (3x - 1)(x + 2) - 6$, es decir, $P(x) = C(x) \cdot D(x) + R$.

Ejemplo 1.5. Si $P(x) = 3x^2 + 5x - 8$ calcule el valor numérico del polinomio cuando $x = 1$ y $x = -2$

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^2 + 5x - 8 \\ P(1) &= 3(1)^2 + 5(1) - 8 \\ &= 3 + 5 - 8 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(x) &= 3x^2 + 5x - 8 \\ P(-2) &= 3(-2)^2 + 5(-2) - 8 \\ &= 12 - 10 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Se concluye que $P(1) = 0$ y $P(-2) = -6$

El valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir la variable por números y desarrollar las operaciones indicadas.

Ejercicio 1.4. Si $P(x) = x^3 - 4x^2 - 8x - 6$ y $Q(x) = -5x^2 - 4x - 1$ encuentre:

a) P(0) b) P(−4) c) P(3)

d) Q(1) e) Q(−3) f) Q(2)

4 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1 y 2. División de polinomios

Ejercicio 1.4. (5 min) Solución

a) $P(0) = -6$ b) $P(-4) = -102$

c) $P(3) = -39$ d) $Q(1) = -10$

e) $Q(-3) = -34$ f) $Q(2) = -29$

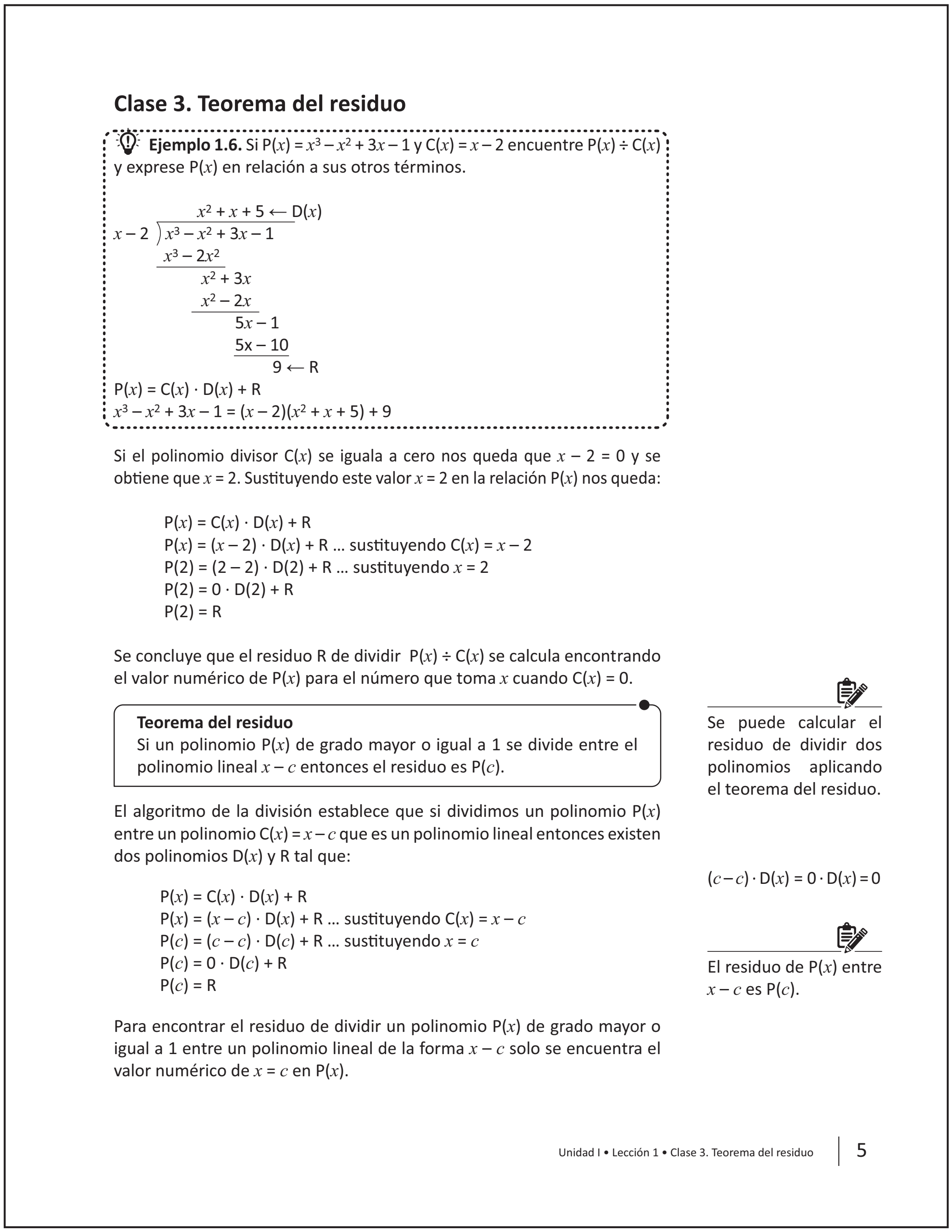
Objetivo: **[B]** Aplicar el teorema del residuo para encontrar el residuo al dividir polinomios.

Evaluación: Ejercicio 1.5.

Unidad I. Lección 1.

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)



Clase 3. Teorema del residuo

Ejemplo 1.6. Si P(x) = $x^3 - x^2 + 3x - 1$ y C(x) = $x - 2$ encuentre P(x) ÷ C(x) y exprese P(x) en relación a sus otros términos.

$$\begin{array}{rl} & x^2 + x + 5 \leftarrow \mathrm{D}(x) \\ x - 2 & \overline{)\,x^3 - x^2 + 3x - 1} \\ & \underline{x^3 - 2x^2} \\ & \quad\;\; x^2 + 3x \\ & \quad\;\; \underline{x^2 - 2x} \\ & \qquad\quad 5x - 1 \\ & \qquad\quad \underline{5x - 10} \\ & \qquad\qquad\; 9 \leftarrow \mathrm{R} \end{array}$$

P(x) = C(x) · D(x) + R

$x^3 - x^2 + 3x - 1 = (x - 2)(x^2 + x + 5) + 9$

Si el polinomio divisor C(x) se iguala a cero nos queda que $x - 2 = 0$ y se obtiene que $x = 2$. Sustituyendo este valor $x = 2$ en la relación P(x) nos queda:

P(x) = C(x) · D(x) + R
P(x) = (x – 2) · D(x) + R … sustituyendo C(x) = x – 2
P(2) = (2 – 2) · D(2) + R … sustituyendo x = 2
P(2) = 0 · D(2) + R
P(2) = R

Se concluye que el residuo R de dividir P(x) ÷ C(x) se calcula encontrando el valor numérico de P(x) para el número que toma x cuando C(x) = 0.

Se puede calcular el residuo de dividir dos polinomios aplicando el teorema del residuo.

Teorema del residuo
Si un polinomio P(x) de grado mayor o igual a 1 se divide entre el polinomio lineal $x - c$ entonces el residuo es P(c).

El algoritmo de la división establece que si dividimos un polinomio P(x) entre un polinomio C(x) = $x - c$ que es un polinomio lineal entonces existen dos polinomios D(x) y R tal que:

P(x) = C(x) · D(x) + R
P(x) = (x – c) · D(x) + R … sustituyendo C(x) = x – c
P(c) = (c – c) · D(c) + R … sustituyendo x = c
P(c) = 0 · D(c) + R
P(c) = R

($c - c$) · D(x) = 0 · D(x) = 0

El residuo de P(x) entre $x - c$ es P(c).

Para encontrar el residuo de dividir un polinomio P(x) de grado mayor o igual a 1 entre un polinomio lineal de la forma $x - c$ solo se encuentra el valor numérico de $x = c$ en P(x).

Ejemplo 1.6.

*Efectuar la división de los polinomios expresando el dividendo en relación a los otros términos.

*Igualar el polinomio divisor a cero para obtener x = 2 y sustituir este valor en la relación P(x) = C(x) × D(x) + R.

*Concluir que el residuo R de dividir P(x) ÷ C(x) se calcula encontrando el valor numérico de P(x) para el valor que toma x cuando C(x) = 0.

(15 min)

Comprender el teorema del residuo.

*Concluir con el algoritmo en forma general del teorema del residuo. (10 min)

Unidad I. Lección 1.

Clase 3

(Continuación)

Clase 4

Objetivo: **[C]** Aplicar el teorema del factor para determinar los factores de un polinomio.

Evaluación: [C] Ejercicio 1.6.

Ejercicio 1.5

(20 min) Solución

a) 10

b) -29

c) $-\dfrac{1387}{2}$

d) $-\dfrac{19}{4}$

e) $-\dfrac{149}{25}$

[Hasta aquí Clase 3]

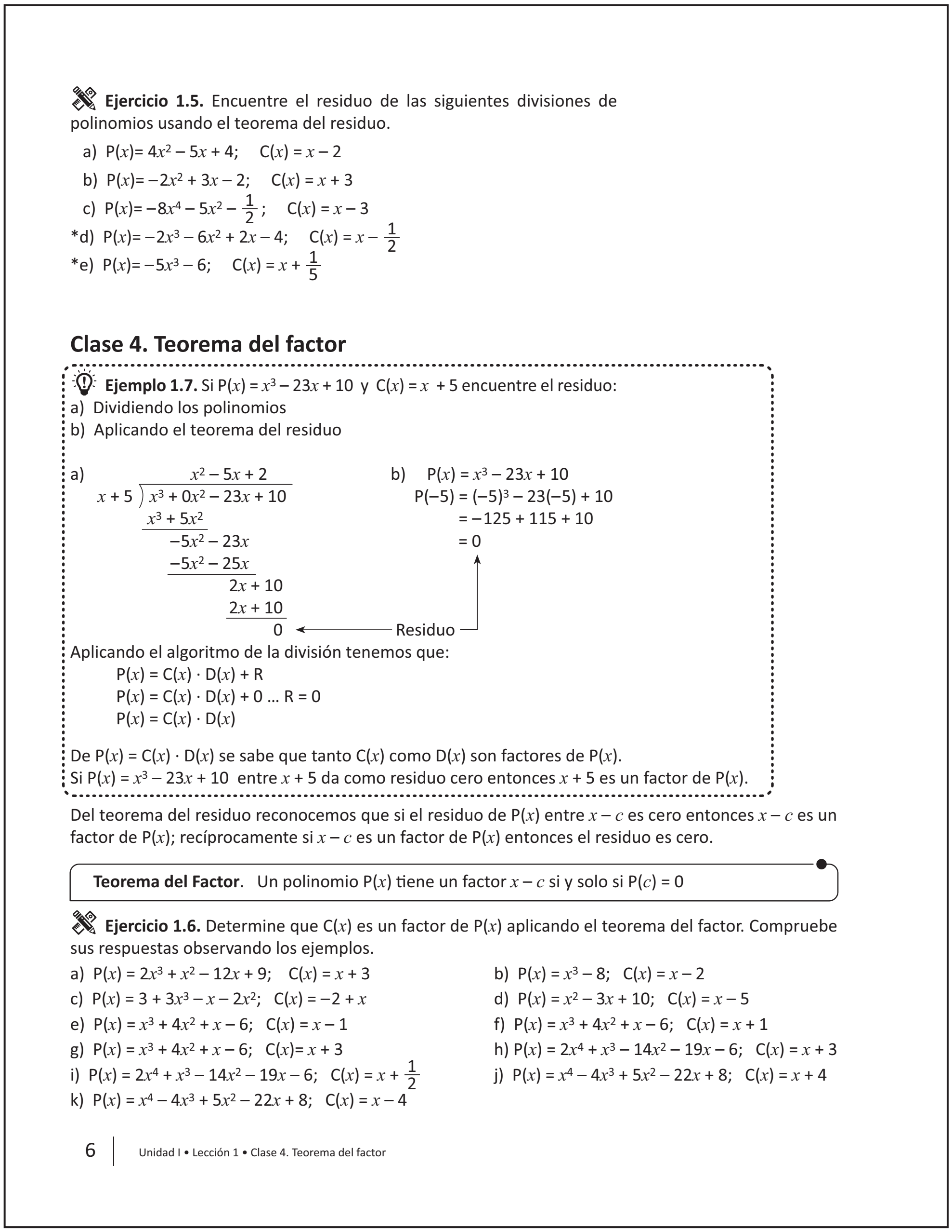
[Desde aquí Clase 4]

Ejemplo 1.7

- Encontrar el residuo de la división de los polinomios de las dos formas (dividiéndolos y aplicando el teorema del residuo).
- Aplicar el algoritmo de la división "P(x) = C(x) x D(x) + R" para concluir que si el residuo es 0 tanto el polinomio C(x) como D(x) son factores de P(x). (15 min)

Comprender el teorema del factor.

- Concluir con el algoritmo en forma general del teorema del factor. (10 min)



Ejercicio 1.5. Encuentre el residuo de las siguientes divisiones de polinomios usando el teorema del residuo.

a) $P(x)= 4x^2 - 5x + 4;\quad C(x) = x - 2$

b) $P(x)= -2x^2 + 3x - 2;\quad C(x) = x + 3$

c) $P(x)= -8x^4 - 5x^2 - \frac{1}{2};\quad C(x) = x - 3$

*d) $P(x)= -2x^3 - 6x^2 + 2x - 4;\quad C(x) = x - \frac{1}{2}$

*e) $P(x)= -5x^3 - 6;\quad C(x) = x + \frac{1}{5}$

Clase 4. Teorema del factor

Ejemplo 1.7. Si $P(x) = x^3 - 23x + 10$ y $C(x) = x + 5$ encuentre el residuo:

a) Dividiendo los polinomios

b) Aplicando el teorema del residuo

a)
$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 2 \\ x + 5\,\overline{)\,x^3 + 0x^2 - 23x + 10} \\ \underline{x^3 + 5x^2} \qquad\qquad \\ -5x^2 - 23x \qquad \\ \underline{-5x^2 - 25x} \qquad \\ 2x + 10 \\ \underline{2x + 10} \\ 0 \xleftarrow{\qquad} \text{Residuo} \end{array}$$

b)
$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 23x + 10 \\ P(-5) &= (-5)^3 - 23(-5) + 10 \\ &= -125 + 115 + 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo de la división tenemos que:

$$P(x) = C(x) \cdot D(x) + R$$
$$P(x) = C(x) \cdot D(x) + 0 \ldots R = 0$$
$$P(x) = C(x) \cdot D(x)$$

De $P(x) = C(x) \cdot D(x)$ se sabe que tanto $C(x)$ como $D(x)$ son factores de $P(x)$.
Si $P(x) = x^3 - 23x + 10$ entre $x + 5$ da como residuo cero entonces $x + 5$ es un factor de $P(x)$.

Del teorema del residuo reconocemos que si el residuo de $P(x)$ entre $x - c$ es cero entonces $x - c$ es un factor de $P(x)$; recíprocamente si $x - c$ es un factor de $P(x)$ entonces el residuo es cero.

Teorema del Factor. Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $x - c$ si y solo si $P(c) = 0$

Ejercicio 1.6. Determine que $C(x)$ es un factor de $P(x)$ aplicando el teorema del factor. Compruebe sus respuestas observando los ejemplos.

a) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 9;\quad C(x) = x + 3$

b) $P(x) = x^3 - 8;\quad C(x) = x - 2$

c) $P(x) = 3 + 3x^3 - x - 2x^2;\quad C(x) = -2 + x$

d) $P(x) = x^2 - 3x + 10;\quad C(x) = x - 5$

e) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6;\quad C(x) = x - 1$

f) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6;\quad C(x) = x + 1$

g) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6;\quad C(x)= x + 3$

h) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6;\quad C(x) = x + 3$

i) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x - 6;\quad C(x) = x + \frac{1}{2}$

j) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 22x + 8;\quad C(x) = x + 4$

k) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 22x + 8;\quad C(x) = x - 4$

6 | Unidad I • Lección 1 • Clase 4. Teorema del factor

Ejercicio 1.6.

(20 min) Solución

a) es factor

b) es factor

c) no es factor

d) no es factor

e) es factor

f) no es factor

g) es factor

h) no es factor

i) es factor

j) no es factor

k) es factor

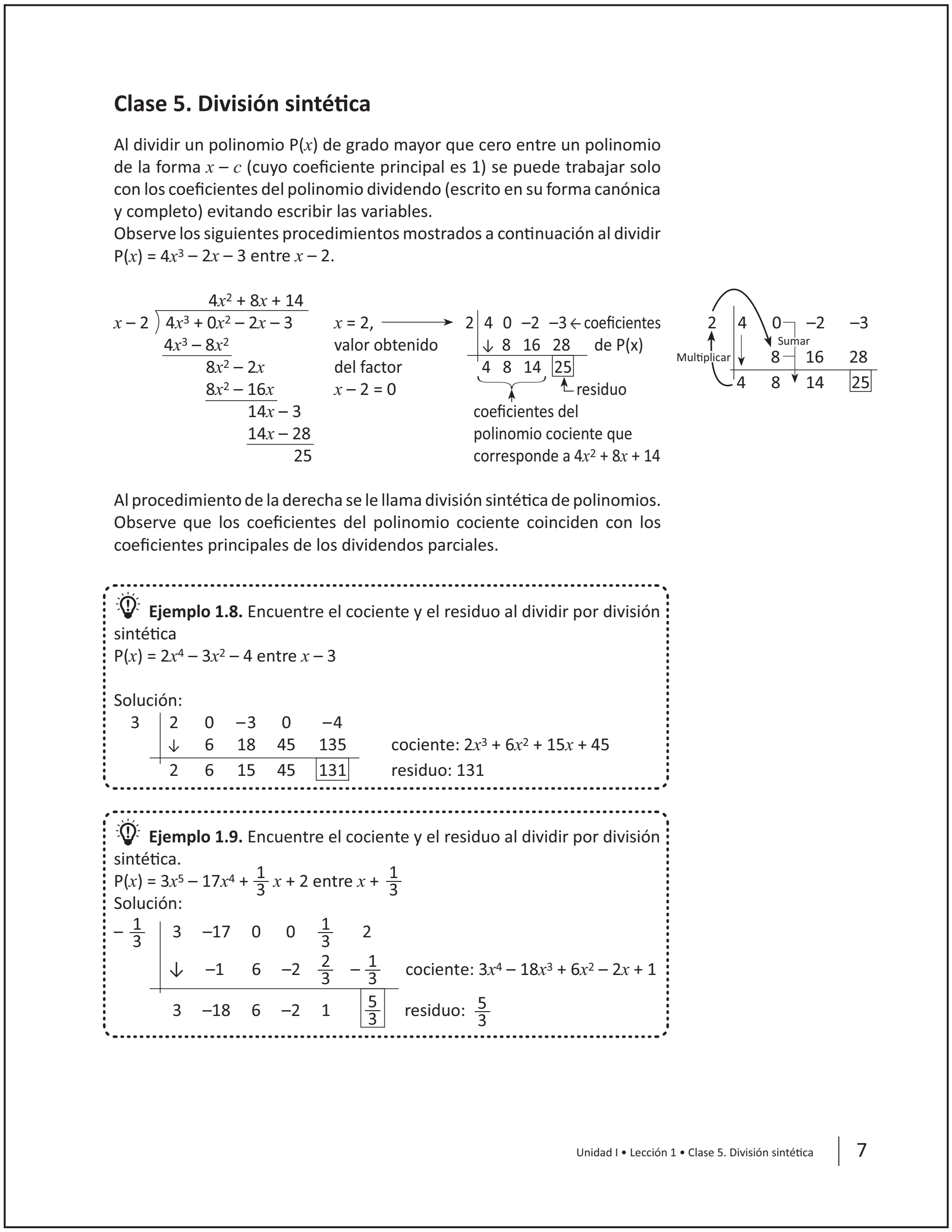
Objetivo: **[D]** Dividir polinomios utilizando la división sintética.

Evaluación: [D] Ejercicios 1.7 y 1.8.

Unidad I. Lección 1.

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)



Clase 5. División sintética

Al dividir un polinomio P(x) de grado mayor que cero entre un polinomio de la forma $x - c$ (cuyo coeficiente principal es 1) se puede trabajar solo con los coeficientes del polinomio dividendo (escrito en su forma canónica y completo) evitando escribir las variables.
Observe los siguientes procedimientos mostrados a continuación al dividir P(x) = $4x^3 - 2x - 3$ entre $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 + 8x + 14 \\ \hline x-2 & 4x^3 + 0x^2 - 2x - 3 \\ & \underline{4x^3 - 8x^2} \\ & \quad 8x^2 - 2x \\ & \quad \underline{8x^2 - 16x} \\ & \qquad 14x - 3 \\ & \qquad \underline{14x - 28} \\ & \qquad\qquad 25 \end{array}$$

$x = 2$, valor obtenido del factor $x - 2 = 0$ $\longrightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & 0 & -2 & -3 \leftarrow \text{coeficientes de P(x)} \\ & \downarrow & 8 & 16 & 28 \\ \hline & \underbrace{4 \quad 8 \quad 14}_{\text{coeficientes del polinomio cociente que corresponde a } 4x^2 + 8x + 14} & & & \boxed{25} \leftarrow \text{residuo} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & 0 & -2 & -3 \\ & \downarrow & 8 & 16 & 28 \\ \hline & 4 & 8 & 14 & \boxed{25} \end{array}$$

Multiplicar

Sumar

Al procedimiento de la derecha se le llama división sintética de polinomios. Observe que los coeficientes del polinomio cociente coinciden con los coeficientes principales de los dividendos parciales.

Ejemplo 1.8. Encuentre el cociente y el residuo al dividir por división sintética
P(x) = $2x^4 - 3x^2 - 4$ entre $x - 3$

Solución:

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 2 & 0 & -3 & 0 & -4 \\ & \downarrow & 6 & 18 & 45 & 135 \\ \hline & 2 & 6 & 15 & 45 & \boxed{131} \end{array}$$

cociente: $2x^3 + 6x^2 + 15x + 45$
residuo: 131

Ejemplo 1.9. Encuentre el cociente y el residuo al dividir por división sintética.
P(x) = $3x^5 - 17x^4 + \frac{1}{3}x + 2$ entre $x + \frac{1}{3}$
Solución:

$$\begin{array}{c|cccccc} -\frac{1}{3} & 3 & -17 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ & \downarrow & -1 & 6 & -2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline & 3 & -18 & 6 & -2 & 1 & \boxed{\frac{5}{3}} \end{array}$$

cociente: $3x^4 - 18x^3 + 6x^2 - 2x + 1$
residuo: $\frac{5}{3}$

Unidad I • Lección 1 • Clase 5. División sintética | 7

Deducir el procedimiento de la división sintética.

- Concluir que al dividir un polinomio de grado mayor que cero entre un polinomio de la forma $x - c$ se puede dividir fácilmente utilizando el procedimiento de la división sintética.
- Comparar ambos procedimientos para concluir que sólo se trabaja con los coeficientes del polinomio dividendo en la división sintética.
  (10 min)

Ejemplo 1.8.
(5 min)

Ejemplo 1.9.
(5 min)

Clase 5

(Continuación)

Ejercicio 1.7

(10 min) Solución

a) Cociente:
   $4x^2 - 12x + 28$
   Residuo: -80

b) Cociente:
   $5x^3 + 10x^2 + 18x + 36$
   Residuo: 69

c) Cociente:
   $-7x^4 - 7x^3 - 5x^2 - 5x - 10$
   Residuo: -16

d) Cociente:
   $-4x^3 - 2x^2 + 2x$
   Residuo: 0

e) Cociente:
   $-8x^3 - 24x^2 - 75x - 225$
   Residuo: -670

f) Cociente:
   $4x^4 - 8x^3 + 16x^2$
   $- 34x + 68$
   Residuo: -142

Ejemplo 1.10

(5 min)

Ejemplo 1.11.

(5 min)

Ejercicio 1.8

(5 min) Solución

a) Residuo: -12, no es factor

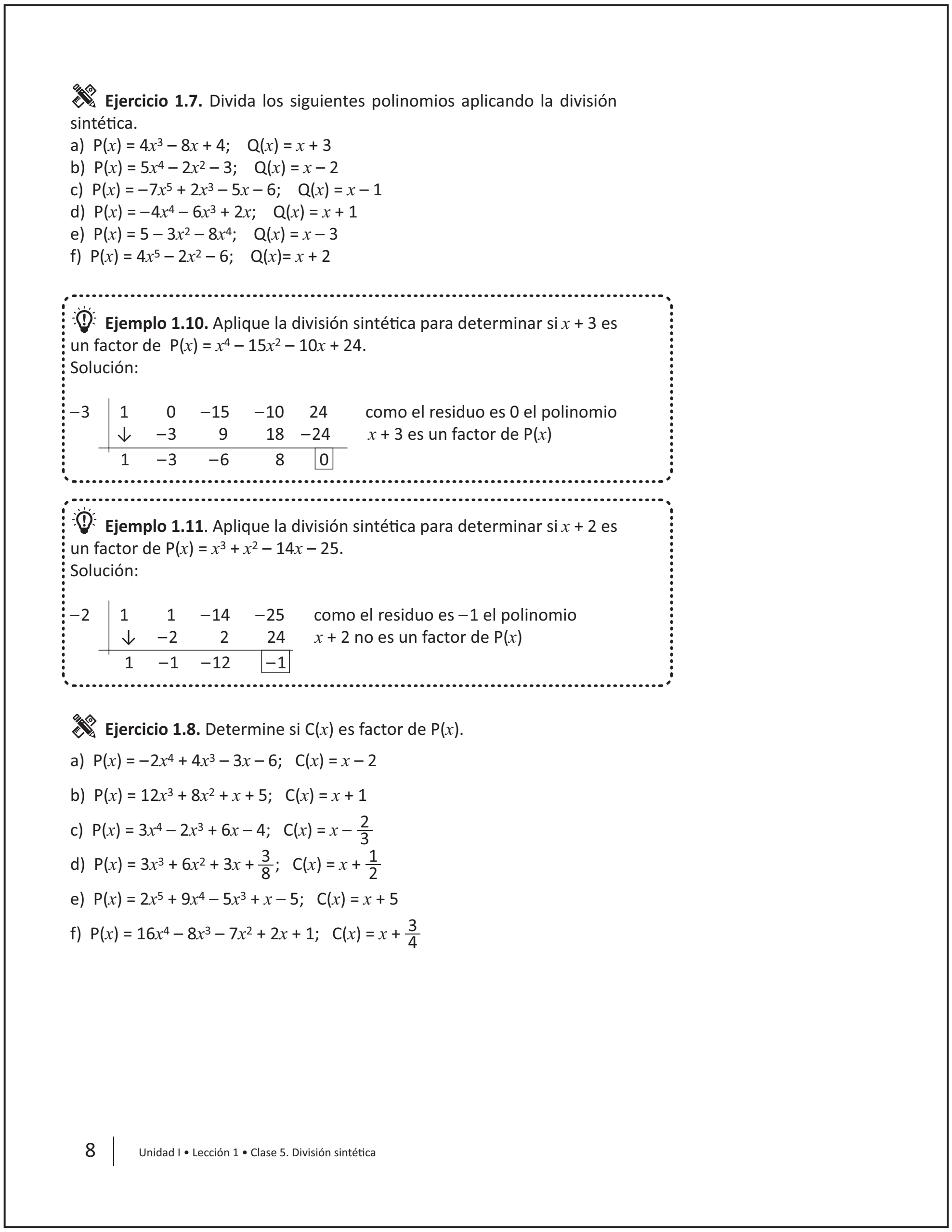
b) Residuo: 0, es factor

c) Residuo: 0, es factor

d) Residuo: 0, es factor

e) Residuo: -10, no es factor

f) residuo: 4, no es factor



Ejercicio 1.7. Divida los siguientes polinomios aplicando la división sintética.

a) $P(x) = 4x^3 - 8x + 4$; $Q(x) = x + 3$
b) $P(x) = 5x^4 - 2x^2 - 3$; $Q(x) = x - 2$
c) $P(x) = -7x^5 + 2x^3 - 5x - 6$; $Q(x) = x - 1$
d) $P(x) = -4x^4 - 6x^3 + 2x$; $Q(x) = x + 1$
e) $P(x) = 5 - 3x^2 - 8x^4$; $Q(x) = x - 3$
f) $P(x) = 4x^5 - 2x^2 - 6$; $Q(x)= x + 2$

Ejemplo 1.10. Aplique la división sintética para determinar si $x + 3$ es un factor de $P(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$.

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 \\ & \downarrow & -3 & 9 & 18 & -24 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

como el residuo es 0 el polinomio $x + 3$ es un factor de $P(x)$

Ejemplo 1.11. Aplique la división sintética para determinar si $x + 2$ es un factor de $P(x) = x^3 + x^2 - 14x - 25$.

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -14 & -25 \\ & \downarrow & -2 & 2 & 24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & \boxed{-1} \end{array}$$

como el residuo es -1 el polinomio $x + 2$ no es un factor de $P(x)$

Ejercicio 1.8. Determine si $C(x)$ es factor de $P(x)$.

a) $P(x) = -2x^4 + 4x^3 - 3x - 6$; $C(x) = x - 2$

b) $P(x) = 12x^3 + 8x^2 + x + 5$; $C(x) = x + 1$

c) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 6x - 4$; $C(x) = x - \frac{2}{3}$

d) $P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 3x + \frac{3}{8}$; $C(x) = x + \frac{1}{2}$

e) $P(x) = 2x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x - 5$; $C(x) = x + 5$

f) $P(x) = 16x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1$; $C(x) = x + \frac{3}{4}$

8 | Unidad I • Lección 1 • Clase 5. División sintética

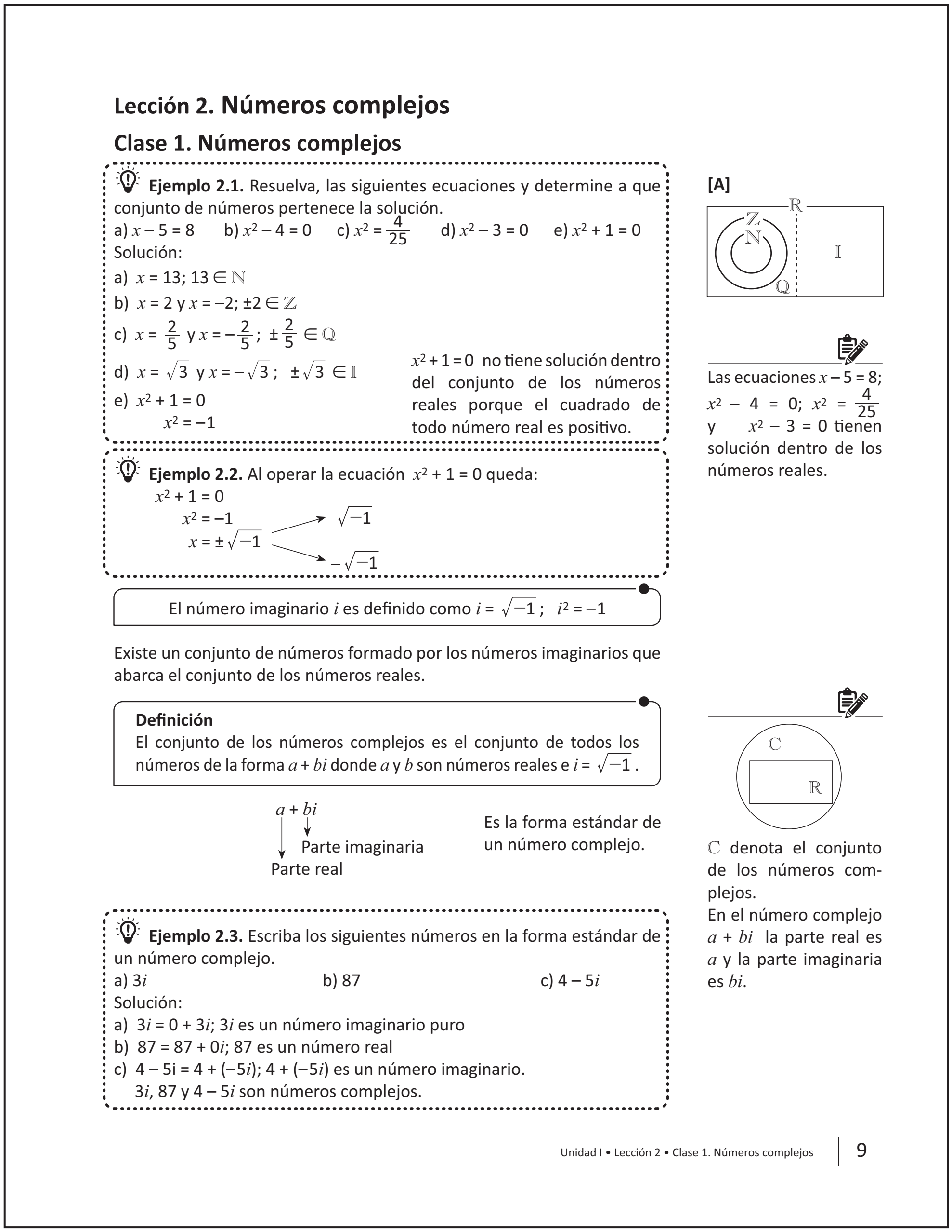
Objetivo: **[A]** Definir un número complejo.

Evaluación: [A] Ejercicio 2.1

Unidad I. Lección 2.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)



Lección 2. Números complejos

Clase 1. Números complejos

Ejemplo 2.1. Resuelva, las siguientes ecuaciones y determine a que conjunto de números pertenece la solución.

a) $x - 5 = 8$ b) $x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 = \frac{4}{25}$ d) $x^2 - 3 = 0$ e) $x^2 + 1 = 0$

Solución:

a) $x = 13$; $13 \in \mathbb{N}$

b) $x = 2$ y $x = -2$; $\pm 2 \in \mathbb{Z}$

c) $x = \frac{2}{5}$ y $x = -\frac{2}{5}$; $\pm\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$

d) $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{3} \in \mathbb{I}$

e) $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x^2 + 1 = 0$ no tiene solución dentro del conjunto de los números reales porque el cuadrado de todo número real es positivo.

Ejemplo 2.2. Al operar la ecuación $x^2 + 1 = 0$ queda:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\begin{tikzcd} & \sqrt{-1} \\ x = \pm\sqrt{-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & -\sqrt{-1} \end{tikzcd}$$

El número imaginario i es definido como $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$

Existe un conjunto de números formado por los números imaginarios que abarca el conjunto de los números reales.

Definición

El conjunto de los números complejos es el conjunto de todos los números de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$.

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{Parte imaginaria}}$$

Es la forma estándar de un número complejo.

Ejemplo 2.3. Escriba los siguientes números en la forma estándar de un número complejo.

a) $3i$ b) 87 c) $4 - 5i$

Solución:

a) $3i = 0 + 3i$; $3i$ es un número imaginario puro

b) $87 = 87 + 0i$; 87 es un número real

c) $4 - 5i = 4 + (-5i)$; $4 + (-5i)$ es un número imaginario.

$3i$, 87 y $4 - 5i$ son números complejos.

[A]

Las ecuaciones $x - 5 = 8$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = \frac{4}{25}$ y $x^2 - 3 = 0$ tienen solución dentro de los números reales.

$\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos.

En el número complejo $a + bi$ la parte real es a y la parte imaginaria es bi.

Unidad I • Lección 2 • Clase 1. Números complejos | 9

[A]

Construir el conjunto de los números complejos.

Ejemplo 2.1

- Resolver las ecuaciones planteadas determinando el conjunto de números al que pertenece su conjunto solución.

Ejemplo 2.2

- Concluir que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales porque no existen las raíces cuadradas de números negativos.
- Definir el número imaginario $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$.
- Definir un número complejo. (10 min)

Ejemplo 2.3

(5 min)

Clase 1
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Sumar y restar números complejos.

Evaluación: [B] Ejercicio 2.2 y 2.3.

Ejercicio 2.1
(5 min) Solución
a) $-24 + 0i$
b) $0 + (-4i)$
c) $-8 + (-\frac{3}{4}i)$
d) $0 + (-\frac{6}{7}\,\mathrm{i})$

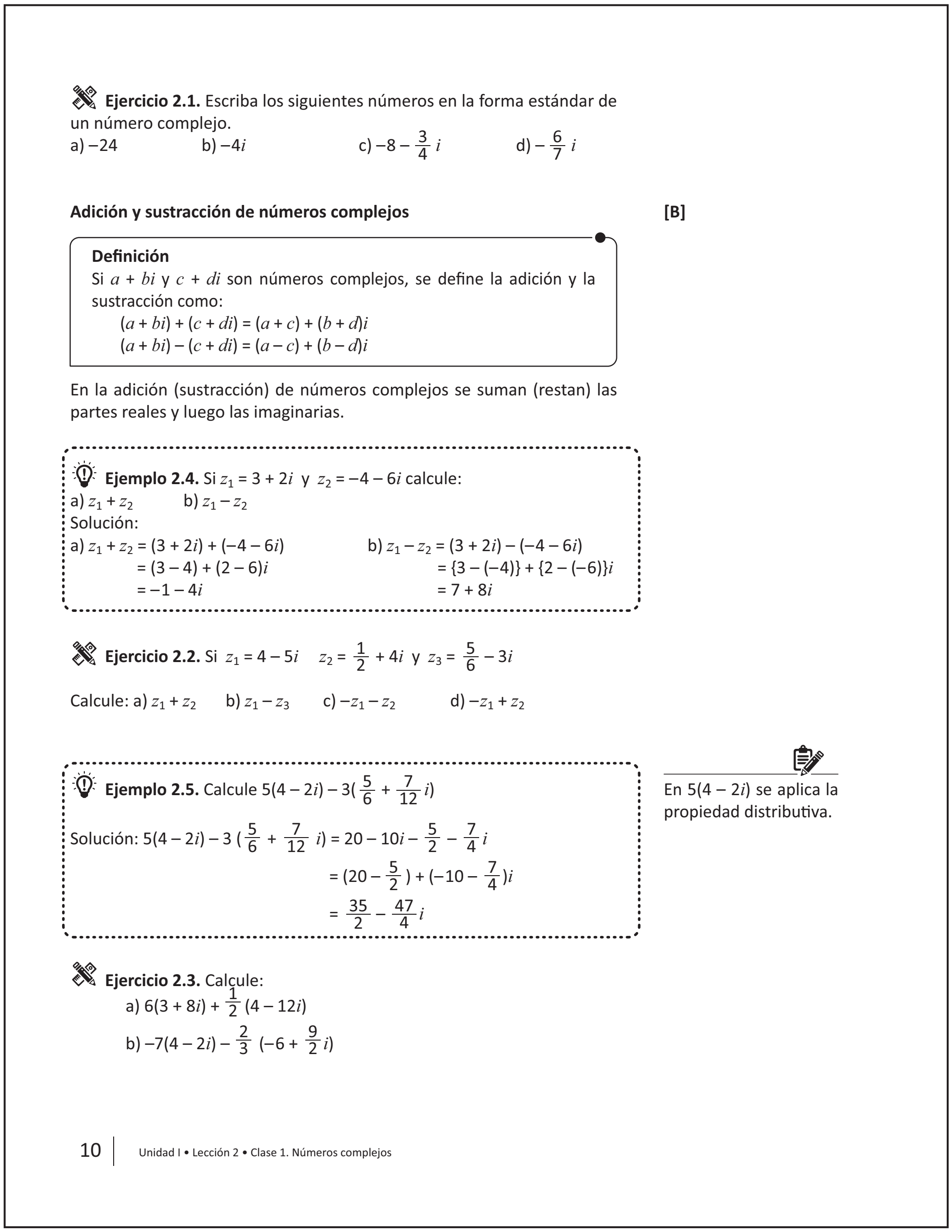
Sumar y restar números complejos. [B]

- Concluir que se suman (restan) las partes enteras y luego las imaginarias.
  (5 min)

Ejemplo 2.4.
(5 min)

Ejercicio 2.2
(5 min) Solución
a) $\frac{9}{2} - i$
b) $\frac{19}{6} - 2i$
c) $-\frac{9}{2} + i$
d) $-\frac{7}{2} + 9i$

Ejemplo 2.5
(5 min)



Ejercicio 2.1. Escriba los siguientes números en la forma estándar de un número complejo.
a) -24 b) $-4i$ c) $-8 - \frac{3}{4}i$ d) $-\frac{6}{7}i$

Adición y sustracción de números complejos **[B]**

Definición
Si $a + bi$ y $c + di$ son números complejos, se define la adición y la sustracción como:
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

En la adición (sustracción) de números complejos se suman (restan) las partes reales y luego las imaginarias.

Ejemplo 2.4. Si $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -4 - 6i$ calcule:
a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
Solución:
a) $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-4 - 6i)$
$= (3 - 4) + (2 - 6)i$
$= -1 - 4i$
b) $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (-4 - 6i)$
$= \{3 - (-4)\} + \{2 - (-6)\}i$
$= 7 + 8i$

Ejercicio 2.2. Si $z_1 = 4 - 5i$ $z_2 = \frac{1}{2} + 4i$ y $z_3 = \frac{5}{6} - 3i$

Calcule: a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_3$ c) $-z_1 - z_2$ d) $-z_1 + z_2$

Ejemplo 2.5. Calcule $5(4 - 2i) - 3(\frac{5}{6} + \frac{7}{12}i)$

Solución: $5(4 - 2i) - 3\,(\frac{5}{6} + \frac{7}{12}i) = 20 - 10i - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}i$
$= (20 - \frac{5}{2}) + (-10 - \frac{7}{4})i$
$= \frac{35}{2} - \frac{47}{4}i$

En $5(4 - 2i)$ se aplica la propiedad distributiva.

Ejercicio 2.3. Calcule:
a) $6(3 + 8i) + \frac{1}{2}(4 - 12i)$
b) $-7(4 - 2i) - \frac{2}{3}(-6 + \frac{9}{2}i)$

10 | Unidad I • Lección 2 • Clase 1. Números complejos

Ejercicio 2.3. (5 min) Solución

a) $20 + 42i$ b) $-24 + 11i$

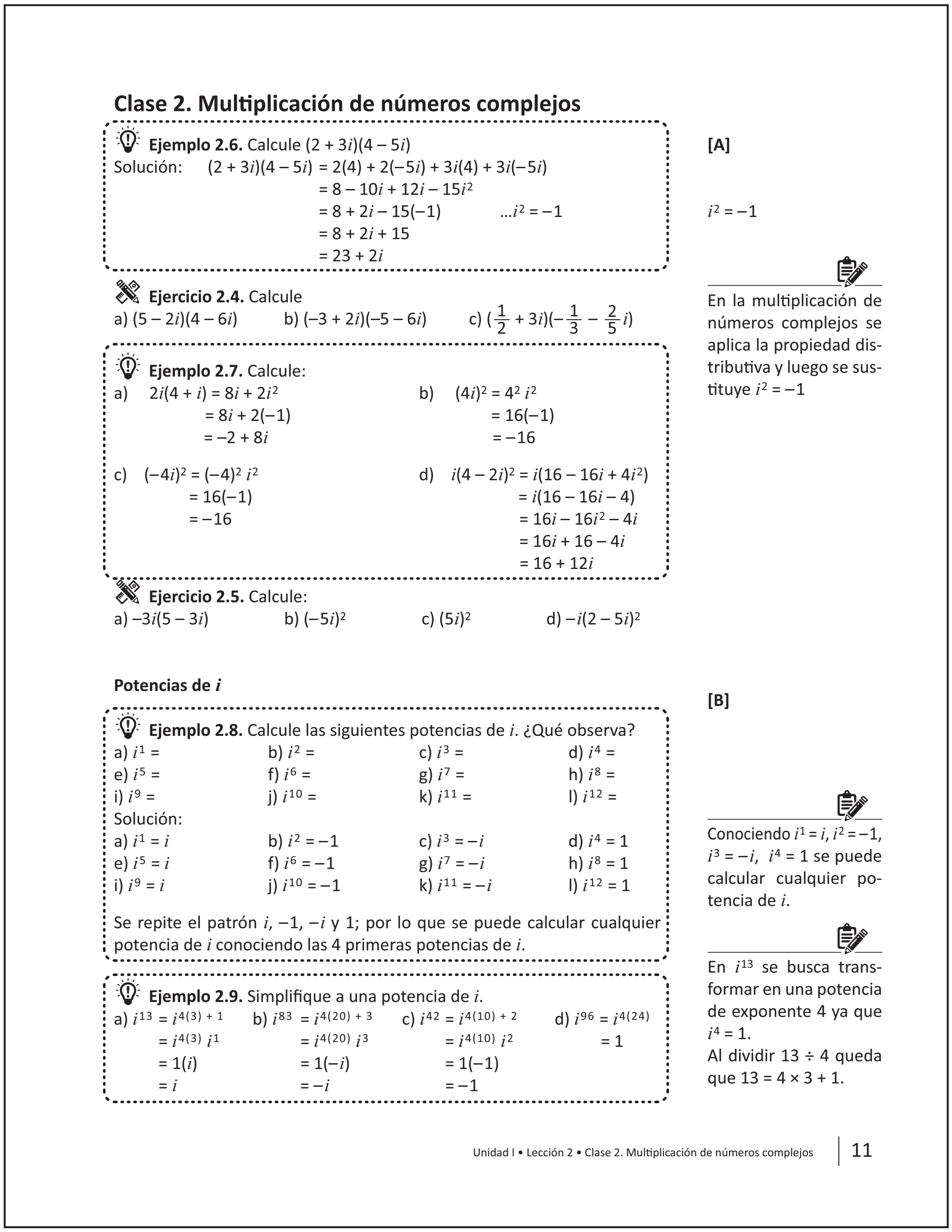
Objetivo: **[A]** Multiplicar números complejos.
[B] Calcular las potencias de números complejos.
[C] Aplicar definición de igualdad de números complejos.

Evaluación: [A] Ejercicios 2.4 y 2.5, [B] Ejercicio 2.6,
[C] Ejercicio 2.7

Unidad I. Lección 2.

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)



Clase 2. Multiplicación de números complejos

Ejemplo 2.6. Calcule $(2 + 3i)(4 - 5i)$

Solución: $(2 + 3i)(4 - 5i) = 2(4) + 2(-5i) + 3i(4) + 3i(-5i)$
$= 8 - 10i + 12i - 15i^2$
$= 8 + 2i - 15(-1)$ …$i^2 = -1$
$= 8 + 2i + 15$
$= 23 + 2i$

[A]

$i^2 = -1$

En la multiplicación de números complejos se aplica la propiedad distributiva y luego se sustituye $i^2 = -1$

Ejercicio 2.4. Calcule

a) $(5 - 2i)(4 - 6i)$ b) $(-3 + 2i)(-5 - 6i)$ c) $(\frac{1}{2} + 3i)(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5}i)$

Ejemplo 2.7. Calcule:

a) $2i(4 + i) = 8i + 2i^2$
$= 8i + 2(-1)$
$= -2 + 8i$

b) $(4i)^2 = 4^2\ i^2$
$= 16(-1)$
$= -16$

c) $(-4i)^2 = (-4)^2\ i^2$
$= 16(-1)$
$= -16$

d) $i(4 - 2i)^2 = i(16 - 16i + 4i^2)$
$= i(16 - 16i - 4)$
$= 16i - 16i^2 - 4i$
$= 16i + 16 - 4i$
$= 16 + 12i$

Ejercicio 2.5. Calcule:

a) $-3i(5 - 3i)$ b) $(-5i)^2$ c) $(5i)^2$ d) $-i(2 - 5i)^2$

Potencias de *i*

[B]

Ejemplo 2.8. Calcule las siguientes potencias de i. ¿Qué observa?

a) $i^1 =$	b) $i^2 =$	c) $i^3 =$	d) $i^4 =$
e) $i^5 =$	f) $i^6 =$	g) $i^7 =$	h) $i^8 =$
i) $i^9 =$	j) $i^{10} =$	k) $i^{11} =$	l) $i^{12} =$

Solución:

a) $i^1 = i$	b) $i^2 = -1$	c) $i^3 = -i$	d) $i^4 = 1$
e) $i^5 = i$	f) $i^6 = -1$	g) $i^7 = -i$	h) $i^8 = 1$
i) $i^9 = i$	j) $i^{10} = -1$	k) $i^{11} = -i$	l) $i^{12} = 1$

Se repite el patrón i, -1, $-i$ y 1; por lo que se puede calcular cualquier potencia de i conociendo las 4 primeras potencias de i.

Conociendo $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ se puede calcular cualquier potencia de i.

Ejemplo 2.9. Simplifique a una potencia de i.

a) $i^{13} = i^{4(3)+1}$
$= i^{4(3)}\ i^1$
$= 1(i)$
$= i$

b) $i^{83} = i^{4(20)+3}$
$= i^{4(20)}\ i^3$
$= 1(-i)$
$= -i$

c) $i^{42} = i^{4(10)+2}$
$= i^{4(10)}\ i^2$
$= 1(-1)$
$= -1$

d) $i^{96} = i^{4(24)}$
$= 1$

En i^{13} se busca transformar en una potencia de exponente 4 ya que $i^4 = 1$.
Al dividir 13 ÷ 4 queda que 13 = 4 × 3 + 1.

Definir la multiplicación de números complejos. [A]

- Explicar que se utiliza la propiedad distributiva y se tiene el cuidado de aplicar $i^2 = -1$. (5 min)

Ejemplo 2.6.

Ejercicio 2.4.

Solución:
a) $8 - 38i$
b) $27 + 8i$
c) $\frac{31}{30} - \frac{6}{5}i$

Ejemplo 2.7.

Ejercicio 2.5.

(15 min) Solución
a) $-9 - 15i$
b) -25
c) -25
d) $-20 + 21i$

Calcular las potencias de *i*. [B]

Ejemplo 2.8.

- Encontrar el patrón i, -1, $-i$ y 1 de las potencias de i para determinar que se puede calcular cualquier potencia de i conociendo este patrón.

Ejemplo 2.9.

- Aplicar la potencia $i^4 = 1$ para calcular la potencia de cualquier i. (5 min)

Unidad I. Lección 2.

Clase 2

(Continuación)

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Dividir números complejos.

Evaluación: Ejercicio 2.8, Ejercicio 2.9

Ejercicio 2.6

(10 min) Solución

a) -1 b) $-i$

c) i d) 1

e) $-i$ f) i

Pensar en la igualdad de números complejos. [C]

- Concluir que dos números complejos son iguales cuando sus partes reales son idénticas y sus partes imaginarias son iguales. (4 min)

Ejemplo 2.10

Ejercicio 2.7.

(6 min) Solución

a) $x = 4$, $y = -1$

b) $x = 10$, $y = 3$

c) $x = 3$, $y = -4$

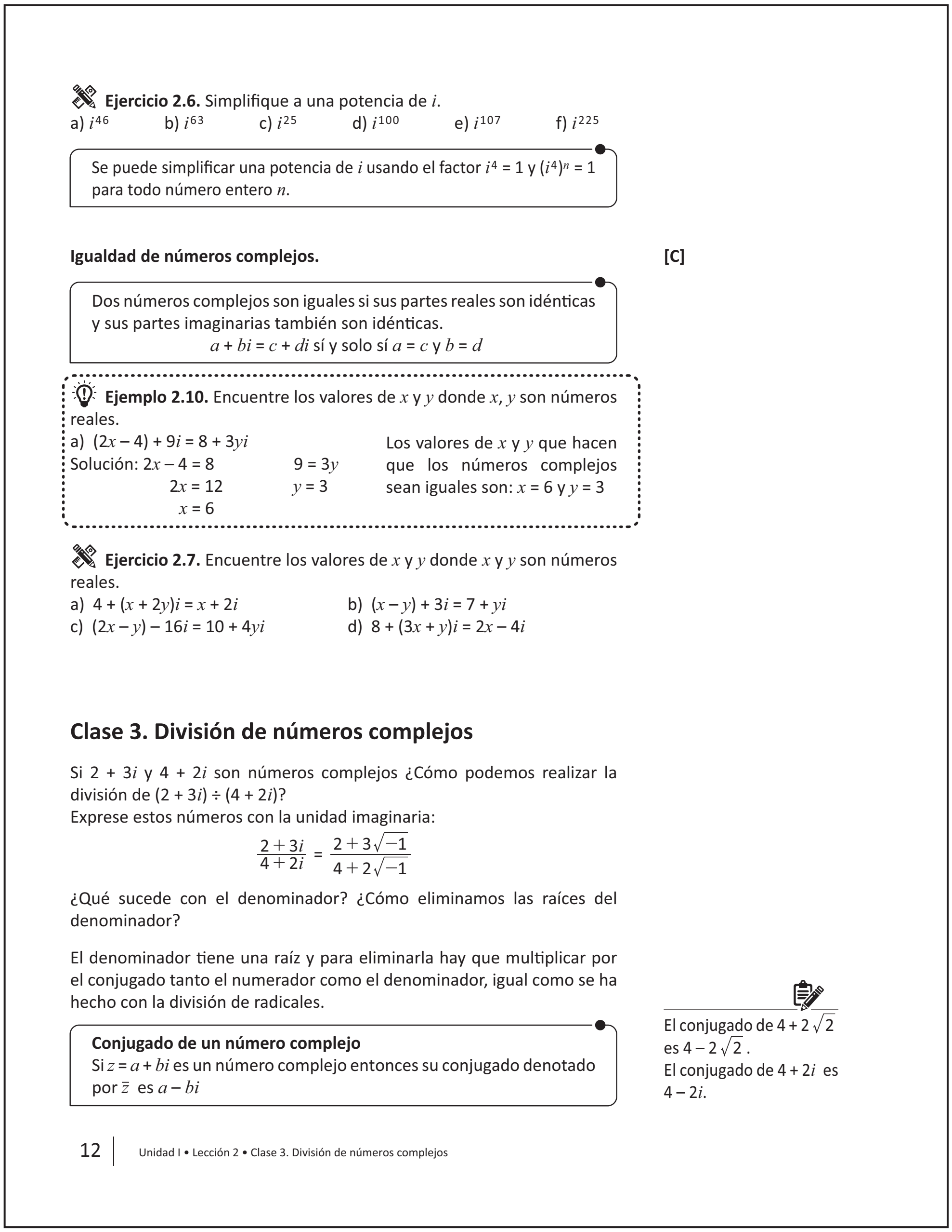
d) $x = 4$, $y = -16$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Definir el conjugado de un número complejo.

- Plantear la división de dos números complejos expresándolos con la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ para relacionarlo con la división de radicales.
- Concluir que para efectuar la división en necesario utilizar el conjugado del denominador.
- Definir el conjugado $\bar{z}$ de un número complejo z y su simbología. (10 min)



Ejercicio 2.6. Simplifique a una potencia de i.

a) i^{46} b) i^{63} c) i^{25} d) i^{100} e) i^{107} f) i^{225}

Se puede simplificar una potencia de i usando el factor $i^4 = 1$ y $(i^4)^n = 1$ para todo número entero n.

Igualdad de números complejos. [C]

Dos números complejos son iguales si sus partes reales son idénticas y sus partes imaginarias también son idénticas.

$a + bi = c + di$ sí y solo sí $a = c$ y $b = d$

Ejemplo 2.10. Encuentre los valores de x y y donde x, y son números reales.

a) $(2x - 4) + 9i = 8 + 3yi$

Solución: $2x - 4 = 8$ $9 = 3y$

$2x = 12$ $y = 3$

$x = 6$

Los valores de x y y que hacen que los números complejos sean iguales son: $x = 6$ y $y = 3$

Ejercicio 2.7. Encuentre los valores de x y y donde x y y son números reales.

a) $4 + (x + 2y)i = x + 2i$ b) $(x - y) + 3i = 7 + yi$

c) $(2x - y) - 16i = 10 + 4yi$ d) $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

Clase 3. División de números complejos

Si $2 + 3i$ y $4 + 2i$ son números complejos ¿Cómo podemos realizar la división de $(2 + 3i) \div (4 + 2i)$?

Exprese estos números con la unidad imaginaria:

$$\frac{2+3i}{4+2i} = \frac{2+3\sqrt{-1}}{4+2\sqrt{-1}}$$

¿Qué sucede con el denominador? ¿Cómo eliminamos las raíces del denominador?

El denominador tiene una raíz y para eliminarla hay que multiplicar por el conjugado tanto el numerador como el denominador, igual como se ha hecho con la división de radicales.

Conjugado de un número complejo

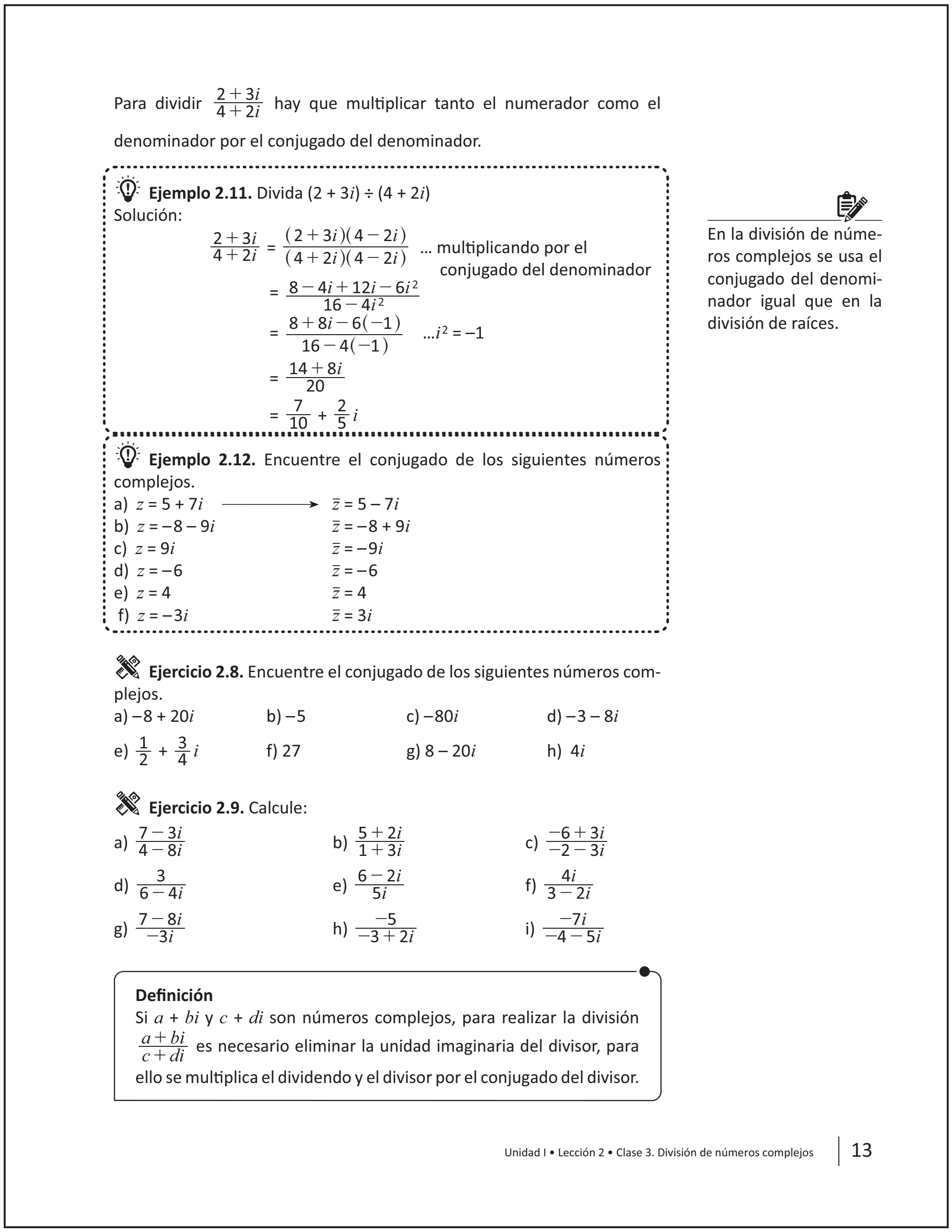
Si $z = a + bi$ es un número complejo entonces su conjugado denotado por $\bar{z}$ es $a - bi$

El conjugado de $4 + 2\sqrt{2}$ es $4 - 2\sqrt{2}$.

El conjugado de $4 + 2i$ es $4 - 2i$.

12 | Unidad I • Lección 2 • Clase 3. División de números complejos

Clase 3
(Continuación)



Para dividir $\frac{2+3i}{4+2i}$ hay que multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 2.11. Divida (2 + 3i) ÷ (4 + 2i)
Solución:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{4+2i} &= \frac{(2+3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} && \text{… multiplicando por el conjugado del denominador}\\ &= \frac{8-4i+12i-6i^2}{16-4i^2}\\ &= \frac{8+8i-6(-1)}{16-4(-1)} && \text{…}i^2 = -1\\ &= \frac{14+8i}{20}\\ &= \frac{7}{10} + \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

En la división de números complejos se usa el conjugado del denominador igual que en la división de raíces.

Ejemplo 2.12. Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $z = 5 + 7i \longrightarrow \bar{z} = 5 - 7i$
b) $z = -8 - 9i$ $\quad \bar{z} = -8 + 9i$
c) $z = 9i$ $\quad \bar{z} = -9i$
d) $z = -6$ $\quad \bar{z} = -6$
e) $z = 4$ $\quad \bar{z} = 4$
f) $z = -3i$ $\quad \bar{z} = 3i$

Ejercicio 2.8. Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $-8 + 20i$ b) -5 c) $-80i$ d) $-3 - 8i$
e) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$ f) 27 g) $8 - 20i$ h) $4i$

Ejercicio 2.9. Calcule:

a) $\frac{7-3i}{4-8i}$ b) $\frac{5+2i}{1+3i}$ c) $\frac{-6+3i}{-2-3i}$
d) $\frac{3}{6-4i}$ e) $\frac{6-2i}{5i}$ f) $\frac{4i}{3-2i}$
g) $\frac{7-8i}{-3i}$ h) $\frac{-5}{-3+2i}$ i) $\frac{-7i}{-4-5i}$

Definición
Si $a + bi$ y $c + di$ son números complejos, para realizar la división $\frac{a+bi}{c+di}$ es necesario eliminar la unidad imaginaria del divisor, para ello se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

Ejemplo 2.11.

- Hacer énfasis que hay que multiplicar tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador. (10 min)

Ejemplo 2.12.

- Hacer énfasis que en el conjugado de un número complejo sólo cambia de signo la parte imaginaria. (5 min)

Ejercicios 2.8
(5 min) Solución

a) $-8 - 20i$ b) -5
c) $80i$ d) $-3 + 8i$
e) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$ f) 27
g) $8 + 20i$ h) $-4i$

Ejercicios 2.9
(15 min) Solución

a) $\frac{13}{20} - \frac{11}{20}i$
b) $\frac{11}{10} - \frac{13}{10}i$
c) $\frac{3}{13} - \frac{24}{13}i$
d) $\frac{9}{26} + \frac{3}{13}i$
e) $-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$
f) $-\frac{8}{13} + \frac{12}{13}i$
g) $\frac{8}{3} + \frac{7}{3}i$
h) $\frac{15}{13} + \frac{10}{13}i$
i) $\frac{35}{41} + \frac{28}{41}i$

- Concluir con la definición de cómo dividir números complejos.

Unidad I. Lección 2.
Clase 4

Objetivo: Encontrar el conjunto solución de ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones son imaginarias.

Evaluación: Ejercicio 2.10

Ejemplo 2.13.

- Aplicar la fórmula cuadrática para encontrar la solución de la ecuación $2x^2 - 5x = -4$ y llegar a la conclusión que las soluciones
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$
no pertenecen al conjunto de los números reales, sino que al conjunto de los números complejos.
- Concluir que si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene soluciones imaginarias. (15 min)

Ejercicio 2.10

(30 min) Solución:

a) $\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3} i$

b) $-\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{11}}{4} i$

c) $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{35}}{2} i$

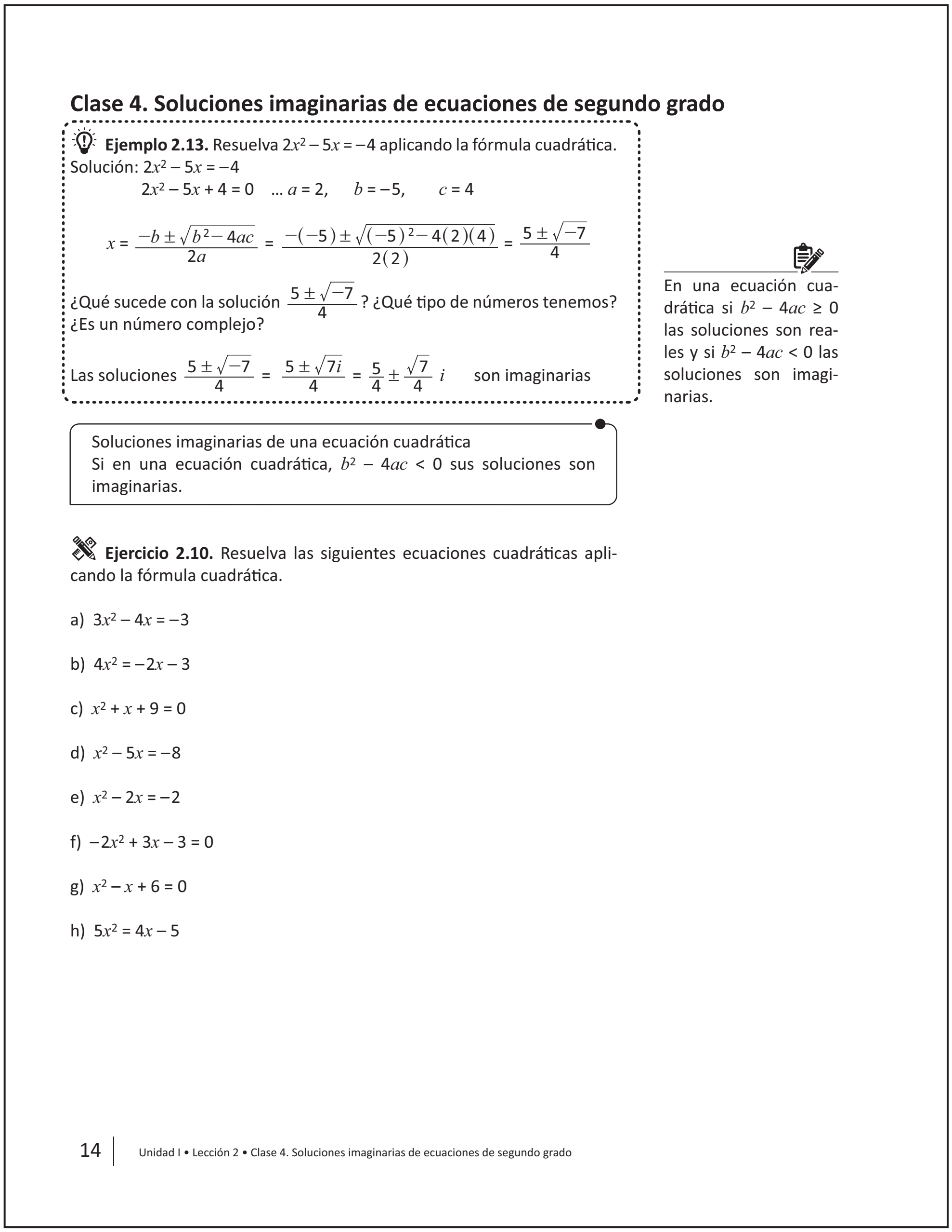
d) $\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \, i$

e) $1 \pm i$

f) $\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4} i$

g) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i$

h) $\frac{2}{5} \pm \frac{\sqrt{21}}{5} i$



Clase 4. Soluciones imaginarias de ecuaciones de segundo grado

Ejemplo 2.13. Resuelva $2x^2 - 5x = -4$ aplicando la fórmula cuadrática.

Solución: $2x^2 - 5x = -4$

$2x^2 - 5x + 4 = 0$ … $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

¿Qué sucede con la solución $\frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4}$? ¿Qué tipo de números tenemos? ¿Es un número complejo?

Las soluciones $\frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7i}}{4} = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \, i$ son imaginarias

En una ecuación cuadrática si $b^2 - 4ac \geq 0$ las soluciones son reales y si $b^2 - 4ac < 0$ las soluciones son imaginarias.

Soluciones imaginarias de una ecuación cuadrática
Si en una ecuación cuadrática, $b^2 - 4ac < 0$ sus soluciones son imaginarias.

Ejercicio 2.10. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula cuadrática.

a) $3x^2 - 4x = -3$

b) $4x^2 = -2x - 3$

c) $x^2 + x + 9 = 0$

d) $x^2 - 5x = -8$

e) $x^2 - 2x = -2$

f) $-2x^2 + 3x - 3 = 0$

g) $x^2 - x + 6 = 0$

h) $5x^2 = 4x - 5$

14 | Unidad I • Lección 2 • Clase 4. Soluciones imaginarias de ecuaciones de segundo grado

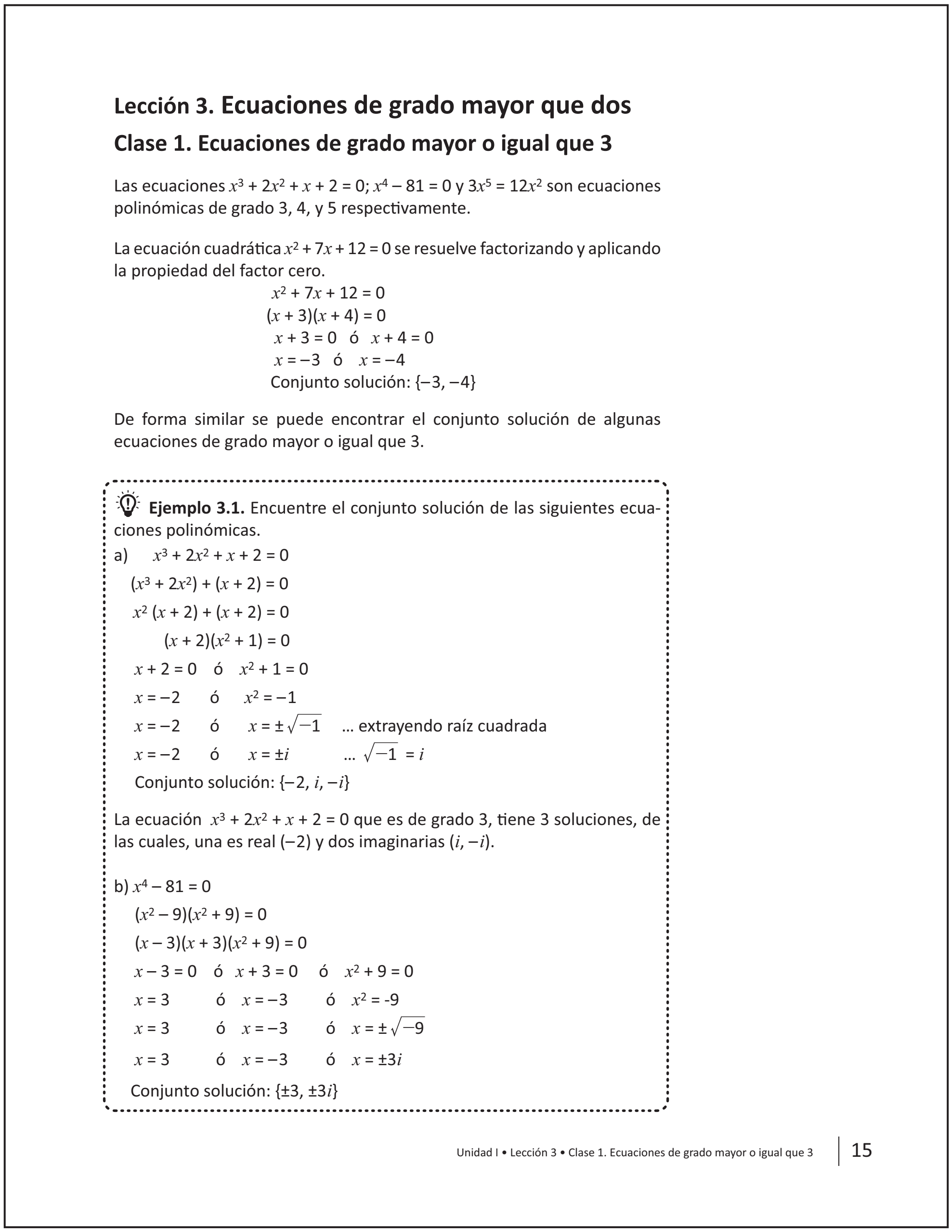
Objetivo: **[A]** Encontrar el conjunto solución de ecuaciones de grado mayor que 3 utilizando la factorización.

Evaluación: [A] Ejercicio 3.1

Unidad I. Lección 3.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)



Lección 3. Ecuaciones de grado mayor que dos

Clase 1. Ecuaciones de grado mayor o igual que 3

Las ecuaciones $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$; $x^4 - 81 = 0$ y $3x^5 = 12x^2$ son ecuaciones polinómicas de grado 3, 4, y 5 respectivamente.

La ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ se resuelve factorizando y aplicando la propiedad del factor cero.

$x^2 + 7x + 12 = 0$
$(x + 3)(x + 4) = 0$
$x + 3 = 0$ ó $x + 4 = 0$
$x = -3$ ó $x = -4$
Conjunto solución: $\{-3, -4\}$

De forma similar se puede encontrar el conjunto solución de algunas ecuaciones de grado mayor o igual que 3.

Ejemplo 3.1. Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$
$(x^3 + 2x^2) + (x + 2) = 0$
$x^2 (x + 2) + (x + 2) = 0$
$(x + 2)(x^2 + 1) = 0$
$x + 2 = 0$ ó $x^2 + 1 = 0$
$x = -2$ ó $x^2 = -1$
$x = -2$ ó $x = \pm\sqrt{-1}$ … extrayendo raíz cuadrada
$x = -2$ ó $x = \pm i$ … $\sqrt{-1} = i$
Conjunto solución: $\{-2, i, -i\}$

La ecuación $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ que es de grado 3, tiene 3 soluciones, de las cuales, una es real (-2) y dos imaginarias ($i, -i$).

b) $x^4 - 81 = 0$
$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$
$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = 0$
$x - 3 = 0$ ó $x + 3 = 0$ ó $x^2 + 9 = 0$
$x = 3$ ó $x = -3$ ó $x^2 = -9$
$x = 3$ ó $x = -3$ ó $x = \pm\sqrt{-9}$
$x = 3$ ó $x = -3$ ó $x = \pm 3i$
Conjunto solución: $\{\pm 3, \pm 3i\}$

Unidad I • Lección 3 • Clase 1. Ecuaciones de grado mayor o igual que 3 | 15

[A]

- Deducir el método para resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que 3.
  * Concluir que hay ecuaciones polinómicas de grado 1, 2, 3, 4, etc.

* Relacionar la solución de una ecuación cuadrática por medio de la factorización con la solución de otras ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2.
(10 min).

Ejemplo 3.1

*Hacer énfasis en el tipo de soluciones (reales o imaginarias).
(20 min).

Clase 1
(Continuación)

Ejercicio 3.1.
(15 min) Solución

a) CS: $\{-3, -2, 2\}$

b) CS: $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1\}$

c) CS: $\{-3, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

d) CS: $\left\{-5, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$

e) CS: $\left\{0, \frac{15 \pm 7\sqrt{5}}{2}\right\}$

f) CS: $\{0, 2, -2\}$

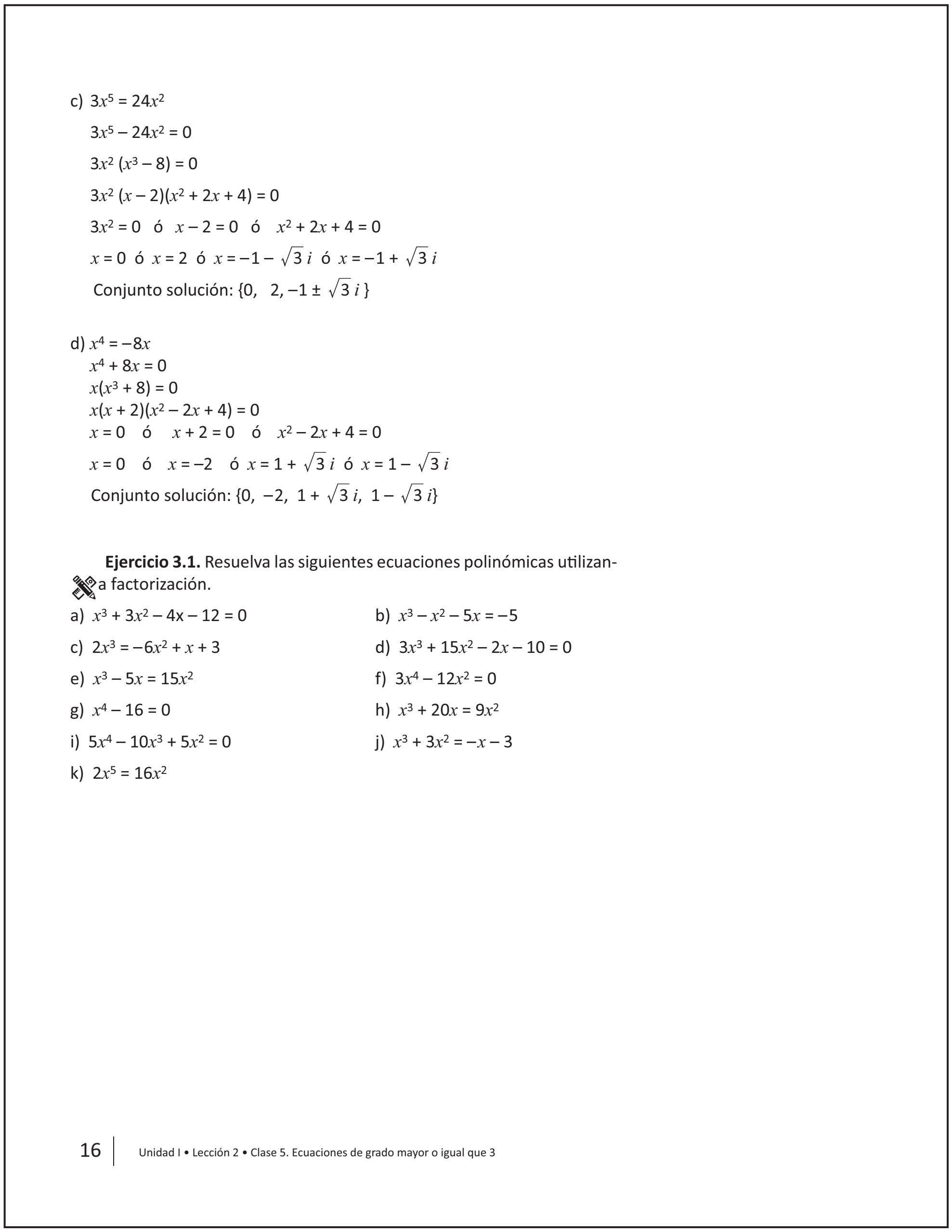
g) CS: $\{2, -2, 2i, -2i\}$

h) CS: $\{0, 4, 5\}$

i) CS: $\{0, 1\}$

j) CS: $\{-3, i, -i\}$

k) CS: $\{0, 2, -1 + \sqrt{3}\,i,$
$-1 - \sqrt{3}\,i\}$



c) $3x^5 = 24x^2$

$3x^5 - 24x^2 = 0$

$3x^2 (x^3 - 8) = 0$

$3x^2 (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$3x^2 = 0$ ó $x - 2 = 0$ ó $x^2 + 2x + 4 = 0$

$x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = -1 - \sqrt{3}\,i$ ó $x = -1 + \sqrt{3}\,i$

Conjunto solución: $\{0, \; 2, -1 \pm \sqrt{3}\,i\}$

d) $x^4 = -8x$
$x^4 + 8x = 0$
$x(x^3 + 8) = 0$
$x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$
$x = 0$ ó $x + 2 = 0$ ó $x^2 - 2x + 4 = 0$

$x = 0$ ó $x = -2$ ó $x = 1 + \sqrt{3}\,i$ ó $x = 1 - \sqrt{3}\,i$

Conjunto solución: $\{0, \; -2, \; 1 + \sqrt{3}\,i, \; 1 - \sqrt{3}\,i\}$

Ejercicio 3.1. Resuelva las siguientes ecuaciones polinómicas utilizan-
a factorización.

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

b) $x^3 - x^2 - 5x = -5$

c) $2x^3 = -6x^2 + x + 3$

d) $3x^3 + 15x^2 - 2x - 10 = 0$

e) $x^3 - 5x = 15x^2$

f) $3x^4 - 12x^2 = 0$

g) $x^4 - 16 = 0$

h) $x^3 + 20x = 9x^2$

i) $5x^4 - 10x^3 + 5x^2 = 0$

j) $x^3 + 3x^2 = -x - 3$

k) $2x^5 = 16x^2$

16 | Unidad I • Lección 2 • Clase 5. Ecuaciones de grado mayor o igual que 3

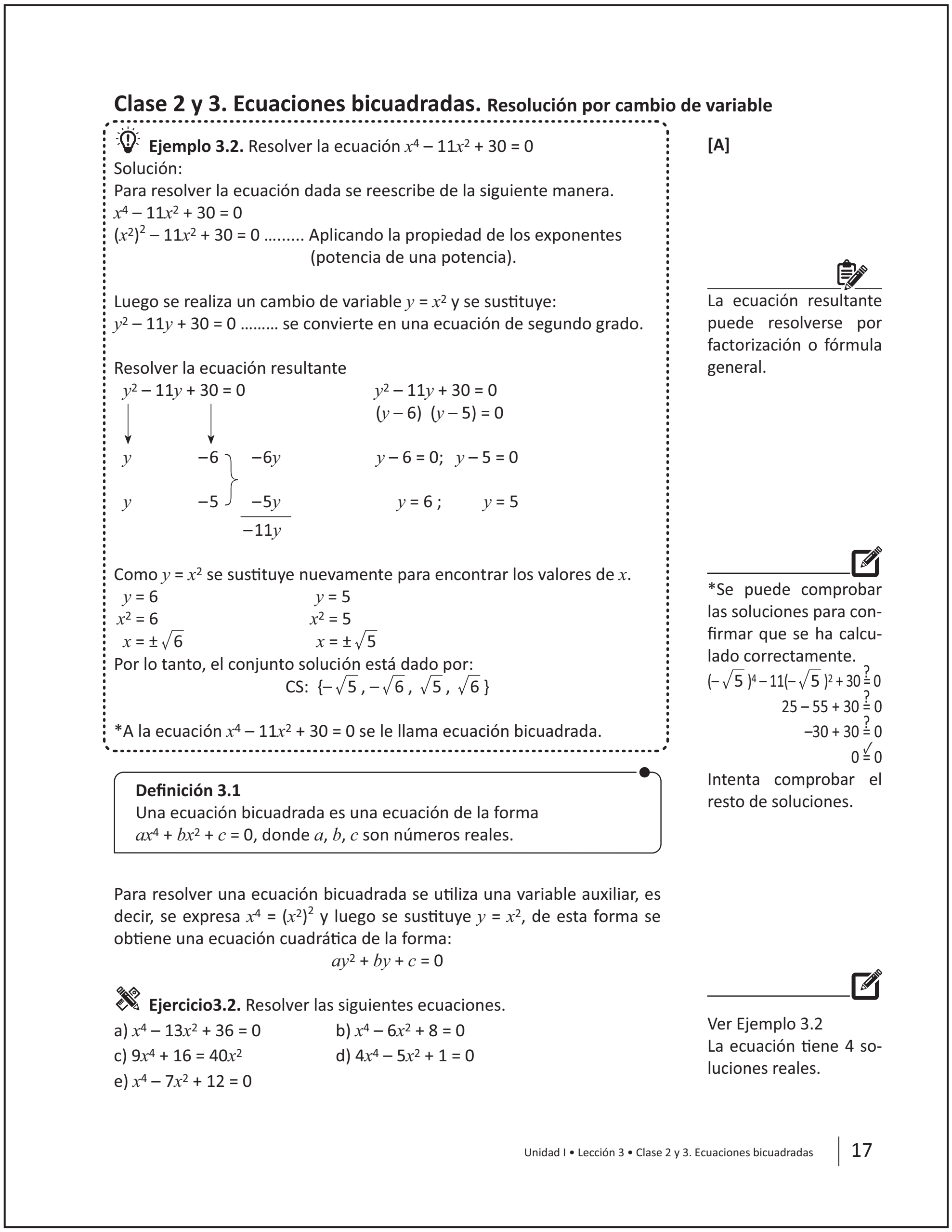
Objetivo: **[A]** Definen una ecuación bicuadrada
Resuelven una ecuación bicuadrada mediante el cambio de variable.

Unidad I. Lección 3.

Clase 2 y 3

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: [A] Ejercicio 3.2



Clase 2 y 3. Ecuaciones bicuadradas. Resolución por cambio de variable

Ejemplo 3.2. Resolver la ecuación $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

Solución:

Para resolver la ecuación dada se reescribe de la siguiente manera.

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2)^2 - 11x^2 + 30 = 0$ .... Aplicando la propiedad de los exponentes (potencia de una potencia).

Luego se realiza un cambio de variable $y = x^2$ y se sustituye:

$y^2 - 11y + 30 = 0$ .... se convierte en una ecuación de segundo grado.

Resolver la ecuación resultante

$$\begin{array}{lll} y^2 - 11y + 30 = 0 & & \\ \downarrow \quad\quad \downarrow & & \\ y \quad\quad -6 & -6y & \\ y \quad\quad -5 & -5y & \\ & \overline{-11y} & \end{array}$$

$y^2 - 11y + 30 = 0$

$(y - 6)\ (y - 5) = 0$

$y - 6 = 0;\ \ y - 5 = 0$

$y = 6;\quad y = 5$

Como $y = x^2$ se sustituye nuevamente para encontrar los valores de x.

$y = 6 \qquad\qquad y = 5$

$x^2 = 6 \qquad\qquad x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{6} \qquad\qquad x = \pm\sqrt{5}$

Por lo tanto, el conjunto solución está dado por:

$$\text{CS: } \{-\sqrt{5}, -\sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$$

*A la ecuación $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ se le llama ecuación bicuadrada.

Definición 3.1
Una ecuación bicuadrada es una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, donde a, b, c son números reales.

Para resolver una ecuación bicuadrada se utiliza una variable auxiliar, es decir, se expresa $x^4 = (x^2)^2$ y luego se sustituye $y = x^2$, de esta forma se obtiene una ecuación cuadrática de la forma:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Ejercicio3.2. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
b) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$
c) $9x^4 + 16 = 40x^2$
d) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
e) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

[A]

La ecuación resultante puede resolverse por factorización o fórmula general.

*Se puede comprobar las soluciones para confirmar que se ha calculado correctamente.

$(-\sqrt{5})^4 - 11(-\sqrt{5})^2 + 30 \overset{?}{=} 0$

$25 - 55 + 30 \overset{?}{=} 0$

$-30 + 30 \overset{?}{=} 0$

$0 \overset{\checkmark}{=} 0$

Intenta comprobar el resto de soluciones.

Ver Ejemplo 3.2
La ecuación tiene 4 soluciones reales.

Unidad I • Lección 3 • Clase 2 y 3. Ecuaciones bicuadradas | 17

[A] Definir una ecuación bicuadrada

Ejemplo 3.2

(25 min)

*Se presenta en la pizarra la ecuación $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

M: ¿Qué tipo de ecuación es?

RP: Ecuación de grado 4

M: ¿Cómo podemos resolver esta ecuación?

M: Observe los exponentes de la variable en la ecuación ¿Qué me puede decir de ello?

RP: Son números pares, 4 es múltiplo de 2

M: ¿Cómo podemos escribir el número cuatro en términos de 2?

RP: Como 2 • 2

*Pedir a los estudiantes que reescriban la ecuación de tal manera que x^4 esté expresado como potencia de potencia $(x^2)^2$.

M: Qué tienen en común los términos de la ecuación con variable.

RP: Ambos tienen x^2

M: Se hará un cambio de variable $y = x^2$

¿Qué resultó al sustituir?

RP: Una ecuación de segundo grado.

Concluye: la ecuación resultante se puede resolver por los métodos conocidos o estudiados anteriormente (factorización).

Encuentran las raices de la ecuación.

RP: 6 y 5

M: ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación dada?

* RP: 4 son: $\{-\sqrt{5}, -\sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$

Concluye: Definición 3.1

*Recalcar que para resolver una ecuación bicuadrada se debe tener en cuenta y las características de ésta ya que debe ser de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Se convierte a una cuadrática haciendo el cambio de variable. $y = x^2$

Ejercicio 3.2. (20 minutos)

Solución véase en Página 64.

[Hasta aquí Clase 2]

Unidad I. Lección 3.

Clase 2 y 3

(Continuación)

Objetivo: **[B]** Resolver ecuaciones bicuadradas en las que las soluciones son reales y complejas

Evaluación: [B] Ejercicios 3.3, 3.4, 3.5

[Desde aquí Clase 3]

[B]

Ejemplo 3.3

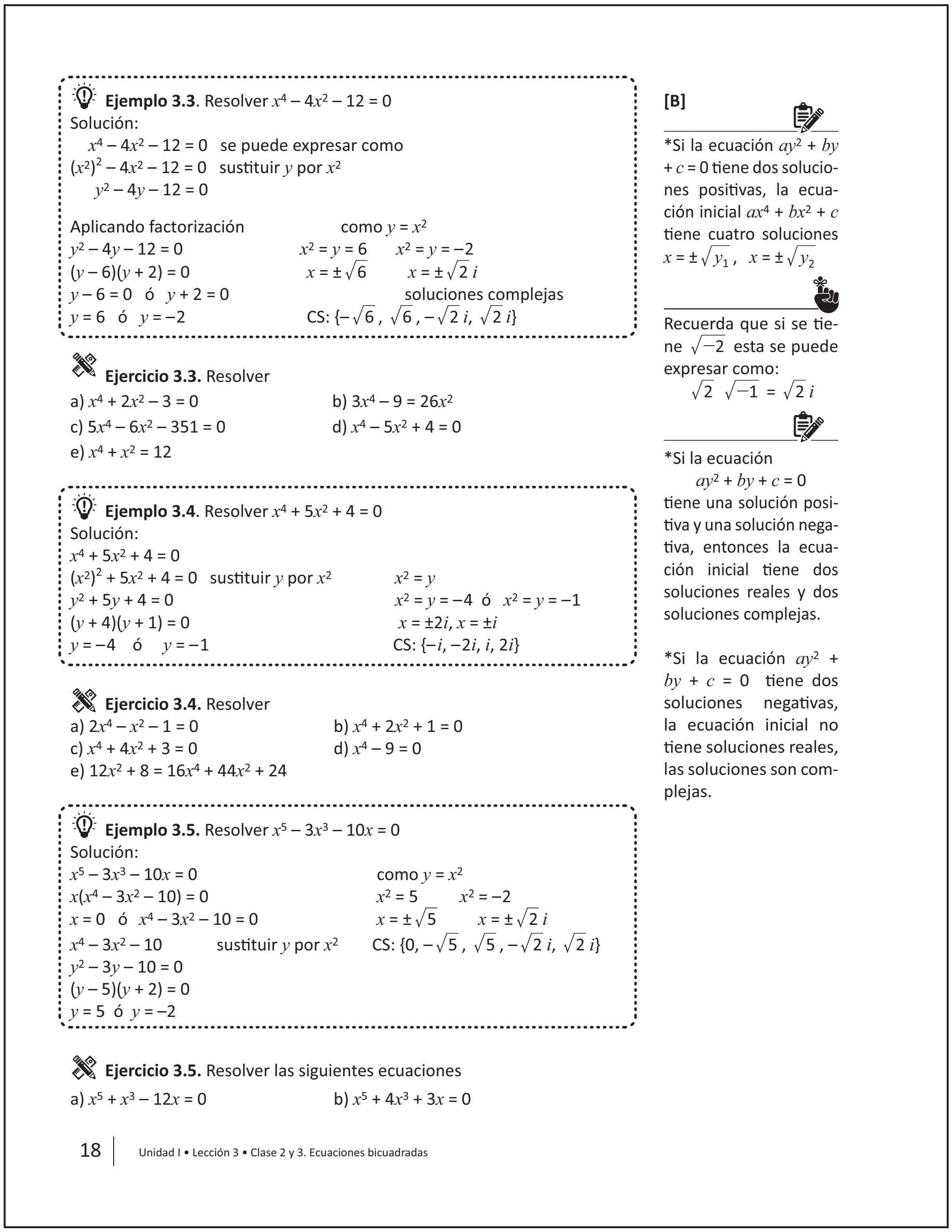
(10 min)
Resolver ecuaciones bicuadradas donde las soluciones son reales o complejas.
*Presentar en la pizarra el ejemplo y resolverlo siguiendo el procedimiento aprendido anteriormente.
M: ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación cuadrática encontrada?
RP: 6 y –2
M: ¿Cómo son las soluciones de la ecuación original?
RP: Dos reales y dos complejas
Concluye: Si la ecuación cuadrática encontrada tiene una solución positiva y otra negativa la ecuación original tendrá dos soluciones reales y dos soluciones complejas.

Ejercicio 3.3

(10 min) Soluciones
Véase pág. 64

Ejemplo 3.4.

(5 min)



Ejemplo 3.3. Resolver $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$
Solución:
$x^4 - 4x^2 - 12 = 0$ se puede expresar como
$(x^2)^2 - 4x^2 - 12 = 0$ sustituir y por x^2
$y^2 - 4y - 12 = 0$

Aplicando factorización
$y^2 - 4y - 12 = 0$
$(y - 6)(y + 2) = 0$
$y - 6 = 0$ ó $y + 2 = 0$
$y = 6$ ó $y = -2$

como $y = x^2$
$x^2 = y = 6$ $x^2 = y = -2$
$x = \pm\sqrt{6}$ $x = \pm\sqrt{2}\,i$
soluciones complejas
CS: $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -\sqrt{2}\,i, \sqrt{2}\,i\}$

Ejercicio 3.3. Resolver
a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
b) $3x^4 - 9 = 26x^2$
c) $5x^4 - 6x^2 - 351 = 0$
d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
e) $x^4 + x^2 = 12$

Ejemplo 3.4. Resolver $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
Solución:
$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
$(x^2)^2 + 5x^2 + 4 = 0$ sustituir y por x^2
$y^2 + 5y + 4 = 0$
$(y + 4)(y + 1) = 0$
$y = -4$ ó $y = -1$

$x^2 = y$
$x^2 = y = -4$ ó $x^2 = y = -1$
$x = \pm 2i, x = \pm i$
CS: $\{-i, -2i, i, 2i\}$

Ejercicio 3.4. Resolver
a) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$
b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
c) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$
d) $x^4 - 9 = 0$
e) $12x^2 + 8 = 16x^4 + 44x^2 + 24$

Ejemplo 3.5. Resolver $x^5 - 3x^3 - 10x = 0$
Solución:
$x^5 - 3x^3 - 10x = 0$
$x(x^4 - 3x^2 - 10) = 0$
$x = 0$ ó $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$
$x^4 - 3x^2 - 10$ sustituir y por x^2
$y^2 - 3y - 10 = 0$
$(y - 5)(y + 2) = 0$
$y = 5$ ó $y = -2$

como $y = x^2$
$x^2 = 5$ $x^2 = -2$
$x = \pm\sqrt{5}$ $x = \pm\sqrt{2}\,i$
CS: $\{0, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{2}\,i, \sqrt{2}\,i\}$

Ejercicio 3.5. Resolver las siguientes ecuaciones
a) $x^5 + x^3 - 12x = 0$
b) $x^5 + 4x^3 + 3x = 0$

[B]

*Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene dos soluciones positivas, la ecuación inicial $ax^4 + bx^2 + c$ tiene cuatro soluciones $x = \pm\sqrt{y_1}$, $x = \pm\sqrt{y_2}$

Recuerda que si se tiene $\sqrt{-2}$ esta se puede expresar como:
$\sqrt{2}\,\sqrt{-1} = \sqrt{2}\,i$

*Si la ecuación
$ay^2 + by + c = 0$
tiene una solución positiva y una solución negativa, entonces la ecuación inicial tiene dos soluciones reales y dos soluciones complejas.

*Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene dos soluciones negativas, la ecuación inicial no tiene soluciones reales, las soluciones son complejas.

18 | Unidad I • Lección 3 • Clase 2 y 3. Ecuaciones bicuadradas

Ejercicio 3.4. (10 min)

Discutir soluciones en la pizarra. Asignar de tarea. Véase soluciones en pág. 64

Ejemplo 3.5. (5 min)

Ejercicio 3.5. (5 min)

Soluciones en pág. 64

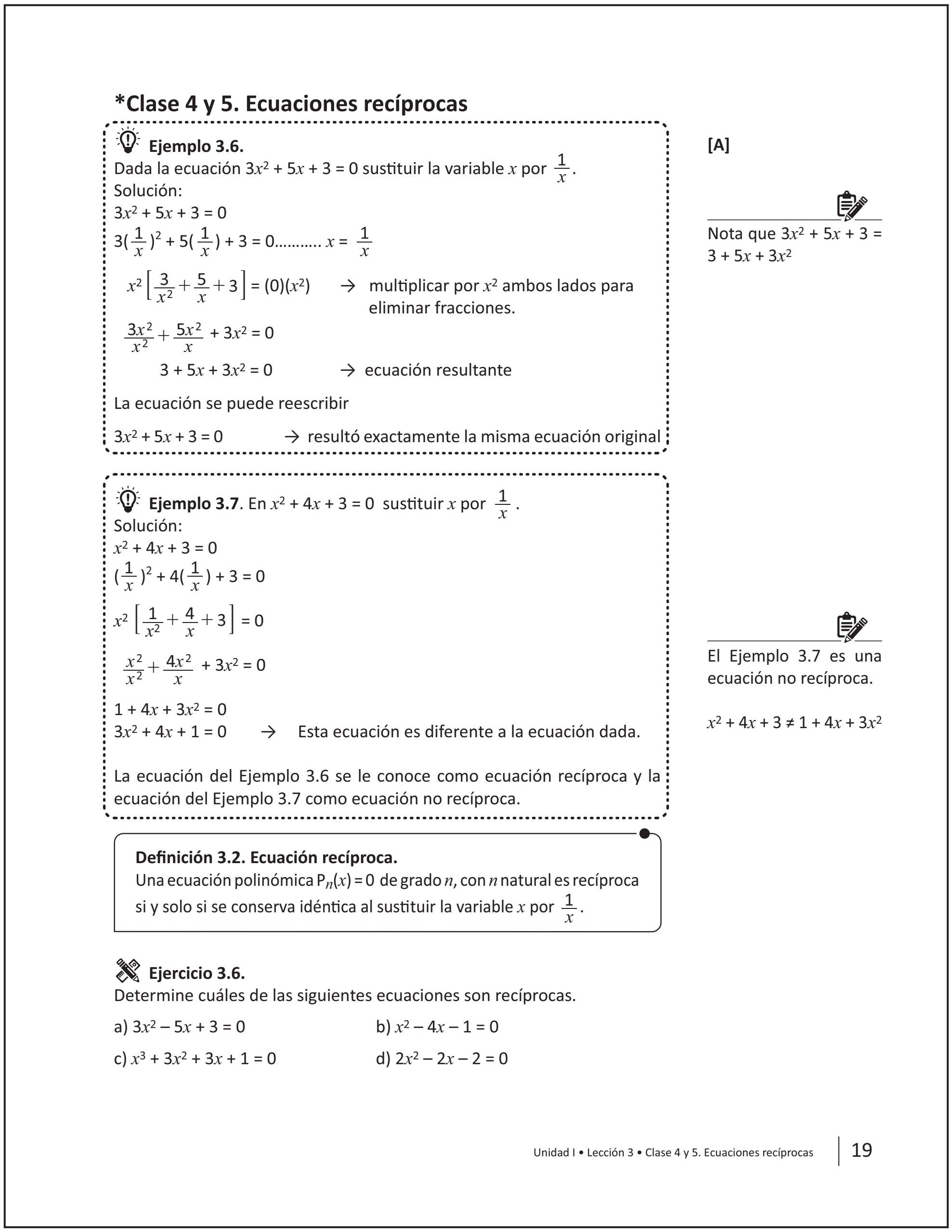
Objetivo: **[A]** Definen una ecuación recíproca.
Determinan si una ecuación es recíproca o no.

Evaluación: [A] Ejercicio 3.6

Unidad I. Lección 3.

Clase 4 y 5

(Continúa en la siguiente página)



*Clase 4 y 5. Ecuaciones recíprocas

Ejemplo 3.6.
Dada la ecuación $3x^2 + 5x + 3 = 0$ sustituir la variable x por $\frac{1}{x}$.
Solución:
$3x^2 + 5x + 3 = 0$
$3(\frac{1}{x})^2 + 5(\frac{1}{x}) + 3 = 0$……….. $x = \frac{1}{x}$
$x^2\left[\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 3\right] = (0)(x^2)$ → multiplicar por x^2 ambos lados para eliminar fracciones.
$\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x^2}{x} + 3x^2 = 0$
$3 + 5x + 3x^2 = 0$ → ecuación resultante

La ecuación se puede reescribir

$3x^2 + 5x + 3 = 0$ → resultó exactamente la misma ecuación original

[A]

Nota que $3x^2 + 5x + 3 = 3 + 5x + 3x^2$

Ejemplo 3.7. En $x^2 + 4x + 3 = 0$ sustituir x por $\frac{1}{x}$.
Solución:
$x^2 + 4x + 3 = 0$
$(\frac{1}{x})^2 + 4(\frac{1}{x}) + 3 = 0$
$x^2\left[\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} + 3\right] = 0$
$\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x^2}{x} + 3x^2 = 0$
$1 + 4x + 3x^2 = 0$
$3x^2 + 4x + 1 = 0$ → Esta ecuación es diferente a la ecuación dada.

La ecuación del Ejemplo 3.6 se le conoce como ecuación recíproca y la ecuación del Ejemplo 3.7 como ecuación no recíproca.

El Ejemplo 3.7 es una ecuación no recíproca.

$x^2 + 4x + 3 \neq 1 + 4x + 3x^2$

Definición 3.2. Ecuación recíproca.
Una ecuación polinómica $P_n(x) = 0$ de grado n, con n natural es recíproca si y solo si se conserva idéntica al sustituir la variable x por $\frac{1}{x}$.

Ejercicio 3.6.
Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son recíprocas.

a) $3x^2 - 5x + 3 = 0$
b) $x^2 - 4x - 1 = 0$
c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
d) $2x^2 - 2x - 2 = 0$

Unidad I • Lección 3 • Clase 4 y 5. Ecuaciones recíprocas 19

Ejercicio 3.6. (10 min)

a) Sí	b) No
c) Sí	d) No

[A] Definir una ecuación recíproca

Ejemplo 3.6 (5 min)
Presentar en la pizarra la ecuación.

M: Sustituya $\frac{1}{x}$ donde está x.
Y resuelva las operaciones indicadas.
M: ¿Cómo es la ecuación resultante?
RP: Idéntica a la dada
Concluye: A la ecuación dada se le conoce como ecuación recíproca.
M: ¿Cómo puede definirse una ecuación recíproca? ¿Se cumple para toda ecuación que al sustituir $\frac{1}{x}$ resultará la misma ecuación?
RP: No sé.

Ejemplo 3.7.
(7 min)
*Presentar en la pizarra la ecuación y verificar si la ecuación dada es recíproca
M: ¿Resultó la misma ecuación que la original cuando se sustituye $\frac{1}{x}$?
RP: No, es diferente.
Concluye: a esta ecuación le llamamos no recíproca.
Concluye: Definición 3.2

Clase 4 y 5
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Determinan si una ecuación es recíproca o no.

Evaluación: [B] Ejercicios 3.7

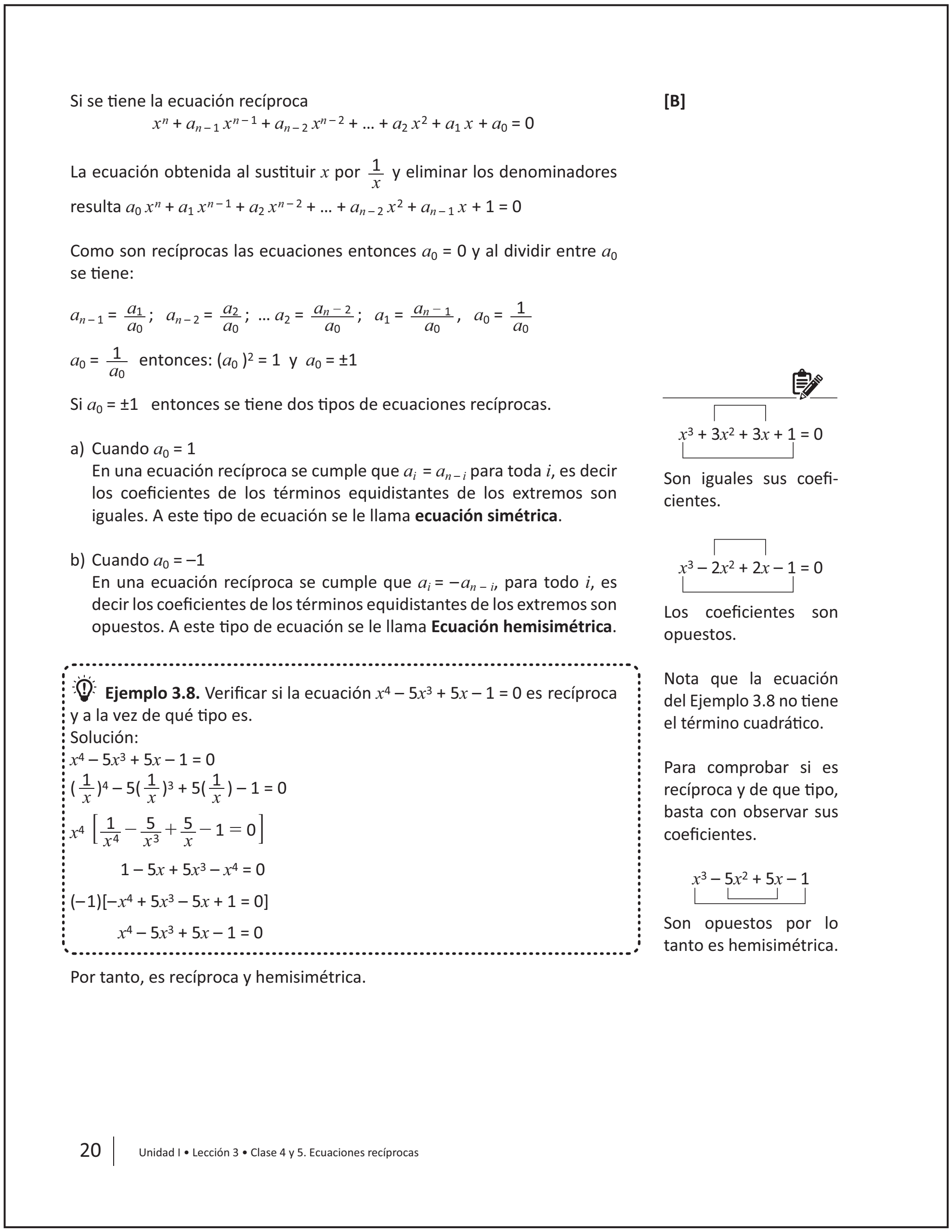
[B]
Tipos de ecuaciones recíprocas
(13 min)

*Analizan los tipos de que ecuaciones recíprocas que se tienen dependiendo de sus coeficientes.

*Hacer la deducción de que los coeficientes equidistantes de una ecuación recíproca pueden ser iguales u opuestos y que estas condiciones son suficientes para poder identificar si una ecuación es recíproca o no.

Ejemplo 3.8
(10 min)

[Hasta aquí Clase 4]



Si se tiene la ecuación recíproca

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

La ecuación obtenida al sustituir x por $\frac{1}{x}$ y eliminar los denominadores resulta $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + 1 = 0$

Como son recíprocas las ecuaciones entonces $a_0 = 0$ y al dividir entre a_0 se tiene:

$a_{n-1} = \frac{a_1}{a_0}$; $a_{n-2} = \frac{a_2}{a_0}$; ... $a_2 = \frac{a_{n-2}}{a_0}$; $a_1 = \frac{a_{n-1}}{a_0}$, $a_0 = \frac{1}{a_0}$

$a_0 = \frac{1}{a_0}$ entonces: $(a_0)^2 = 1$ y $a_0 = \pm1$

Si $a_0 = \pm1$ entonces se tiene dos tipos de ecuaciones recíprocas.

a) Cuando $a_0 = 1$
En una ecuación recíproca se cumple que $a_i = a_{n-i}$ para toda i, es decir los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales. A este tipo de ecuación se le llama **ecuación simétrica**.

b) Cuando $a_0 = -1$
En una ecuación recíproca se cumple que $a_i = -a_{n-i}$, para todo i, es decir los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son opuestos. A este tipo de ecuación se le llama **Ecuación hemisimétrica**.

Ejemplo 3.8. Verificar si la ecuación $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$ es recíproca y a la vez de qué tipo es.
Solución:
$x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$
$(\frac{1}{x})^4 - 5(\frac{1}{x})^3 + 5(\frac{1}{x}) - 1 = 0$
$x^4\left[\frac{1}{x^4} - \frac{5}{x^3} + \frac{5}{x} - 1 = 0\right]$
$1 - 5x + 5x^3 - x^4 = 0$
$(-1)[-x^4 + 5x^3 - 5x + 1 = 0]$
$x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$

Por tanto, es recíproca y hemisimétrica.

[B]

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Son iguales sus coeficientes.

$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

Los coeficientes son opuestos.

Nota que la ecuación del Ejemplo 3.8 no tiene el término cuadrático.

Para comprobar si es recíproca y de que tipo, basta con observar sus coeficientes.

$x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

Son opuestos por lo tanto es hemisimétrica.

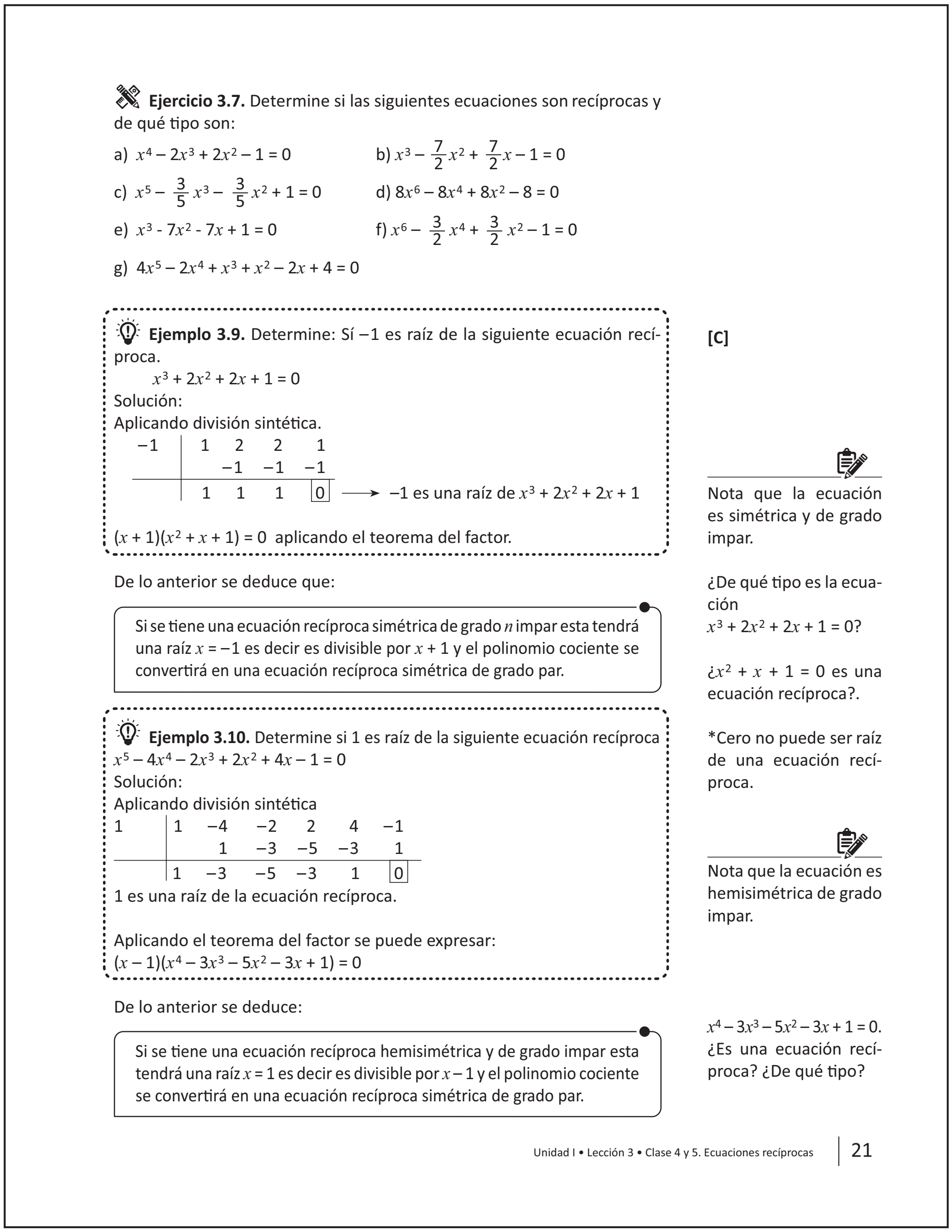
20 | Unidad I • Lección 3 • Clase 4 y 5. Ecuaciones recíprocas

Objetivo: **[C]** Determinan cuando 1 y -1 son raíces de una ecuación recíproca.

Clase 4 y 5

(Continuación)

Evaluación: [C] Ejercicio 3.8



Ejercicio 3.7. Determine si las siguientes ecuaciones son recíprocas y de qué tipo son:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

b) $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$

c) $x^5 - \frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 1 = 0$

d) $8x^6 - 8x^4 + 8x^2 - 8 = 0$

e) $x^3 - 7x^2 - 7x + 1 = 0$

f) $x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$

g) $4x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 4 = 0$

Ejemplo 3.9. Determine: Sí -1 es raíz de la siguiente ecuación recíproca.

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Solución:

Aplicando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow -1 \text{ es una raíz de } x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$(x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$ aplicando el teorema del factor.

[C]

Nota que la ecuación es simétrica y de grado impar.

De lo anterior se deduce que:

Si se tiene una ecuación recíproca simétrica de grado n impar esta tendrá una raíz $x = -1$ es decir es divisible por $x + 1$ y el polinomio cociente se convertirá en una ecuación recíproca simétrica de grado par.

¿De qué tipo es la ecuación $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$?

¿$x^2 + x + 1 = 0$ es una ecuación recíproca?.

*Cero no puede ser raíz de una ecuación recíproca.

Ejemplo 3.10. Determine si 1 es raíz de la siguiente ecuación recíproca

$x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$

Solución:

Aplicando división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -4 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ & & 1 & -3 & -5 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & -5 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

1 es una raíz de la ecuación recíproca.

Aplicando el teorema del factor se puede expresar:

$(x - 1)(x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 1) = 0$

Nota que la ecuación es hemisimétrica de grado impar.

De lo anterior se deduce:

Si se tiene una ecuación recíproca hemisimétrica y de grado impar esta tendrá una raíz $x = 1$ es decir es divisible por $x - 1$ y el polinomio cociente se convertirá en una ecuación recíproca simétrica de grado par.

$x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 1 = 0$. ¿Es una ecuación recíproca? ¿De qué tipo?

[Desde aquí Clase5]

Ejercicio 3.7

(10 min)

Resolver y discutir en la pizarra el ejercicio.

*Al determinar si una ecuación es recíproca o no o de que tipo es, basta con observar sus coeficientes y dependiendo la característica que cumplan se puede definir de que tipo es.

Soluciones:

a) No Recíproca

b) Recíproca hemisimétrica.

c) Recíproca simétrica.

d) Recíproca hemisimétrica.

e) Recíproca simétrica.

f) Recíproca hemisimétrica.

g) Recíproca simétrica.

[C] Determinar si -1 y 1 son raíces de una ecuación recíproca

Ejemplo 3.9

(10 min)

Presentar el ejemplo en la pizarra y pedir a los estudiantes que verifiquen si -1 es raíz de la ecuación utilizando la división sintética.

¿Qué pueden concluir acerca de la división entre $x + 1$?

RP: Que $x + 1$ es un factor del polinomio del miembro izquierdo de la ecuación.

M: ¿Qué tipo de ecuación es?

RP: Recíproca simétrica.

M: ¿Cómo es el grado de la ecuación?

RP: Impar

Compruebe si el cociente resultante es recíproca y de qué tipo es.

RP: Si es recíproca y es simétrica.

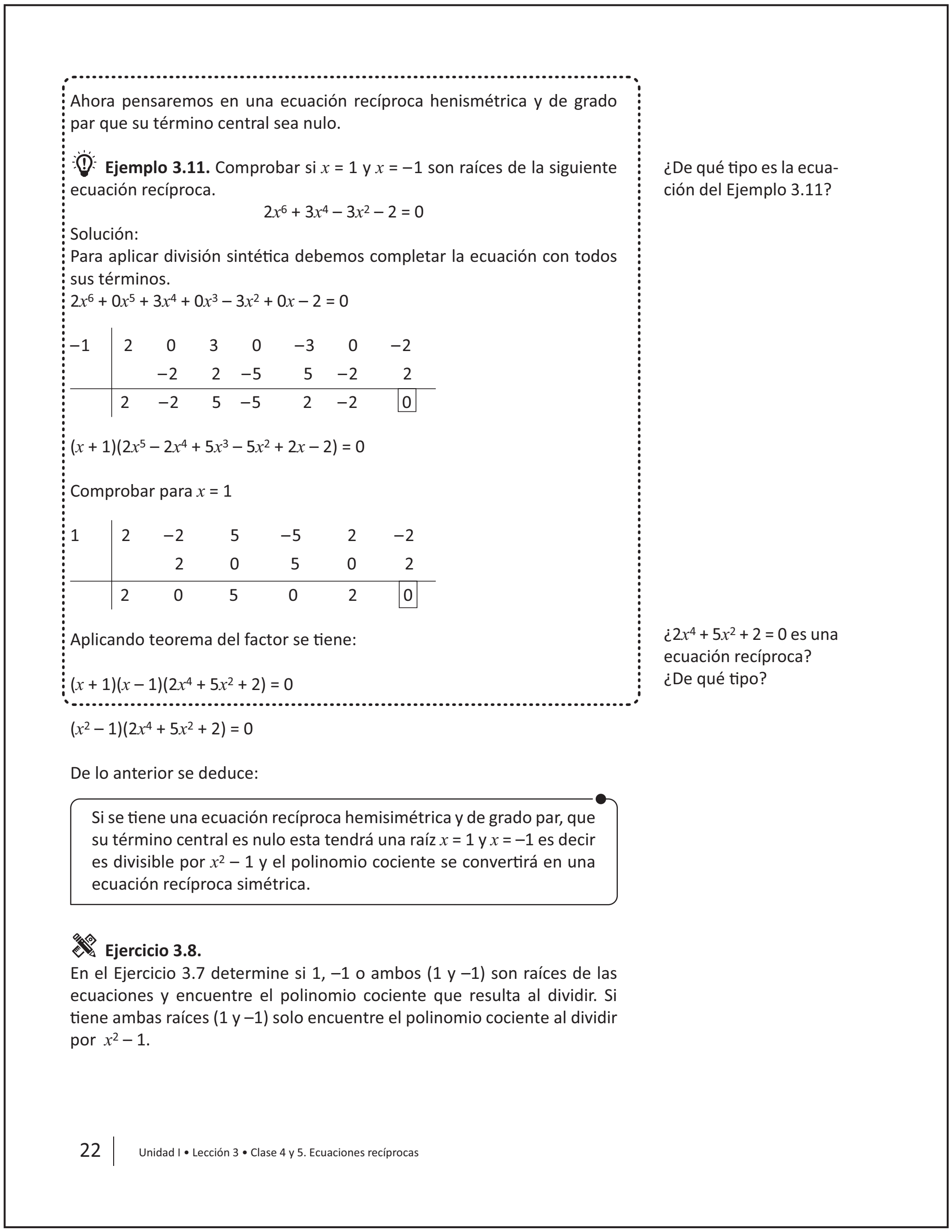
Concluir: toda ecuación simétrica de grado impar tendrá como raíz -1 y el polinomio cociente se convertirá en una recíproca simétrica de grado par.

Ejemplo 3.10. (10 min)

Seguir el mismo proceso de inducción que en el Ejemplo 3.9. Concluir toda ecuación recíproca hemisimétrica de grado impar tiene como raíz $x = 1$ y el polinomio cociente se convertirá en una ecuación recíproca simétrica de grado par.

Clase 4 y 5

(Continuación)



Ahora pensaremos en una ecuación recíproca henismétrica y de grado par que su término central sea nulo.

Ejemplo 3.11. Comprobar si $x = 1$ y $x = -1$ son raíces de la siguiente ecuación recíproca.

$$2x^6 + 3x^4 - 3x^2 - 2 = 0$$

Solución:

Para aplicar división sintética debemos completar la ecuación con todos sus términos.

$2x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 2 = 0$

−1	2	0	3	0	−3	0	−2
		−2	2	−5	5	−2	2
	2	−2	5	−5	2	−2	$\boxed{0}$

$(x + 1)(2x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 2x - 2) = 0$

Comprobar para $x = 1$

1	2	−2	5	−5	2	−2
		2	0	5	0	2
	2	0	5	0	2	$\boxed{0}$

Aplicando teorema del factor se tiene:

$(x + 1)(x - 1)(2x^4 + 5x^2 + 2) = 0$

$(x^2 - 1)(2x^4 + 5x^2 + 2) = 0$

De lo anterior se deduce:

Si se tiene una ecuación recíproca hemisimétrica y de grado par, que su término central es nulo esta tendrá una raíz $x = 1$ y $x = -1$ es decir es divisible por $x^2 - 1$ y el polinomio cociente se convertirá en una ecuación recíproca simétrica.

¿De qué tipo es la ecuación del Ejemplo 3.11?

¿$2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ es una ecuación recíproca? ¿De qué tipo?

Ejercicio 3.8.

En el Ejercicio 3.7 determine si 1, −1 o ambos (1 y −1) son raíces de las ecuaciones y encuentre el polinomio cociente que resulta al dividir. Si tiene ambas raíces (1 y −1) solo encuentre el polinomio cociente al dividir por $x^2 - 1$.

22 | Unidad I • Lección 3 • Clase 4 y 5. Ecuaciones recíprocas

Ejemplo 3.11

(10 min)

Seguir el mismo proceso de inducción que en el Ejemplo 3.9

Concluir toda ecuación recíproca hemisimétrica de grado par tiene como raíz $x = 1$, $x = -1$ y el polinomio cociente se convertirá en una ecuación recíproca simétrica.

*Es importante hacer notar al estudiante que para que la ecuación hemisimétrica sea divisible por $x^2 - 1$ debe ser de grado par. De igual manera en los casos anteriores ya que tiene que saber identificar las características de las ecuaciones para poder determinar si tienen como raíces $x = 1$ ó $x = -1$.

Ejercicio 3.8

(5 min)

Supervisar el trabajo individual de los estudiantes y así lograr identificar los errores que pueden cometer, a la vez verificar si hubo entendimiento del tema y se logró el objetivo de la clase.

Se puede asignar de tarea si el tiempo no es suficiente.

Soluciones:

a) No simétrica

b) 1 es raíz, $x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ es simétrica

c) −1 es raíz, $x^4 - x^3 + \frac{2}{5}x^2 - x + 1$ es simétrica

d) 1 y −1 son raíces, $8x^4 + 8$ es simétrica

e) −1 es raíz, $x^2 - 8x + 1$ es simétrica

f) 1 y −1 son raíces, $x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ es simétrica

g) −1 es raíz, $4x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 4$ es simétrica

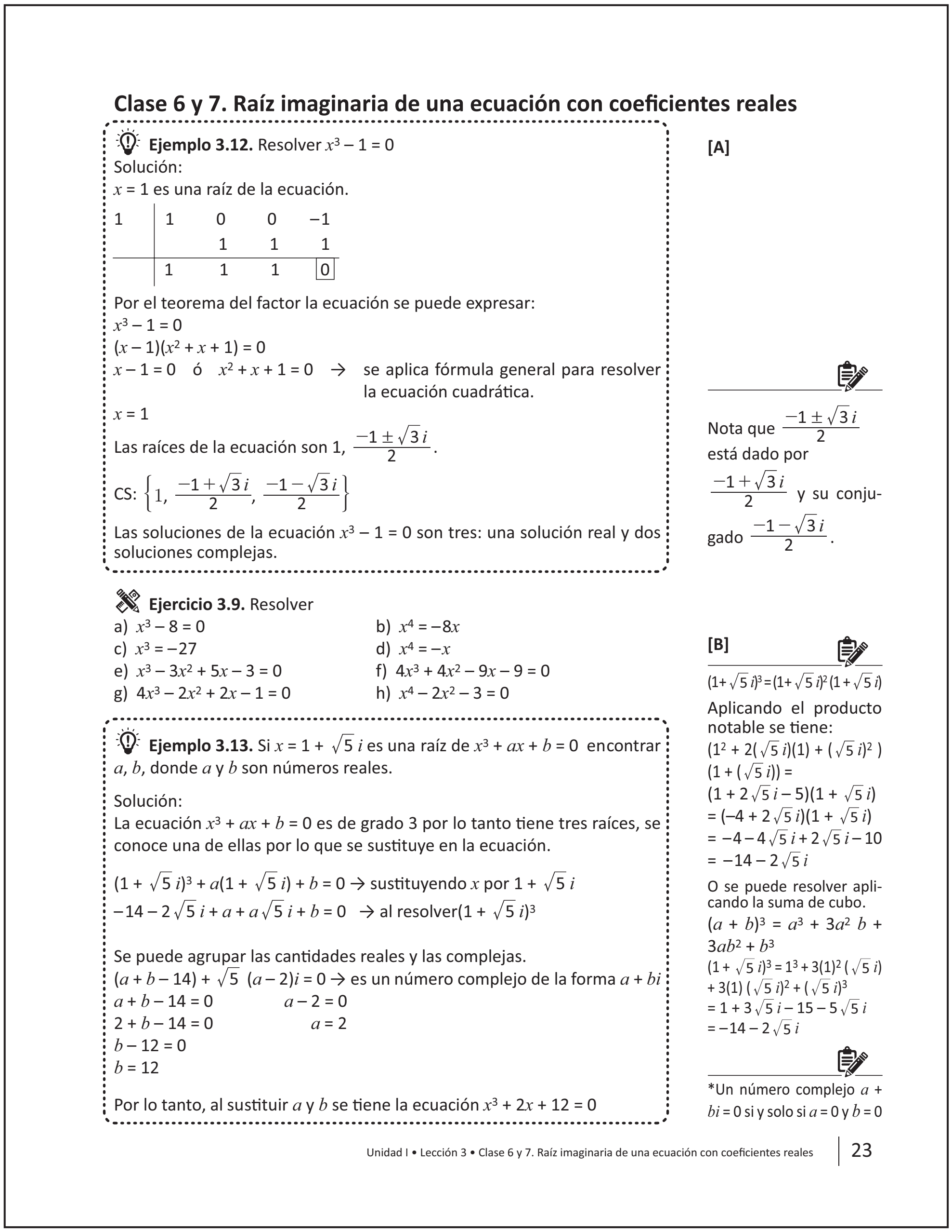
Objetivo: **[A]** Encontrar las raíces reales e imaginarias de una ecuación con coeficientes reales.
[B] Encontrar los coeficientes de una ecuación dada una de sus raíces.

Unidad I. Lección 3.

Clase 6 y 7

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: [A] Ejercicio 3.9, [B] Ejercicio 3.10



Clase 6 y 7. Raíz imaginaria de una ecuación con coeficientes reales

Ejemplo 3.12. Resolver $x^3 - 1 = 0$

Solución:

$x = 1$ es una raíz de la ecuación.

1	1	0	0	−1
		1	1	1
	1	1	1	$\boxed{0}$

Por el teorema del factor la ecuación se puede expresar:

$x^3 - 1 = 0$

$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x - 1 = 0$ ó $x^2 + x + 1 = 0$ → se aplica fórmula general para resolver la ecuación cuadrática.

$x = 1$

Las raíces de la ecuación son 1, $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

CS: $\left\{1, \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

Las soluciones de la ecuación $x^3 - 1 = 0$ son tres: una solución real y dos soluciones complejas.

[A]

Nota que $\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ está dado por $\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ y su conjugado $\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$.

Ejercicio 3.9. Resolver

a) $x^3 - 8 = 0$
b) $x^4 = -8x$
c) $x^3 = -27$
d) $x^4 = -x$
e) $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$
f) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = 0$
g) $4x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$
h) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Ejemplo 3.13. Si $x = 1 + \sqrt{5}\,i$ es una raíz de $x^3 + ax + b = 0$ encontrar a, b, donde a y b son números reales.

Solución:

La ecuación $x^3 + ax + b = 0$ es de grado 3 por lo tanto tiene tres raíces, se conoce una de ellas por lo que se sustituye en la ecuación.

$(1 + \sqrt{5}\,i)^3 + a(1 + \sqrt{5}\,i) + b = 0$ → sustituyendo x por $1 + \sqrt{5}\,i$

$-14 - 2\sqrt{5}\,i + a + a\sqrt{5}\,i + b = 0$ → al resolver$(1 + \sqrt{5}\,i)^3$

Se puede agrupar las cantidades reales y las complejas.

$(a + b - 14) + \sqrt{5}\,(a - 2)i = 0$ → es un número complejo de la forma $a + bi$

$a + b - 14 = 0$ $\quad a - 2 = 0$

$2 + b - 14 = 0$ $\quad a = 2$

$b - 12 = 0$

$b = 12$

Por lo tanto, al sustituir a y b se tiene la ecuación $x^3 + 2x + 12 = 0$

[B]

$(1+\sqrt{5}\,i)^3 = (1+\sqrt{5}\,i)^2(1+\sqrt{5}\,i)$

Aplicando el producto notable se tiene:

$(1^2 + 2(\sqrt{5}\,i)(1) + (\sqrt{5}\,i)^2)(1 + (\sqrt{5}\,i)) =$

$(1 + 2\sqrt{5}\,i - 5)(1 + \sqrt{5}\,i)$

$= (-4 + 2\sqrt{5}\,i)(1 + \sqrt{5}\,i)$

$= -4 - 4\sqrt{5}\,i + 2\sqrt{5}\,i - 10$

$= -14 - 2\sqrt{5}\,i$

O se puede resolver aplicando la suma de cubo.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(1 + \sqrt{5}\,i)^3 = 1^3 + 3(1)^2(\sqrt{5}\,i) + 3(1)(\sqrt{5}\,i)^2 + (\sqrt{5}\,i)^3$

$= 1 + 3\sqrt{5}\,i - 15 - 5\sqrt{5}\,i$

$= -14 - 2\sqrt{5}\,i$

*Un número complejo $a + bi = 0$ si y solo si $a = 0$ y $b = 0$

Unidad I • Lección 3 • Clase 6 y 7. Raíz imaginaria de una ecuación con coeficientes reales | 23

[A] Encontrar las raíces imaginarias de una ecuación de grado mayor que 2.

Ejemplo 3.12

(15 min)

*Plantear el Ejemplo 3.12 en la pizarra y pedir a los estudiantes que encuentren las raíces utilizando división sintética.

*Hacer que los estudiantes se den cuenta que solo es posible encontrar una raíz por la división sintética por lo que es necesario aplicar la fórmula general para encontrar las otras dos raíces.

M: ¿Las raíces encontradas mediante la fórmula general son reales?

RP: No, son complejas

Concluye: Las soluciones de la ecuación son reales y complejas

*Hacer notar al estudiante que las soluciones complejas están dadas por el conjugado de una de ellas.

Ejercicio 3.9

(30 min) Solución

a) CS: $\{2, -1 \pm \sqrt{3}\,i\}$

b) CS: $\{0, -2, 1 \pm \sqrt{3}\,i\}$

c) CS: $\left\{-3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

d) CS: $\left\{0, -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

e) CS: $\{1, 1 \pm \sqrt{2}\,i\}$

f) CS: $\{-1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$

g) CS: $\{\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,i\}$

h) CS: $\{\pm\sqrt{3}, \pm i\}$

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Ejemplo 3.13

[B] Dada una raíz de una ecuación encontrar sus raíces. (15 min). Plantear el ejercicio en la pizarra.

M: ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

RP: 3 porque su grado es 3

Unidad I. Lección 3.

Clase 6 y 7

(Continuación)

Clase 8

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Explican el teorema fundamental del álgebra.
[B] Deducir el teorema de la duplicidad de raíces.

Evaluación: [B] Ejercicios 3.11

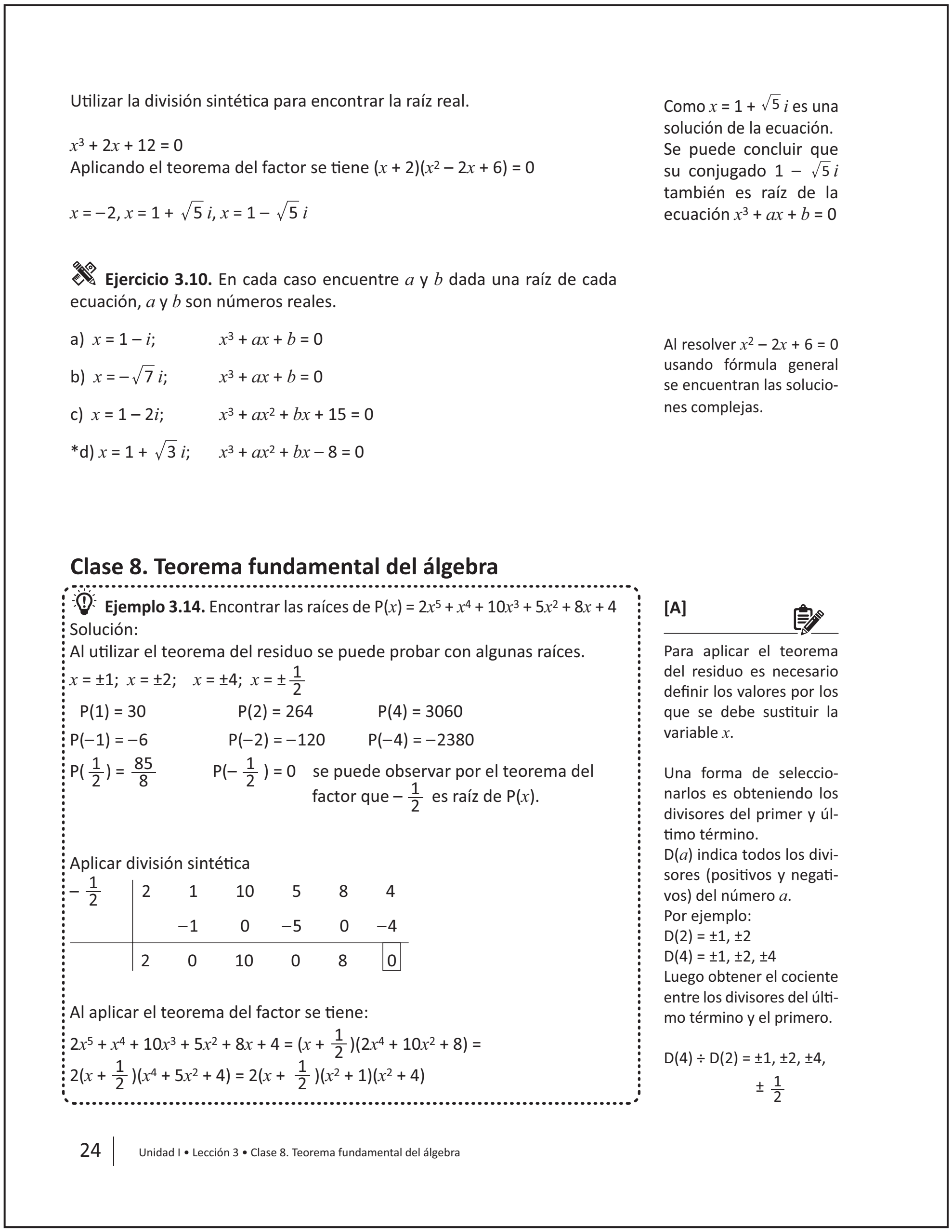
M: ¿Si $x = 1 + \sqrt{5}\,i$ es raíz de la ecuación qué se puede inferir de las soluciones restantes?
RP: El conjugado también es solución de la ecuación
M: ¿Cómo podemos encontrar los coeficientes de la ecuación?
RP: Sustituyendo la raíz dada en x.
*Hacer que sustituyan la raíz y que encuentren un número complejo de la forma $a + bi$.
Resolver en el cuaderno y hacer supervisión individual del trabajo, luego discutir en la pizarra los resultados.

*Recordar a los estudiantes que para que un número complejo sea cero debe ser cero, la parte real y la parte imaginaria también.
Es decir: $a + bi = 0$ si y solo si $a = 0$ y $b = 0$
Por lo tanto se puede igualar a cero el número complejo que resulto después de la sustitución. Y de esa manera se obtienen los coeficientes de la ecuación.

Ejercicio 3.10

(30 min)
a) $a = -2$, $b = 4$
b) $a = 7$, $b = 0$
c) $a = 1$, $b = -1$
d) $a = -4$, $b = 8$
Resolver y discutir los ejercicios en la pizarra

[Hasta aquí Clase 7]



Utilizar la división sintética para encontrar la raíz real.

$x^3 + 2x + 12 = 0$
Aplicando el teorema del factor se tiene $(x + 2)(x^2 - 2x + 6) = 0$

$x = -2, x = 1 + \sqrt{5}\,i, x = 1 - \sqrt{5}\,i$

Como $x = 1 + \sqrt{5}\,i$ es una solución de la ecuación. Se puede concluir que su conjugado $1 - \sqrt{5}\,i$ también es raíz de la ecuación $x^3 + ax + b = 0$

Ejercicio 3.10. En cada caso encuentre a y b dada una raíz de cada ecuación, a y b son números reales.

a) $x = 1 - i$; $x^3 + ax + b = 0$
b) $x = -\sqrt{7}\,i$; $x^3 + ax + b = 0$
c) $x = 1 - 2i$; $x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$
*d) $x = 1 + \sqrt{3}\,i$; $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$

Al resolver $x^2 - 2x + 6 = 0$ usando fórmula general se encuentran las soluciones complejas.

Clase 8. Teorema fundamental del álgebra

Ejemplo 3.14. Encontrar las raíces de $P(x) = 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$
Solución:
Al utilizar el teorema del residuo se puede probar con algunas raíces.
$x = \pm 1$; $x = \pm 2$; $x = \pm 4$; $x = \pm\frac{1}{2}$

$P(1) = 30$ $P(2) = 264$ $P(4) = 3060$
$P(-1) = -6$ $P(-2) = -120$ $P(-4) = -2380$
$P(\frac{1}{2}) = \frac{85}{8}$ $P(-\frac{1}{2}) = 0$ se puede observar por el teorema del factor que $-\frac{1}{2}$ es raíz de $P(x)$.

Aplicar división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 10 & 5 & 8 & 4 \\ & & -1 & 0 & -5 & 0 & -4 \\ \hline & 2 & 0 & 10 & 0 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

Al aplicar el teorema del factor se tiene:
$2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + \frac{1}{2})(2x^4 + 10x^2 + 8) =$
$2(x + \frac{1}{2})(x^4 + 5x^2 + 4) = 2(x + \frac{1}{2})(x^2 + 1)(x^2 + 4)$

[A]

Para aplicar el teorema del residuo es necesario definir los valores por los que se debe sustituir la variable x.

Una forma de seleccionarlos es obteniendo los divisores del primer y último término.
D(a) indica todos los divisores (positivos y negativos) del número a.
Por ejemplo:
D(2) = ±1, ±2
D(4) = ±1, ±2, ±4
Luego obtener el cociente entre los divisores del último término y el primero.

D(4) ÷ D(2) = ±1, ±2, ±4, $\pm\frac{1}{2}$

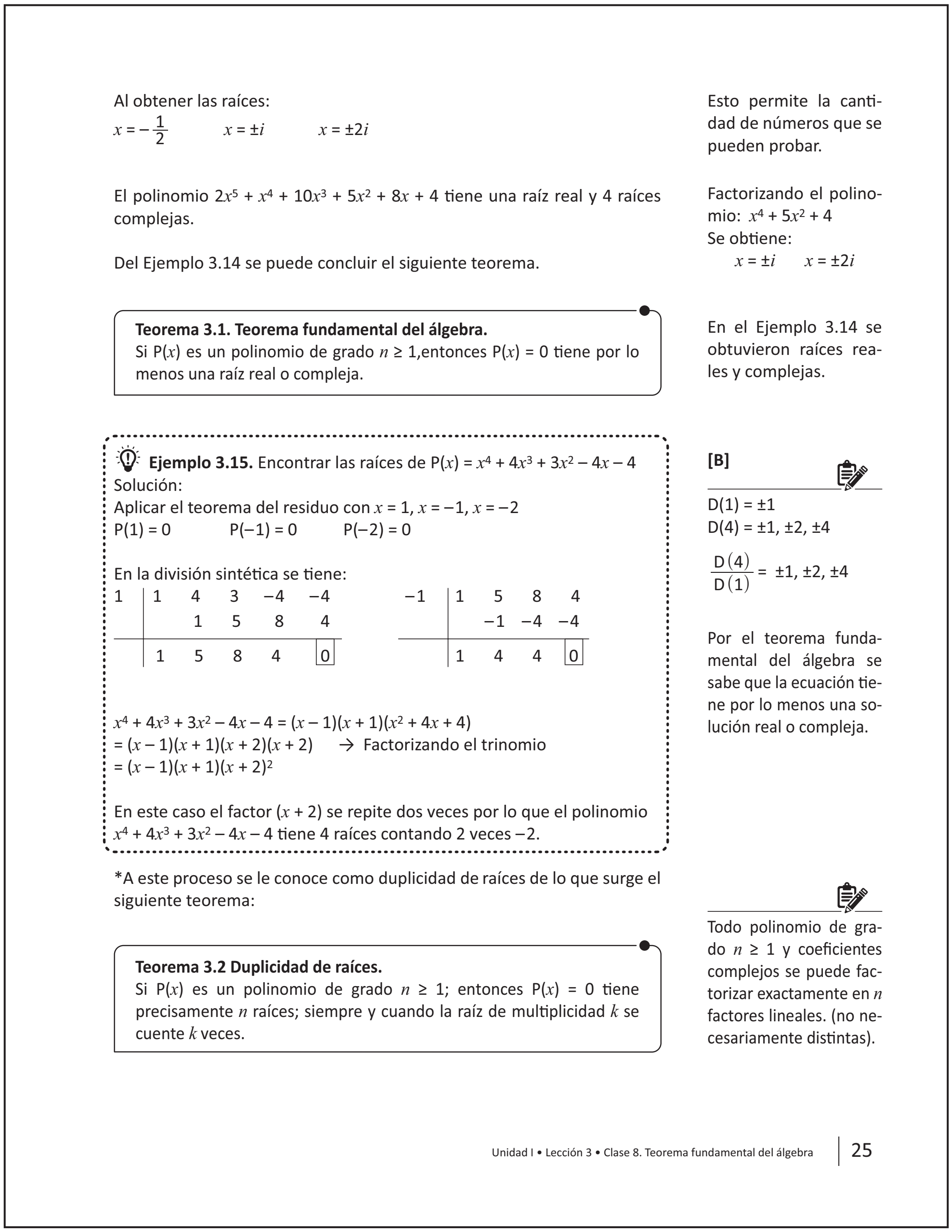
24 | Unidad I • Lección 3 • Clase 8. Teorema fundamental del álgebra

[Desde aquí Clase 8]

[A]

Ejemplo 3.14. (15 min)

*Plantear el ejercicio en la pizarra y pedirle a los estudiantes que intenten resolverlo.
*Aplicando los teoremas estudiados anteriormente encuentran las raíces de la ecuación dada.
Concluir que de acuerdo al teorema del factor ½ es raíz de la ecuación.



Al obtener las raíces:
$x = -\frac{1}{2}$ $x = \pm i$ $x = \pm 2i$

Esto permite la cantidad de números que se pueden probar.

El polinomio $2x^5 + x^4 + 10x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ tiene una raíz real y 4 raíces complejas.

Del Ejemplo 3.14 se puede concluir el siguiente teorema.

Factorizando el polinomio: $x^4 + 5x^2 + 4$
Se obtiene:
$x = \pm i$ $x = \pm 2i$

Teorema 3.1. Teorema fundamental del álgebra.
Si P(x) es un polinomio de grado $n \geq 1$,entonces P(x) = 0 tiene por lo menos una raíz real o compleja.

En el Ejemplo 3.14 se obtuvieron raíces reales y complejas.

Ejemplo 3.15. Encontrar las raíces de $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$
Solución:
Aplicar el teorema del residuo con $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$
$P(1) = 0$ $P(-1) = 0$ $P(-2) = 0$

En la división sintética se tiene:

1	1	4	3	−4	−4
		1	5	8	4
	1	5	8	4	$\boxed{0}$

−1	1	5	8	4
		−1	−4	−4
	1	4	4	$\boxed{0}$

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 4x + 4)$
$= (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 2)$ → Factorizando el trinomio
$= (x - 1)(x + 1)(x + 2)^2$

En este caso el factor $(x + 2)$ se repite dos veces por lo que el polinomio $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ tiene 4 raíces contando 2 veces −2.

[B]

D(1) = ±1
D(4) = ±1, ±2, ±4
$\frac{D(4)}{D(1)} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

Por el teorema fundamental del álgebra se sabe que la ecuación tiene por lo menos una solución real o compleja.

*A este proceso se le conoce como duplicidad de raíces de lo que surge el siguiente teorema:

Teorema 3.2 Duplicidad de raíces.
Si P(x) es un polinomio de grado $n \geq 1$; entonces P(x) = 0 tiene precisamente n raíces; siempre y cuando la raíz de multiplicidad k se cuente k veces.

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ y coeficientes complejos se puede factorizar exactamente en n factores lineales. (no necesariamente distintas).

*Aplicar el teorema del factor para expresar la ecuación como el producto de sus factores
Resolver la ecuación resultante aplicando factorización
M: ¿Cómo son las soluciones encontradas?
RP: Una solución real y las otras complejas
M: ¿Qué se puede deducir de las soluciones de una ecuación de grado mayor o igual que 1?
RP: Tendrán soluciones reales y complejas.
Concluye: Teorema fundamental del algebra
Toda ecuación de grado mayor o igual que uno tiene por lo menos una raíz real o compleja.

[B]

Ejemplo 3.15
(10 min)
Presentar en la pizarra el ejemplo y permitir que los estudiantes lo resuelvan si consultar LE.
Encontrar todas las raíces del polinomio dado.

*Como la ecuación es de grado 4 tiene 4 soluciones, pero hay una raíz que se repite por lo que se le conoce como duplicidad de raíces.

Concluir con Teorema 3.2 de la duplicidad de las raíces.

Clase 8

(Continuación)

Ejercicio 3.11

Resolver los ejercicios y discutir las respuestas en la pizarra
(20 min)

Soluciones:

a) $(x-2)(x+2)(x^2-x+1)$

CS: $\{2, -2, \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\}$

b) $(2x-1)(2x+1)(x^2+2)$

CS: $\{\pm \frac{1}{2}, \pm \sqrt{2}\,i\}$

c) $(x+1)(x+3)(x^2+5)$

CS: $\{-1, -3, \pm \sqrt{5}\,i\}$

d) $(2x+1)(x-3)(x-1)(x^2+2)$

CS: $\{-\frac{1}{2}, 3, 1, \pm \sqrt{2}\,i\}$

e) $(x-2)(2x-1)$
$(2x+1)(2x^2+1)$

CS: $\{2, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\}$

f) $(x-1)^2(x+3)$

CS: $\{1, -3\}$

g) $(2x+3)^2(x^2+5)$

CS: $\{-\frac{3}{2}, \pm \sqrt{5}\,i\}$

h) $(x+4)^2(x^2+7)$

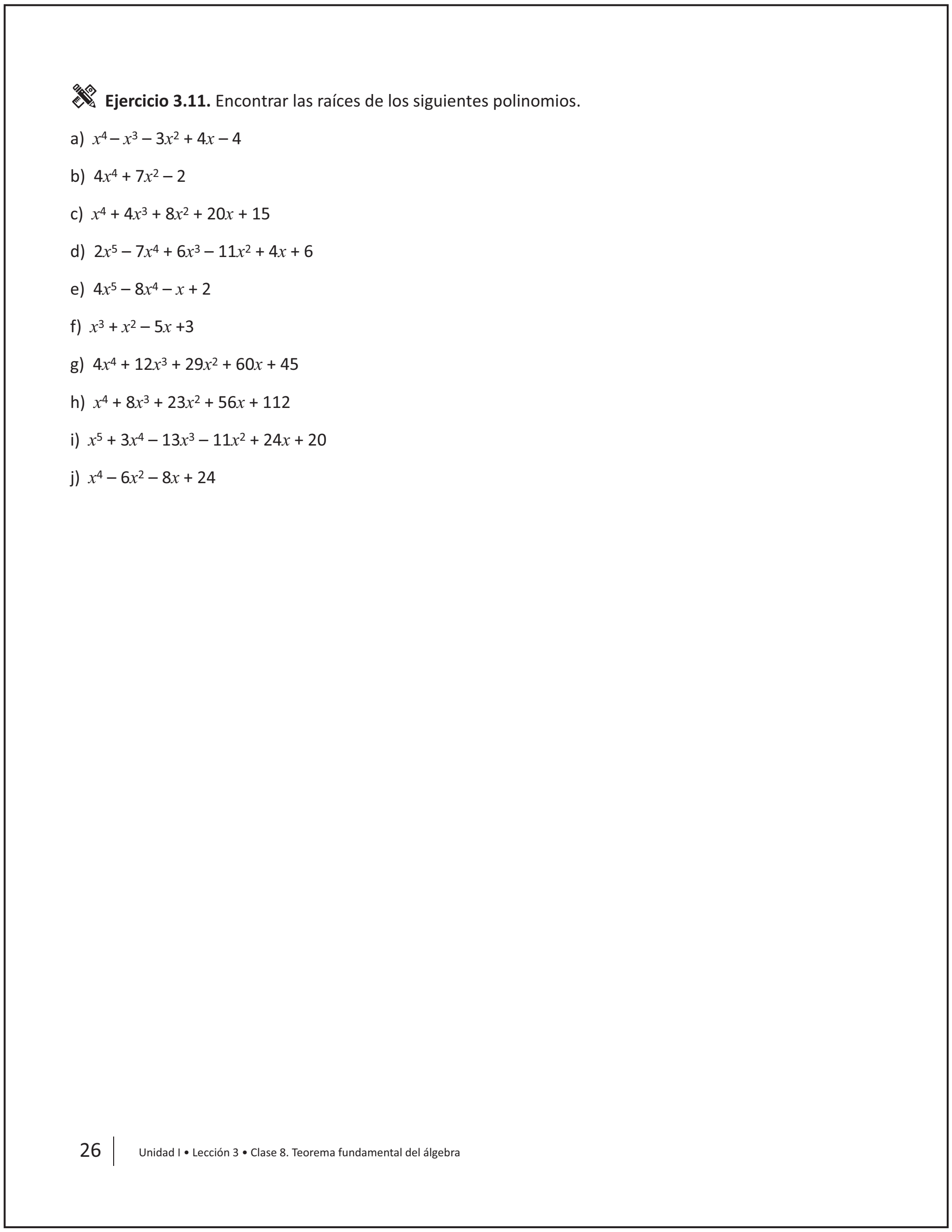
CS: $\{-4, \pm\sqrt{7}\,i\}$

i) $(x+5)(x+1)^2(x-2)^2$

CS: $\{-5, -1, 2\}$

j) $(x-2)^2(x^2+4x+6)$

CS: $\{2, -2 \pm \sqrt{2}\,i\}$



Ejercicio 3.11. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios.

a) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

b) $4x^4 + 7x^2 - 2$

c) $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 20x + 15$

d) $2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 4x + 6$

e) $4x^5 - 8x^4 - x + 2$

f) $x^3 + x^2 - 5x + 3$

g) $4x^4 + 12x^3 + 29x^2 + 60x + 45$

h) $x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 56x + 112$

i) $x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 11x^2 + 24x + 20$

j) $x^4 - 6x^2 - 8x + 24$

26 | Unidad I • Lección 3 • Clase 8. Teorema fundamental del álgebra

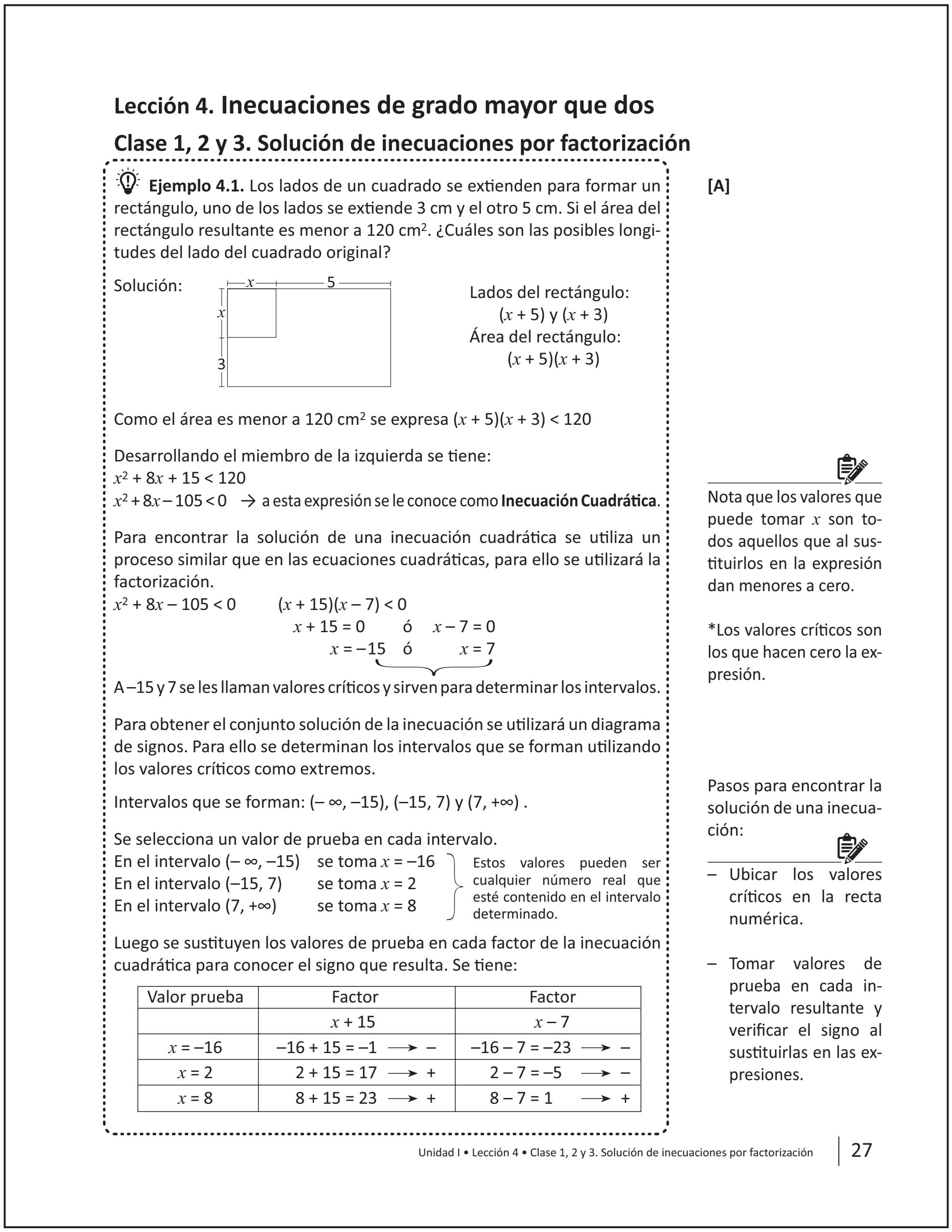
Objetivo: **[A]** Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos mediante factorización.

Evaluación: Ejercicio 4.1

Unidad I. Lección 4.

Clase 1, 2 y 3

(Continúa en la siguiente página)



Lección 4. Inecuaciones de grado mayor que dos

Clase 1, 2 y 3. Solución de inecuaciones por factorización

Ejemplo 4.1. Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo, uno de los lados se extiende 3 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor a 120 cm^2. ¿Cuáles son las posibles longitudes del lado del cuadrado original?

Solución:

Lados del rectángulo:
$(x + 5)$ y $(x + 3)$
Área del rectángulo:
$(x + 5)(x + 3)$

Como el área es menor a 120 cm^2 se expresa $(x + 5)(x + 3) < 120$

Desarrollando el miembro de la izquierda se tiene:
$x^2 + 8x + 15 < 120$
$x^2 + 8x - 105 < 0$ → a esta expresión se le conoce como **Inecuación Cuadrática**.

Para encontrar la solución de una inecuación cuadrática se utiliza un proceso similar que en las ecuaciones cuadráticas, para ello se utilizará la factorización.

$$x^2 + 8x - 105 < 0 \qquad (x + 15)(x - 7) < 0$$
$$x + 15 = 0 \quad ó \quad x - 7 = 0$$
$$\underbrace{x = -15 \quad ó \quad x = 7}$$

A –15 y 7 se les llaman valores críticos y sirven para determinar los intervalos.

Para obtener el conjunto solución de la inecuación se utilizará un diagrama de signos. Para ello se determinan los intervalos que se forman utilizando los valores críticos como extremos.

Intervalos que se forman: $(-\infty, -15)$, $(-15, 7)$ y $(7, +\infty)$.

Se selecciona un valor de prueba en cada intervalo.
En el intervalo $(-\infty, -15)$ se toma $x = -16$
En el intervalo $(-15, 7)$ se toma $x = 2$
En el intervalo $(7, +\infty)$ se toma $x = 8$

Estos valores pueden ser cualquier número real que esté contenido en el intervalo determinado.

Luego se sustituyen los valores de prueba en cada factor de la inecuación cuadrática para conocer el signo que resulta. Se tiene:

Valor prueba	Factor	Factor
	$x + 15$	$x - 7$
$x = -16$	$-16 + 15 = -1 \longrightarrow -$	$-16 - 7 = -23 \longrightarrow -$
$x = 2$	$2 + 15 = 17 \longrightarrow +$	$2 - 7 = -5 \longrightarrow -$
$x = 8$	$8 + 15 = 23 \longrightarrow +$	$8 - 7 = 1 \longrightarrow +$

[A]

Nota que los valores que puede tomar x son todos aquellos que al sustituirlos en la expresión dan menores a cero.

*Los valores críticos son los que hacen cero la expresión.

Pasos para encontrar la solución de una inecuación:

- Ubicar los valores críticos en la recta numérica.
- Tomar valores de prueba en cada intervalo resultante y verificar el signo al sustituirlas en las expresiones.

Unidad I • Lección 4 • Clase 1, 2 y 3. Solución de inecuaciones por factorización 27

[A] Definir una inecuación cuadrática

(30 min)

Ejemplo 4.1

*Presentar el problema en la pizarra.
M: ¿Que se está pidiendo encontrar en el problema?
RP: Las posibles longitudes del cuadrado
M: ¿Qué datos se dan en el problema?
RP: El aumento de las longitudes para convertirlo en un rectángulo y que el área es menor a 120 cm^2
M: ¿Cómo se expresa el área del rectángulo?
$(x + 5)\ (x + 3)$
Concluye como el área es menor a 120 se tiene la expresión
$(x + 5)\ (x + 3) < 120$
*Pedir a los estudiantes que resuelvan la multiplicación de los binomios
Concluye: a la expresión resultante se le conoce como inecuación cuadrática
M: ¿Cómo se puede resol ver la inecuación cuadrática?
RP: Igual que una ecuación cuadrática
Concluye: en este caso aplicaremos factorización para resolver la inecuación.
M: ¿Qué valores encontraron al factorizar el polinomio de la inecuación?
RP: –15 y 7.

M: ¿Cuál de ellas puede ser la posible longitud del cuadrado original?
RP: 7 porque –15 no puede ya que las longitudes no son negativas.

Concluye: –15 y 7 se les conoce como valores críticos de la inecuación.

Clase 1, 2 y 3
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Determinar los pasos para resolver una inecuación.

Evaluación: [A] Ejercicio 4.1

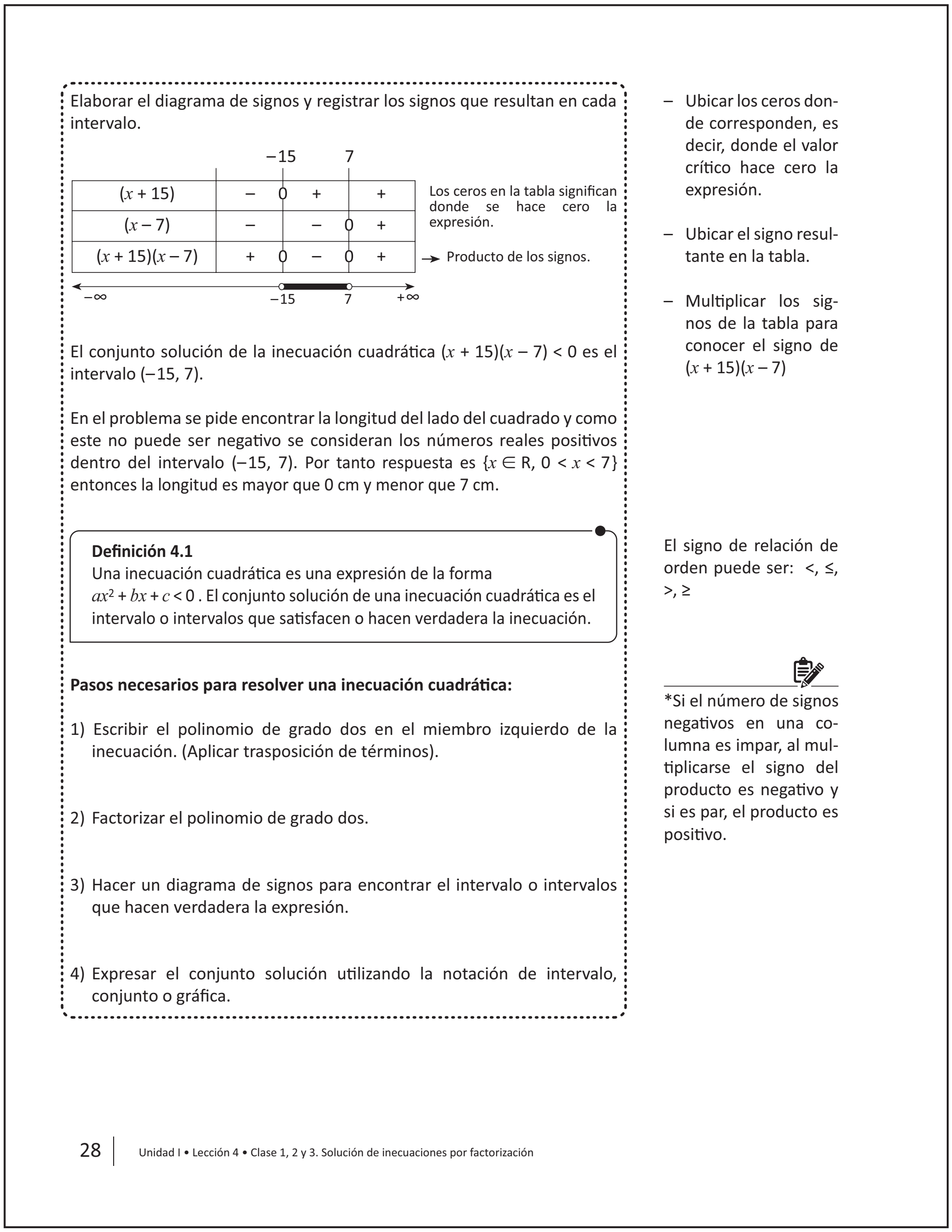
Determinar los pasos para resolver una inecuación.

*Para expresar la solución de la inecuación resultante es necesario elaborar un diagrama de signos ya que la solución será todos los valores que satisfagan la inecuación

*Explicar que el conjunto solución está conformado por intervalos y estos pueden ser expresados mediante tres notaciones: gráfica de intervalo o de conjunto.

(15 min)

Concluir Definición 4.1
*Establecer los pasos para resolver una inecuación cuadrática



Elaborar el diagrama de signos y registrar los signos que resultan en cada intervalo.

		-15		7	
$(x + 15)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x - 7)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x + 15)(x - 7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Los ceros en la tabla significan donde se hace cero la expresión.

→ Producto de los signos.

El conjunto solución de la inecuación cuadrática $(x + 15)(x - 7) < 0$ es el intervalo $(-15, 7)$.

En el problema se pide encontrar la longitud del lado del cuadrado y como este no puede ser negativo se consideran los números reales positivos dentro del intervalo $(-15, 7)$. Por tanto respuesta es $\{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 7\}$ entonces la longitud es mayor que 0 cm y menor que 7 cm.

Definición 4.1
Una inecuación cuadrática es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c < 0$. El conjunto solución de una inecuación cuadrática es el intervalo o intervalos que satisfacen o hacen verdadera la inecuación.

Pasos necesarios para resolver una inecuación cuadrática:

1) Escribir el polinomio de grado dos en el miembro izquierdo de la inecuación. (Aplicar trasposición de términos).

2) Factorizar el polinomio de grado dos.

3) Hacer un diagrama de signos para encontrar el intervalo o intervalos que hacen verdadera la expresión.

4) Expresar el conjunto solución utilizando la notación de intervalo, conjunto o gráfica.

- Ubicar los ceros donde corresponden, es decir, donde el valor crítico hace cero la expresión.
- Ubicar el signo resultante en la tabla.
- Multiplicar los signos de la tabla para conocer el signo de $(x + 15)(x - 7)$

El signo de relación de orden puede ser: <, ≤, >, ≥

*Si el número de signos negativos en una columna es impar, al multiplicarse el signo del producto es negativo y si es par, el producto es positivo.

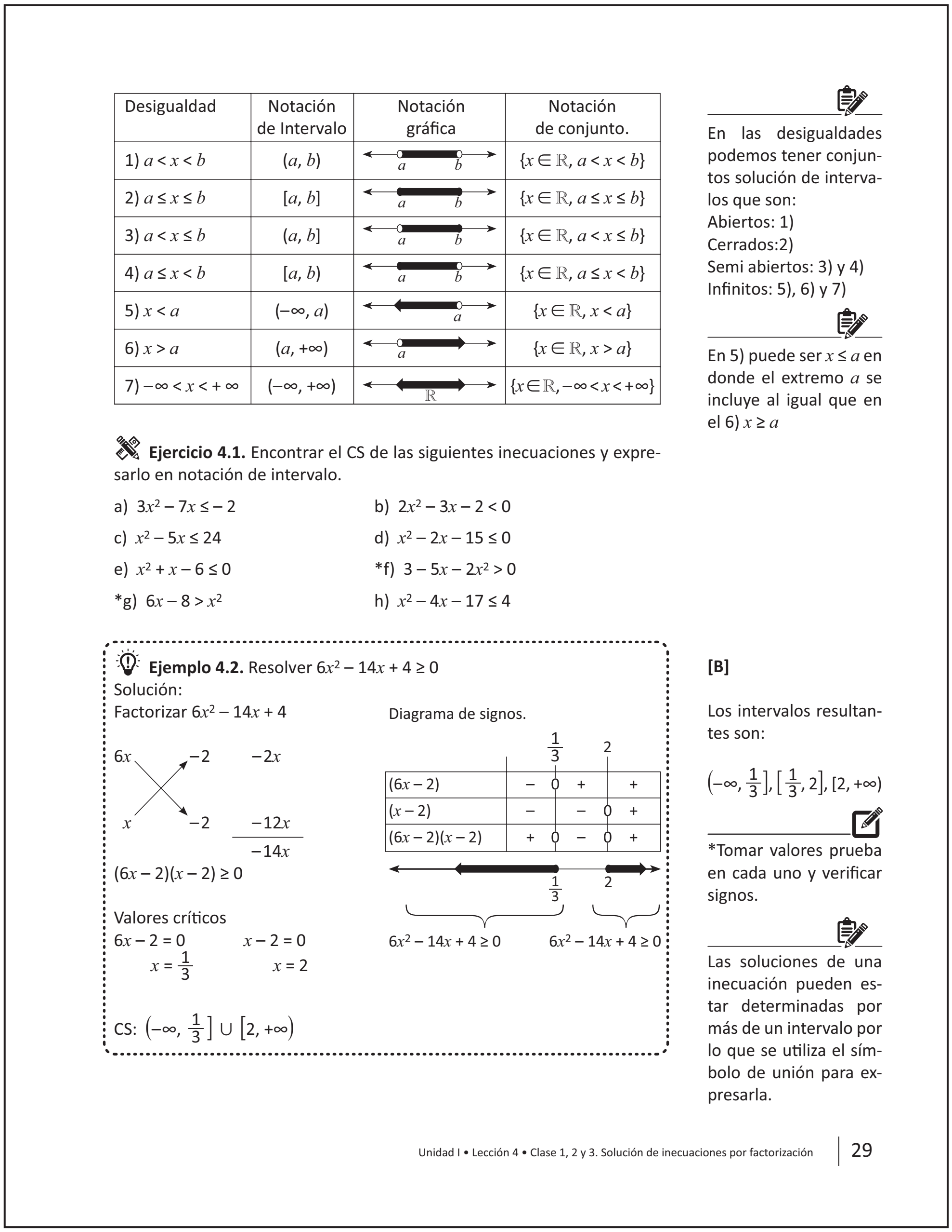
Objetivo: **[B]** Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos donde el conjunto solución es la unión de intervalos.

Evaluación: Ejercicio 4.2

Clase 1, 2 y 3

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Desigualdad	Notación de Intervalo	Notación gráfica	Notación de conjunto.
1) $a < x < b$	(a, b)	a b	$\{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
2) $a \leq x \leq b$	$[a, b]$	a b	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
3) $a < x \leq b$	$(a, b]$	a b	$\{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4) $a \leq x < b$	$[a, b)$	a b	$\{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
5) $x < a$	$(-\infty, a)$	a	$\{x \in \mathbb{R}, x < a\}$
6) $x > a$	$(a, +\infty)$	a	$\{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
7) $-\infty < x < +\infty$	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty\}$

En las desigualdades podemos tener conjuntos solución de intervalos que son:
Abiertos: 1)
Cerrados:2)
Semi abiertos: 3) y 4)
Infinitos: 5), 6) y 7)

En 5) puede ser $x \leq a$ en donde el extremo a se incluye al igual que en el 6) $x \geq a$

Ejercicio 4.1. Encontrar el CS de las siguientes inecuaciones y expresarlo en notación de intervalo.

a) $3x^2 - 7x \leq -2$	b) $2x^2 - 3x - 2 < 0$
c) $x^2 - 5x \leq 24$	d) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$
e) $x^2 + x - 6 \leq 0$	*f) $3 - 5x - 2x^2 > 0$
*g) $6x - 8 > x^2$	h) $x^2 - 4x - 17 \leq 4$

Ejemplo 4.2. Resolver $6x^2 - 14x + 4 \geq 0$

Solución:

Factorizar $6x^2 - 14x + 4$

$6x$ -2 $-2x$

x -2 $-12x$

$-14x$

$(6x - 2)(x - 2) \geq 0$

Valores críticos

$6x - 2 = 0$ $x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ $x = 2$

CS: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[2, +\infty\right)$

Diagrama de signos.

		$\frac{1}{3}$		2	
$(6x - 2)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x - 2)$	$-$		$-$	0	$+$
$(6x - 2)(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{1}{3}$ 2

$6x^2 - 14x + 4 \geq 0$ $6x^2 - 14x + 4 \geq 0$

[B]

Los intervalos resultantes son:

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 2\right], [2, +\infty)$

*Tomar valores prueba en cada uno y verificar signos.

Las soluciones de una inecuación pueden estar determinadas por más de un intervalo por lo que se utiliza el símbolo de unión para expresarla.

Unidad I • Lección 4 • Clase 1, 2 y 3. Solución de inecuaciones por factorización | 29

Ejercicio 4.1 (15 min). Soluciones

a) $(3x - 1)(x - 2) \leq 0$ CS: $[\frac{1}{3}, 2]$	b) $(2x + 1)(x - 2) < 0$ $(-\frac{1}{2}, 2)$
c) $(x + 3)(x - 8) \leq 0$ CS: $[-3, 8]$	d) $(x + 3)(x - 5) \leq 0$ CS: $[-3, 5]$
e) $(x + 3)(x - 2) \leq 0$ CS: $[-3 ,2]$	f) $(x + 3)(2x - 1) < 0$ CS: $(-3, \frac{1}{2})$
g) $(x - 2)(x - 4) < 0$ CS: $(2, 4)$	h) $(x + 3)(x - 7) \leq 0$ CS: $[-3, 7]$

*Presentar la tabla donde se definen las diferentes formas en las que se puede expresar la solución de una inecuación cuadrática y los diferentes casos que se pueden presentar.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

[B] (10 min)

Ejemplo 4.2

*Presentar la inecuación en la pizarra y pedir a los estudiantes que la resuelvan.

M: ¿Cuáles son los valores críticos?

RP: $\frac{1}{3}$, 2

Dibujar la tabla de signos y hacer que se den cuenta que hay dos intervalos que satisfacen la desigualdad.

M: ¿Cuáles son los intervalos que satisfacen la inecuación?

RP: $(-\infty, \frac{1}{3}]$, $[2, +\infty)$

M: Cuando se tiene más de un intervalo como solución de una inecuación se expresa utilizando el símbolo de unión.

*Es importante que el estudiante conozca las tres formas de expresar un conjunto solución de una inecuación sin embargo solo es necesario que la representen utilizando notación de intervalo ya que es la más sencilla.

Clase 1, 2 y 3
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[C]** Resuelven problemas aplicando inecuaciones cuadráticas

Evaluación: Ejercicio 4.3, 4.4.

Ejemplo 4.3
(5 min)

Ejercicio 4.2
(15 min) Soluciones

a) $(x-2)(x-4)>0$
CS: $(-\infty, 2)\cup(4,+\infty)$

b) $7(x+4)(x-1)\geq 0$
CS: $(-\infty,-4]\cup[1,+\infty)$

c) $4(x+2)(x-2)\geq 0$
CS: $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

d) $3(x+3)(x-3)>0$
CS: $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

e) $(x+5)(x-5)>0$
CS:$(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$

f) $(x+\sqrt{15})(x-\sqrt{15})>0$
CS: $(-\infty,-\sqrt{15})\cup$
$(\sqrt{15},+\infty)$

*g) $5(3x+1)(2x-1)>0$
CS:$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

h) $x(16x-9)\geq 0$
CS: $(-\infty,0]\cup[\frac{9}{16},+\infty)$

i) $(2x+5)(x-1)\geq 0$
CS: $(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[1,+\infty)$

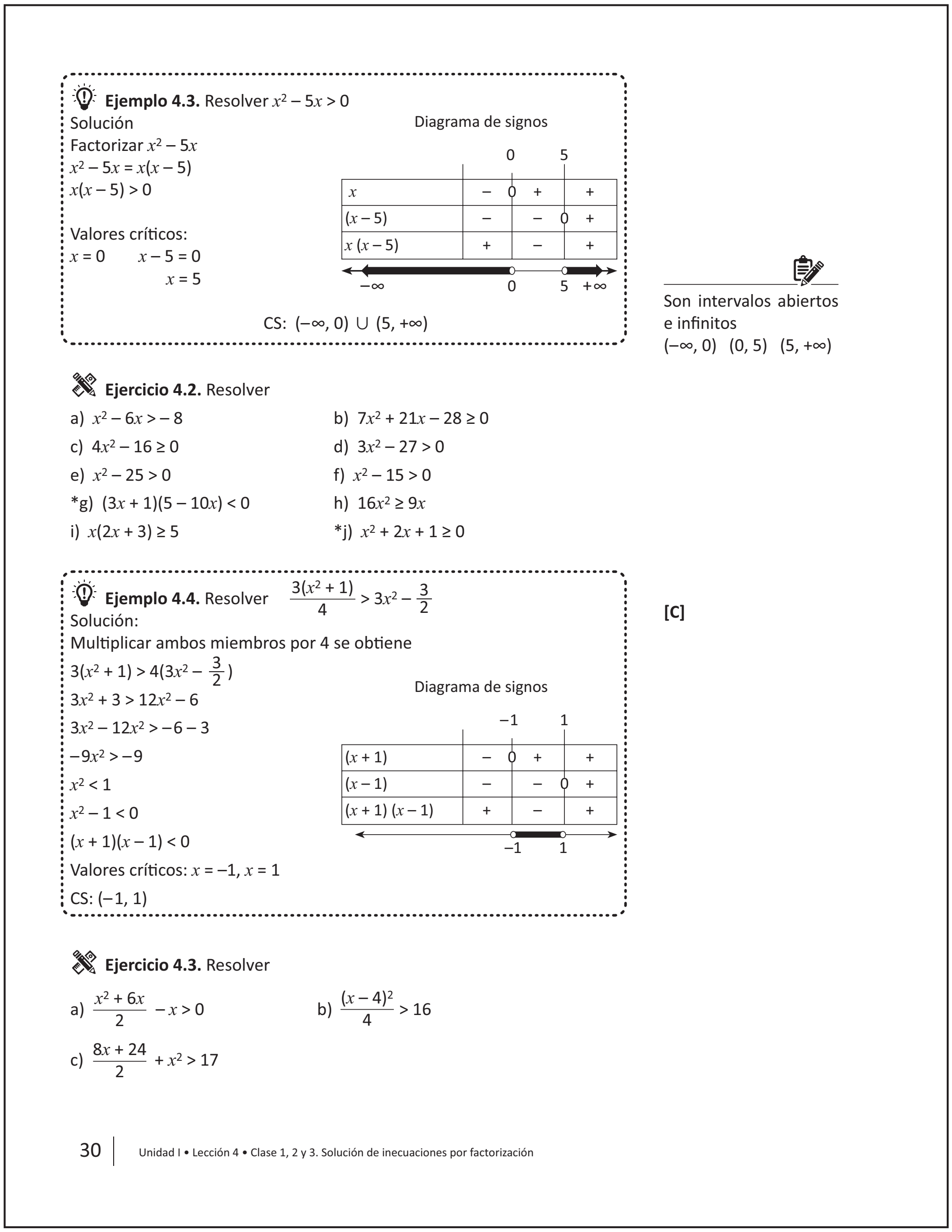
*j) $(x+1)^2\geq 0$
CS: $(-\infty,+\infty)$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

[C]
Inecuaciones con coeficientes fraccionarios

Ejemplo 4.4
(15 min)



Ejemplo 4.3. Resolver $x^2-5x>0$

Solución

Factorizar x^2-5x

$x^2-5x=x(x-5)$

$x(x-5)>0$

Valores críticos:

$x=0$ $\quad x-5=0$

$x=5$

Diagrama de signos

		0		5	
x	−	0	+		+
$(x-5)$	−		−	0	+
$x(x-5)$	+		−		+

−∞ 0 5 +∞

CS: $(-\infty, 0)\cup(5,+\infty)$

Son intervalos abiertos e infinitos

$(-\infty, 0)$ $(0, 5)$ $(5, +\infty)$

Ejercicio 4.2. Resolver

a) $x^2-6x>-8$
b) $7x^2+21x-28\geq 0$
c) $4x^2-16\geq 0$
d) $3x^2-27>0$
e) $x^2-25>0$
f) $x^2-15>0$
*g) $(3x+1)(5-10x)<0$
h) $16x^2\geq 9x$
i) $x(2x+3)\geq 5$
*j) $x^2+2x+1\geq 0$

Ejemplo 4.4. Resolver $\frac{3(x^2+1)}{4}>3x^2-\frac{3}{2}$

[C]

Solución:

Multiplicar ambos miembros por 4 se obtiene

$3(x^2+1)>4(3x^2-\frac{3}{2})$

$3x^2+3>12x^2-6$

$3x^2-12x^2>-6-3$

$-9x^2>-9$

$x^2<1$

$x^2-1<0$

$(x+1)(x-1)<0$

Valores críticos: $x=-1$, $x=1$

CS: $(-1, 1)$

Diagrama de signos

		−1		1	
$(x+1)$	−	0	+		+
$(x-1)$	−		−	0	+
$(x+1)(x-1)$	+		−		+

−1 1

Ejercicio 4.3. Resolver

a) $\frac{x^2+6x}{2}-x>0$
b) $\frac{(x-4)^2}{4}>16$
c) $\frac{8x+24}{2}+x^2>17$

30 Unidad I • Lección 4 • Clase 1, 2 y 3. Solución de inecuaciones por factorización

*En este tipo de ejercicio es preferible que el estudiante trate de aplicar mcm para no trabajar con fracciones eso facilitará el proceso y las operaciones posteriores.

Ejercicio 4.3 (15 min) Soluciones

a) $x(x+4)>0$ CS: $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

b) $(x+4)(x-12)>0$ CS: $(-\infty,-4)\cup(12,+\infty)$

c) $(x+5)(x-1)>0$ CS: $(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$

Objetivo: **[A]** Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos la cual ya está factorizada.

Evaluación: Ejercicio 4.3, 4.4

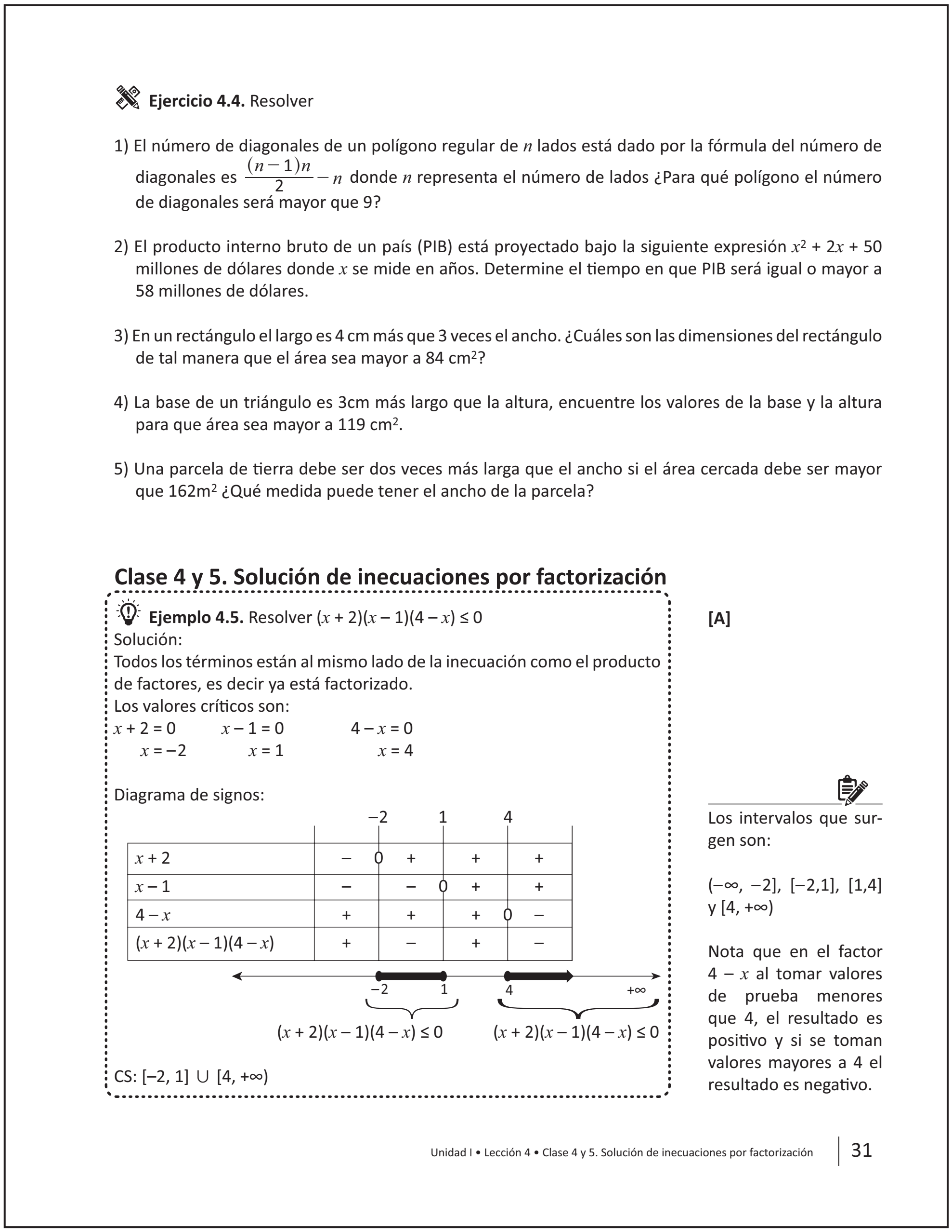
Unidad I. Lección 4.

Clase 1, 2 y 3

(Continuación)

Clase 4 y 5

(Continúa en la siguiente página)



Ejercicio 4.4. Resolver

1) El número de diagonales de un polígono regular de n lados está dado por la fórmula del número de diagonales es $\frac{(n-1)n}{2} - n$ donde n representa el número de lados ¿Para qué polígono el número de diagonales será mayor que 9?

2) El producto interno bruto de un país (PIB) está proyectado bajo la siguiente expresión $x^2 + 2x + 50$ millones de dólares donde x se mide en años. Determine el tiempo en que PIB será igual o mayor a 58 millones de dólares.

3) En un rectángulo el largo es 4 cm más que 3 veces el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de tal manera que el área sea mayor a 84 cm^2?

4) La base de un triángulo es 3cm más largo que la altura, encuentre los valores de la base y la altura para que área sea mayor a 119 cm^2.

5) Una parcela de tierra debe ser dos veces más larga que el ancho si el área cercada debe ser mayor que $162m^2$ ¿Qué medida puede tener el ancho de la parcela?

Clase 4 y 5. Solución de inecuaciones por factorización

Ejemplo 4.5. Resolver $(x + 2)(x - 1)(4 - x) \leq 0$

Solución:

Todos los términos están al mismo lado de la inecuación como el producto de factores, es decir ya está factorizado.

Los valores críticos son:

$x + 2 = 0$ $x = -2$

$x - 1 = 0$ $x = 1$

$4 - x = 0$ $x = 4$

Diagrama de signos:

		−2		1		4	
$x + 2$	−	0	+		+		+
$x - 1$	−		−	0	+		+
$4 - x$	+		+		+	0	−
$(x + 2)(x - 1)(4 - x)$	+		−		+		−

CS: $[-2, 1] \cup [4, +\infty)$

[A]

Los intervalos que surgen son:

$(-\infty, -2]$, $[-2,1]$, $[1,4]$ y $[4, +\infty)$

Nota que en el factor $4 - x$ al tomar valores de prueba menores que 4, el resultado es positivo y si se toman valores mayores a 4 el resultado es negativo.

Ejercicio 4.4

(15 min) Soluciones

1. Polígono que el número de lados es más que 6.
2. 2 o más años
3. Ancho: mayor que $\frac{14}{3}$ cm
   Largo: mayor que 18 cm
4. Base: mayor que 17 cm
   Altura: mayor que 14 cm
5. más que 9 m.

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

[A]

Ejemplo 4.5

(10 min)

*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedir a los estudiantes opiniones de cómo pueden resolver la inecuación

M: ¿Es una inecuación cuadrática?

RP: No es de grado 3

M: ¿Es necesario factorizarla?

RP: no ya está factorizada

M: ¿Cuáles son las raíces del polinomio?

RP: −2, 1, 4

*Pedir a los estudiantes que elaboren la tabla de signos y que expresen la solución mediante intervalo.

Clase 4 y 5
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos donde se da duplicidad de raíces del polinomio del miembro izquierdo.
[C] Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos aplicando factorización.

Evaluación: [B] Ejercicio 4.5, 4.6, [C] Ejercicio 4.7

Ejercicio 4.5
(15 min) Soluciones

a) CS: $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$

b) CS: $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (5, +\infty)$

c) CS: $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, 3]$

d) CS: $(-\infty, -3] \cup [-2, 5]$

e) CS: $(-3, -2) \cup (-1, +\infty)$

[B]

Ejemplo 4.6
(10 min)

Presentar el ejemplo en la pizarra y permitir que los estudiantes lo resuelvan sin consultar LE.

M: ¿Cuáles son los valores críticos en la inecuación?

RP: 2 y 1

M: ¿Qué sucede cuando se sustituyen valores prueba en la expresión cuando esta elevado a un exponente par?

RP: Siempre es positivo

*Al expresar el conjunto solución de la inecuación es importante notar que como la desigualdad es estricta mayor que cero el dos no se incluye por lo que los intervalos son abiertos.

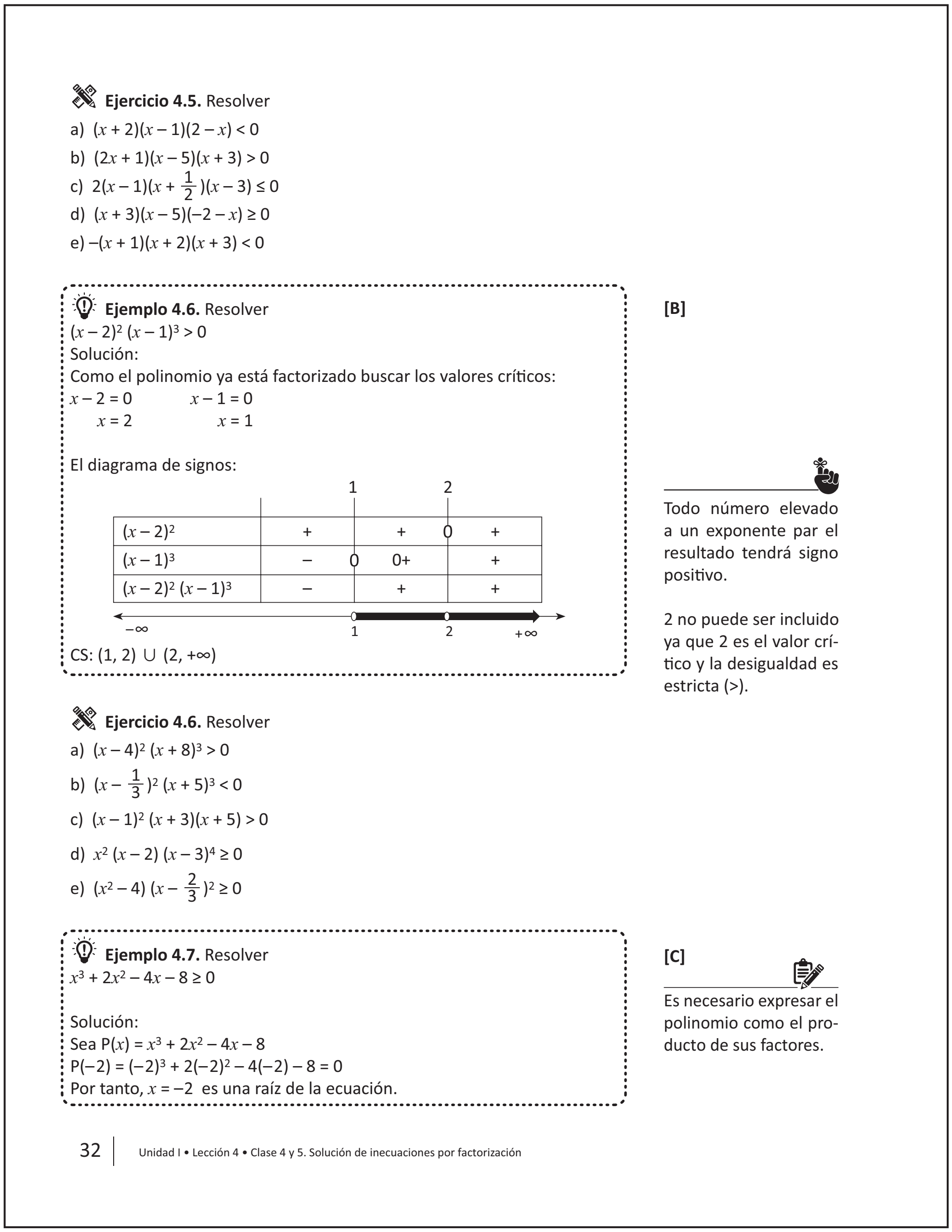
Ejercicio 4.6
(10 min) Soluciones véase la página 64

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

[C]

Ejemplo 4.7
(20 min)



Ejercicio 4.5. Resolver

a) $(x+2)(x-1)(2-x) < 0$

b) $(2x+1)(x-5)(x+3) > 0$

c) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})(x-3) \leq 0$

d) $(x+3)(x-5)(-2-x) \geq 0$

e) $-(x+1)(x+2)(x+3) < 0$

Ejemplo 4.6. Resolver

$(x-2)^2 (x-1)^3 > 0$

Solución:

Como el polinomio ya está factorizado buscar los valores críticos:

$x - 2 = 0 \qquad x - 1 = 0$

$x = 2 \qquad x = 1$

El diagrama de signos:

		1		2	
$(x-2)^2$	+		+	0	+
$(x-1)^3$	−	0	0+		+
$(x-2)^2 (x-1)^3$	−		+		+

$-\infty$ 1 2 $+\infty$

CS: $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

[B]

Todo número elevado a un exponente par el resultado tendrá signo positivo.

2 no puede ser incluido ya que 2 es el valor crítico y la desigualdad es estricta (>).

Ejercicio 4.6. Resolver

a) $(x-4)^2 (x+8)^3 > 0$

b) $(x-\frac{1}{3})^2 (x+5)^3 < 0$

c) $(x-1)^2 (x+3)(x+5) > 0$

d) $x^2 (x-2) (x-3)^4 \geq 0$

e) $(x^2-4) (x-\frac{2}{3})^2 \geq 0$

Ejemplo 4.7. Resolver

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

Solución:

Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -2$ es una raíz de la ecuación.

[C]

Es necesario expresar el polinomio como el producto de sus factores.

32 | Unidad I • Lección 4 • Clase 4 y 5. Solución de inecuaciones por factorización

*Realizar el proceso de inducción similar a los ejemplos anteriores.

* Hacer que los estudiantes se den cuenta de que para encontrar el conjunto solución de la inecuación es necesario que factoricen el polinomio aplicando el teorema del residuo y del factor para encontrar los valores críticos.

Clase 4 y 5
(Continuación)

Por el teorema del factor se tiene:

$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x + 2)(x^2 - 4) \geq 0$
$= (x + 2)(x + 2)(x - 2) \geq 0$ factorizando $x^2 - 4$
$= (x + 2)^2 (x - 2) \geq 0$

Los valores críticos son:
$x + 2 = 0$ $x - 2 = 0$
$x = -2$ $x = 2$

El diagrama de signos:

		-2		2	
$(x + 2)^2$	$+$	0	$+$		$+$
$(x - 2)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x + 2)^2 (x - 2)$	$-$		$-$		$+$

CS: $\{-2\} \cup [2, +\infty)$

Ejercicio 4.7. Resolver

a) $x^3 + 4x^2 - x - 4 < 0$

b) $x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0$

c) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \leq 0$

d) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \leq 0$

*Hacer que expresen el conjunto solución mediante la notación de intervalo.

Ejercicio 4.7
(25 min) Soluciones

a) CS: $(-\infty, -4) \cup (-1, 1)$

b) CS: $\{-1\} \cup [1, +\infty)$

c) CS: $(-\infty, -1] \cup [1, \frac{3}{2}]$

d) CS: $(-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{2}, 1]$

Unidad I. Lección 4.

Ejercicios de la Lección

Soluciones

Objetivo: Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos aplicando lo aprendido en clase 1 y 2.

Evaluación: Ejercicio de la lección

a) CS: $(-\infty, -4] \cup [\frac{3}{2}, +\infty]$

b) CS: $(-\sqrt{17}, \sqrt{17})$

*c) CS: $(-\infty, +\infty)$

*d) CS: $(-\infty, +\infty)$

e) CS: $[-1, \frac{5}{2}]$

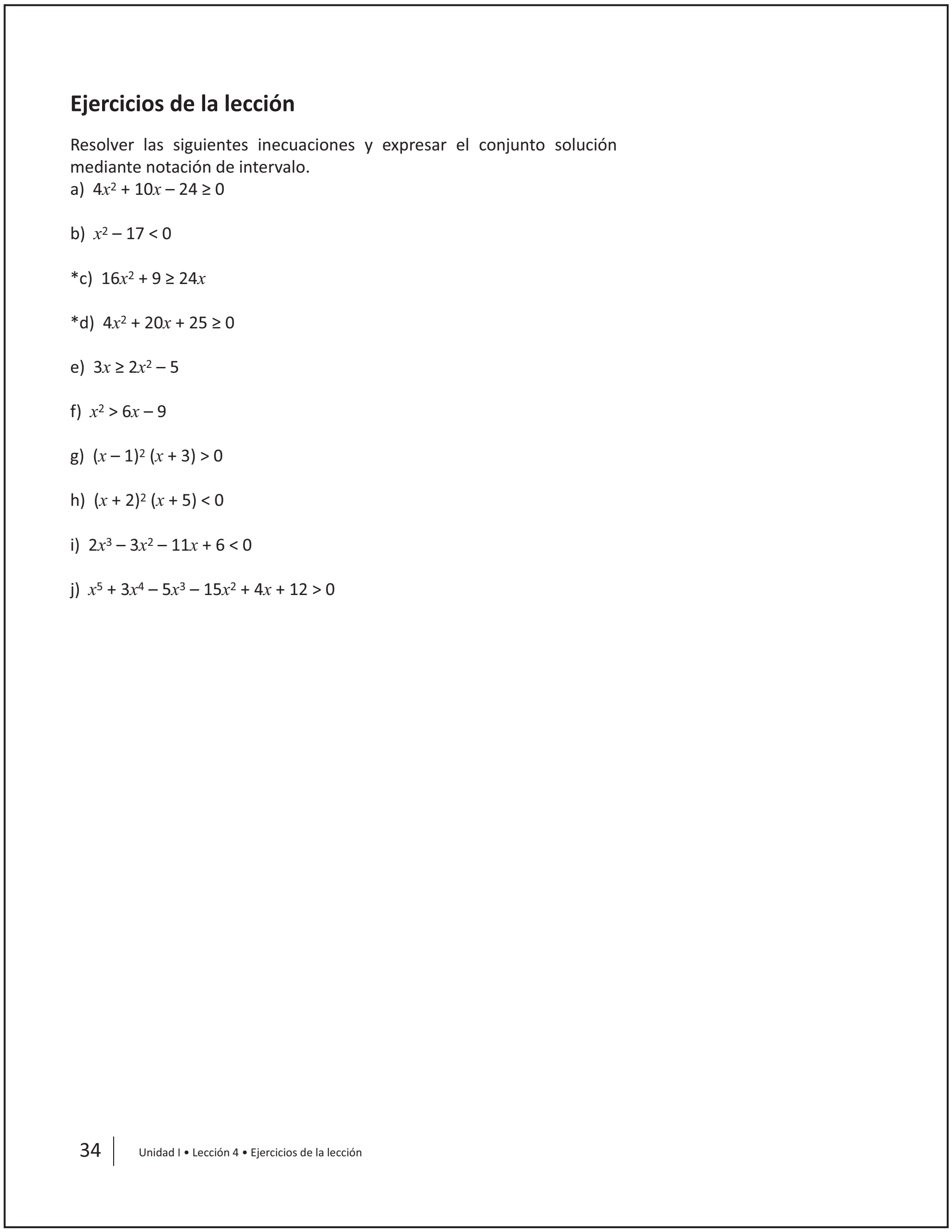
f) CS: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

g) CS: $(-3, 1) \cup (1, +\infty)$

h) CS: $(-\infty, -5)$

i) CS: $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, 3)$

j) CS: $(-3, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$



Ejercicios de la lección

Resolver las siguientes inecuaciones y expresar el conjunto solución mediante notación de intervalo.

a) $4x^2 + 10x - 24 \geq 0$

b) $x^2 - 17 < 0$

*c) $16x^2 + 9 \geq 24x$

*d) $4x^2 + 20x + 25 \geq 0$

e) $3x \geq 2x^2 - 5$

f) $x^2 > 6x - 9$

g) $(x - 1)^2 (x + 3) > 0$

h) $(x + 2)^2 (x + 5) < 0$

i) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$

j) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12 > 0$

34 | Unidad I • Lección 4 • Ejercicios de la lección

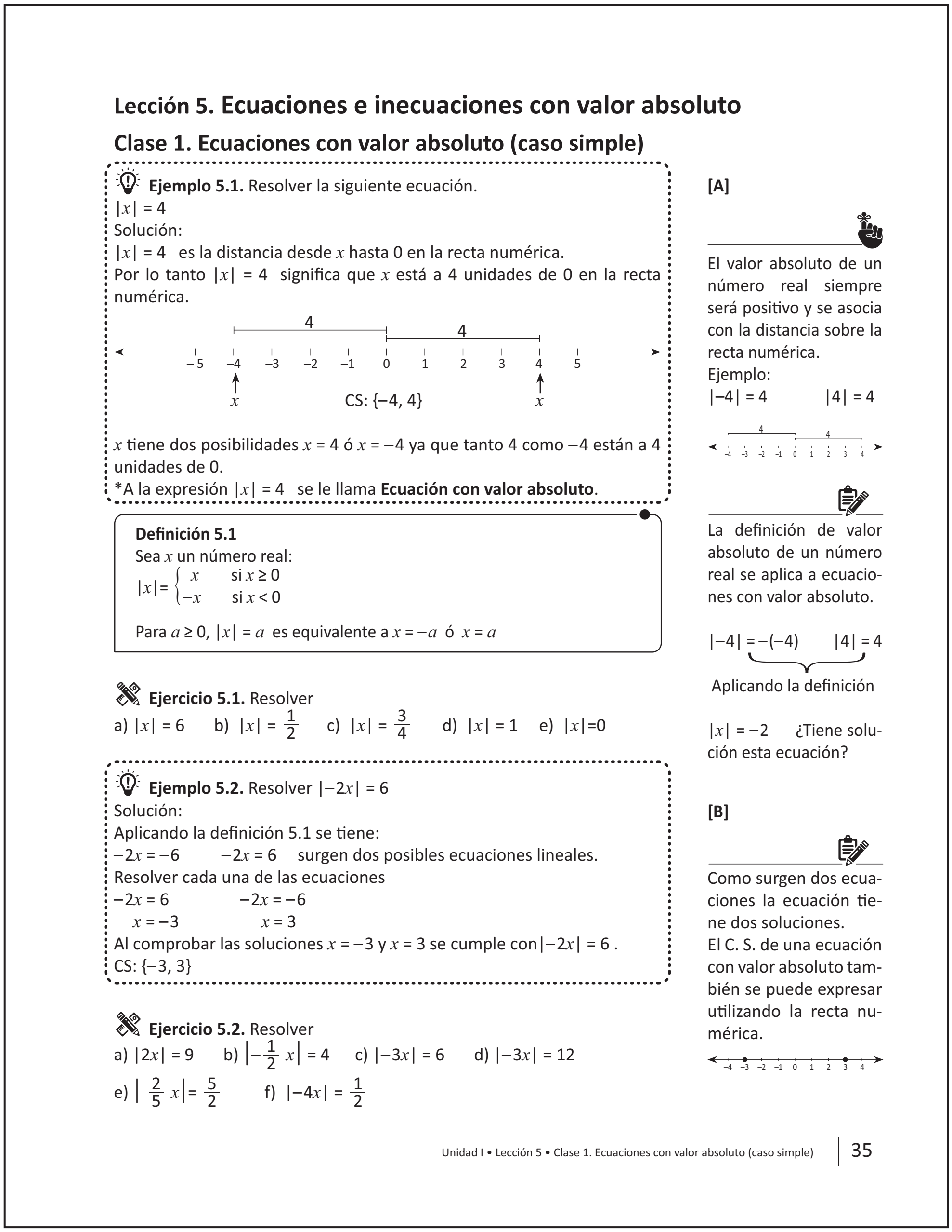
Objetivo: **[A]** Resuelven ecuaciones sencillas con valor absoluto.
[B] Resolver ecuaciones lineales con valor absoluto aplicando la definición de valor absoluto.

Unidad I. Lección 5.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: Ejercicio 5.1



Lección 5. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Clase 1. Ecuaciones con valor absoluto (caso simple)

Ejemplo 5.1. Resolver la siguiente ecuación.
$|x| = 4$
Solución:
$|x| = 4$ es la distancia desde x hasta 0 en la recta numérica.
Por lo tanto $|x| = 4$ significa que x está a 4 unidades de 0 en la recta numérica.

CS: $\{-4, 4\}$

x tiene dos posibilidades $x = 4$ ó $x = -4$ ya que tanto 4 como -4 están a 4 unidades de 0.
*A la expresión $|x| = 4$ se le llama **Ecuación con valor absoluto**.

Definición 5.1
Sea x un número real:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para $a \geq 0$, $|x| = a$ es equivalente a $x = -a$ ó $x = a$

Ejercicio 5.1. Resolver
a) $|x| = 6$ b) $|x| = \frac{1}{2}$ c) $|x| = \frac{3}{4}$ d) $|x| = 1$ e) $|x|=0$

Ejemplo 5.2. Resolver $|-2x| = 6$
Solución:
Aplicando la definición 5.1 se tiene:
$-2x = -6$ $-2x = 6$ surgen dos posibles ecuaciones lineales.
Resolver cada una de las ecuaciones
$-2x = 6$ $-2x = -6$
$x = -3$ $x = 3$
Al comprobar las soluciones $x = -3$ y $x = 3$ se cumple con $|-2x| = 6$.
CS: $\{-3, 3\}$

Ejercicio 5.2. Resolver
a) $|2x| = 9$ b) $\left|-\frac{1}{2}x\right| = 4$ c) $|-3x| = 6$ d) $|-3x| = 12$
e) $\left|\frac{2}{5}x\right| = \frac{5}{2}$ f) $|-4x| = \frac{1}{2}$

[A]

El valor absoluto de un número real siempre será positivo y se asocia con la distancia sobre la recta numérica.
Ejemplo:
$|-4| = 4$ $|4| = 4$

La definición de valor absoluto de un número real se aplica a ecuaciones con valor absoluto.

$$\underbrace{|-4| = -(-4) \qquad |4| = 4}_{\text{Aplicando la definición}}$$

$|x| = -2$ ¿Tiene solución esta ecuación?

[B]

Como surgen dos ecuaciones la ecuación tiene dos soluciones.
El C. S. de una ecuación con valor absoluto también se puede expresar utilizando la recta numérica.

Unidad I • Lección 5 • Clase 1. Ecuaciones con valor absoluto (caso simple) | 35

[A] Ecuaciones con valor absoluto caso simple.

Ejemplo 5.1

(10 min) *Hacer un repaso de la definición de valor absoluto aprendida en los años anteriores
M: ¿Cuál es el valor absoluto de 4?
RP: 4
M: ¿Cuál es el valor absoluto de −4?
RP: 4
¿Porque el valor absoluto de 4 y −4 es 4?
Concluye: el valor absoluto es siempre positivo porque es distancia de cero al número en la recta numérica.
M: Si se tiene $|x| = 4$ ¿qué valor debe tomar x para que se cumpla la igualdad?
RP: 4 ó −4
Concluye: a la expresión $|x| = 4$ se le llama ecuación con valor absoluto.
Concluye Definición 5.1

Ejercicio 5.1

(6 min) Solución
a) 6, −6 b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$ d) 1, −1 e) 0

Ejercicio 5.2. (14 min) Solución

a) CS: $\{\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\}$ b) CS: {8, −8}
c) CS: {2, −2} d) CS: {4, −4}
e) CS: $\{\frac{25}{4}, -\frac{25}{4}\}$ f) CS: $\{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\}$

*Es importante que el estudiante tenga en cuenta que al aplicar la definicion de valor absoluto se generan dos ecuaciones lineales, ya que es muy probable que algunos estudiantes no consideren el valor absoluto y la resuelvan como una simple ecuacion lineal.

[B] Resolver ecuaciones con valor absoluto aplicando transposición de términos en casos sencillos.

Unidad I. Lección 5.

Clase 1

(Continuación)

Clase 2 y 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[C]** Resolver ecuaciones con valor absoluto aplicando las propiedades de la igualdad.

Evaluación: [C] Ejercicio 5.3

Objetivo: Resuelven ecuaciones lineales complejas con valor absoluto.

Evaluación: Ejercicio 5.4

[C] Resolver ecuaciones con valor absoluto aplicando transposición de términos

(7 min)

* Aplicar el proceso de inducción similar que en [B]

Ejercicio 5.3

(8 min) Solución

a) CS: {1, 7}

b) CS: {6, 10}

c) CS: $\{-\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\}$

d) CS: $\{-\frac{35}{4}, -\frac{5}{4}\}$

e) CS: {1, 9}

f) CS: $\{-1, \frac{7}{3}\}$

g) CS: $\{0, \frac{4}{7}\}$

h) CS: $\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\}$

Tratar de resolver en casa por si el tiempo no es suficiente asignar de tarea.

[Hasta aquí Clase 1]

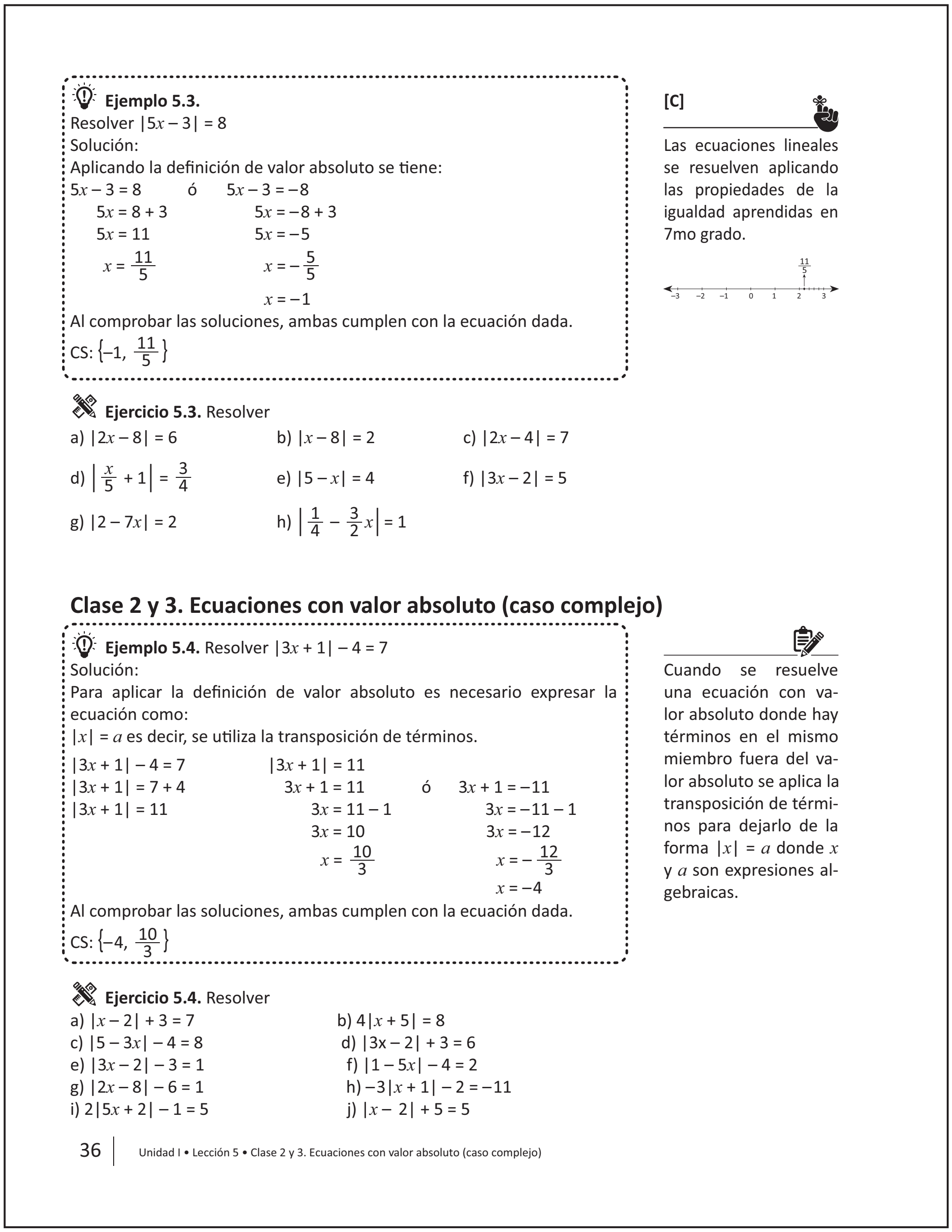
[Desde aquí Clase 2]

[A] (20 min)

Ejemplo 5.4

*Presentar el ejercicio en la pizarra y pedirles a los estudiantes que intenten resolverlo.

*Es importante que el estudiante note que antes de resolver la ecuación debe escribirla de la forma $|x| = a$ para luego aplicar la definición de valor absoluto.



Ejemplo 5.3.

Resolver $|5x - 3| = 8$

Solución:

Aplicando la definición de valor absoluto se tiene:

$5x - 3 = 8$ ó $5x - 3 = -8$

$5x = 8 + 3$ $5x = -8 + 3$

$5x = 11$ $5x = -5$

$x = \frac{11}{5}$ $x = -\frac{5}{5}$

$x = -1$

Al comprobar las soluciones, ambas cumplen con la ecuación dada.

CS: $\left\{-1, \frac{11}{5}\right\}$

[C]

Las ecuaciones lineales se resuelven aplicando las propiedades de la igualdad aprendidas en 7mo grado.

Ejercicio 5.3. Resolver

a) $|2x - 8| = 6$

b) $|x - 8| = 2$

c) $|2x - 4| = 7$

d) $\left|\frac{x}{5} + 1\right| = \frac{3}{4}$

e) $|5 - x| = 4$

f) $|3x - 2| = 5$

g) $|2 - 7x| = 2$

h) $\left|\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x\right| = 1$

Clase 2 y 3. Ecuaciones con valor absoluto (caso complejo)

Ejemplo 5.4. Resolver $|3x + 1| - 4 = 7$

Solución:

Para aplicar la definición de valor absoluto es necesario expresar la ecuación como:

$|x| = a$ es decir, se utiliza la transposición de términos.

$|3x + 1| - 4 = 7$ $|3x + 1| = 11$

$|3x + 1| = 7 + 4$ $3x + 1 = 11$ ó $3x + 1 = -11$

$|3x + 1| = 11$ $3x = 11 - 1$ $3x = -11 - 1$

$3x = 10$ $3x = -12$

$x = \frac{10}{3}$ $x = -\frac{12}{3}$

$x = -4$

Al comprobar las soluciones, ambas cumplen con la ecuación dada.

CS: $\left\{-4, \frac{10}{3}\right\}$

Cuando se resuelve una ecuación con valor absoluto donde hay términos en el mismo miembro fuera del valor absoluto se aplica la transposición de términos para dejarlo de la forma $|x| = a$ donde x y a son expresiones algebraicas.

Ejercicio 5.4. Resolver

a) $|x - 2| + 3 = 7$

b) $4|x + 5| = 8$

c) $|5 - 3x| - 4 = 8$

d) $|3x - 2| + 3 = 6$

e) $|3x - 2| - 3 = 1$

f) $|1 - 5x| - 4 = 2$

g) $|2x - 8| - 6 = 1$

h) $-3|x + 1| - 2 = -11$

i) $2|5x + 2| - 1 = 5$

j) $|x - 2| + 5 = 5$

36 | Unidad I • Lección 5 • Clase 2 y 3. Ecuaciones con valor absoluto (caso complejo)

M: ¿En la ecuación dada podemos aplicar la definición de valor absoluto?

RP: no por que debe estar de la forma $|x| = a$

M: ¿Qué se puede hacer para escribirlo de esa manera?

RP: pasar –4 al otro lado de la igualdad y hacer la operación.

Ejercicio 5.4

(25 min) Solución véase la página 64.

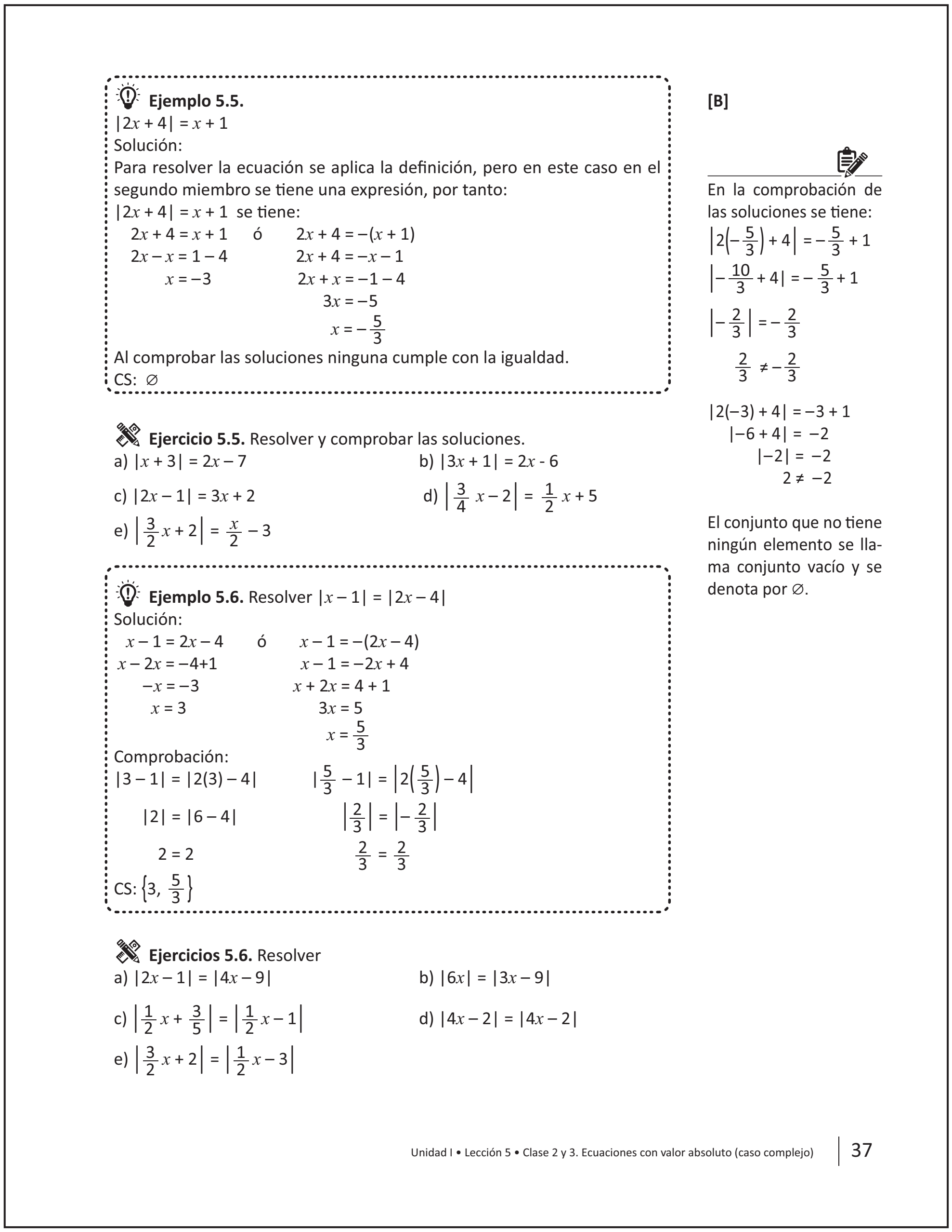
[Hasta aquí Clase 2]

Objetivo: **[B]** Resuelven ecuaciones con valor absoluto donde el segundo miembro es una expresión algebraica.

Clase 2 y 3

(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 5.5, 5.6



Ejemplo 5.5.

$|2x + 4| = x + 1$

Solución:

Para resolver la ecuación se aplica la definición, pero en este caso en el segundo miembro se tiene una expresión, por tanto:

$|2x + 4| = x + 1$ se tiene:

$2x + 4 = x + 1$ ó $2x + 4 = -(x + 1)$

$2x - x = 1 - 4$ $\quad$ $2x + 4 = -x - 1$

$x = -3$ $\quad$ $2x + x = -1 - 4$

$3x = -5$

$x = -\frac{5}{3}$

Al comprobar las soluciones ninguna cumple con la igualdad.

CS: $\varnothing$

[B]

En la comprobación de las soluciones se tiene:

$\left|2\left(-\frac{5}{3}\right) + 4\right| = -\frac{5}{3} + 1$

$\left|-\frac{10}{3} + 4\right| = -\frac{5}{3} + 1$

$\left|-\frac{2}{3}\right| = -\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \neq -\frac{2}{3}$

$|2(-3) + 4| = -3 + 1$

$|-6 + 4| = -2$

$|-2| = -2$

$2 \neq -2$

El conjunto que no tiene ningún elemento se llama conjunto vacío y se denota por $\varnothing$.

Ejercicio 5.5. Resolver y comprobar las soluciones.

a) $|x + 3| = 2x - 7$ $\quad$ b) $|3x + 1| = 2x - 6$

c) $|2x - 1| = 3x + 2$ $\quad$ d) $\left|\frac{3}{4}x - 2\right| = \frac{1}{2}x + 5$

e) $\left|\frac{3}{2}x + 2\right| = \frac{x}{2} - 3$

Ejemplo 5.6. Resolver $|x - 1| = |2x - 4|$

Solución:

$x - 1 = 2x - 4$ ó $x - 1 = -(2x - 4)$

$x - 2x = -4+1$ $\quad$ $x - 1 = -2x + 4$

$-x = -3$ $\quad$ $x + 2x = 4 + 1$

$x = 3$ $\quad$ $3x = 5$

$x = \frac{5}{3}$

Comprobación:

$|3 - 1| = |2(3) - 4|$ $\quad$ $\left|\frac{5}{3} - 1\right| = \left|2\left(\frac{5}{3}\right) - 4\right|$

$|2| = |6 - 4|$ $\quad$ $\left|\frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{2}{3}\right|$

$2 = 2$ $\quad$ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

CS: $\left\{3, \frac{5}{3}\right\}$

Ejercicios 5.6. Resolver

a) $|2x - 1| = |4x - 9|$ $\quad$ b) $|6x| = |3x - 9|$

c) $\left|\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$ $\quad$ d) $|4x - 2| = |4x - 2|$

e) $\left|\frac{3}{2}x + 2\right| = \left|\frac{1}{2}x - 3\right|$

[Desde aquí Clase 3]

[B] (10 min)

Ejemplo 5.5

*Presentar en la pizarra la ecuación y pedir a los estudiantes que la resuelvan.

M: ¿Cuál es la diferencia de esta ecuación con las resueltas anteriormente?

RP: hay una expresión algebraica en el segundo miembro.

¿Al aplicar la definición de valor absoluto que ecuaciones se obtienen?

RP: $2x + 4 = x + 1$ ó

$2x + 4 = -(x + 1)$

¿Cuáles son las posibles soluciones?

RP: -3 y $-\frac{5}{3}$

Al comprobar las soluciones en la ecuación original que podemos concluir.

RP: No son soluciones por que no satisfacen la igualdad.

Ejercicio 5.5

(15 min) Solución

a) CS: $\{10\}$ $\quad$ b) CS: $\varnothing$

c) CS: $\{-\frac{1}{5}\}$

d) CS: $\{28, -\frac{12}{5}\}$

e) CS: $\varnothing$

Ejemplo 5.6

(10 min)

*Seguir el mismo proceso de inducción que en el anterior.

*Hacer que los estudiantes noten que si hay barras de valor absoluto en ambos lados de la igualdad de la misma manera se aplica la definición.

Ejercicio 5.6. (10 min) Soluciones

a) CS: $\{4, \frac{5}{3}\}$ $\quad$ b) CS: $\{1, -3\}$

c) CS: $\{\frac{2}{5}\}$ $\quad$ d) CS: $\mathbb{R}$

e) CS: $\{\frac{1}{2}, -5\}$

Unidad I. Lección 5.

Clase 4

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Resuelven inecuaciones sencillas con valor absoluto.
[B] Aplican las propiedades en la resolución de inecuaciones lineales.

Evaluación: Ejercicio 5.7

[A] Inecuaciones con valor absoluto caso simple

(10 min)

Ejemplo 5.7

M: Si se tiene $|3x - 4| \leq 5$ ¿Cómo se puede resolver la inecuación?

RP: De forma similar que una ecuación lineal aplicando la definición de valor absoluto

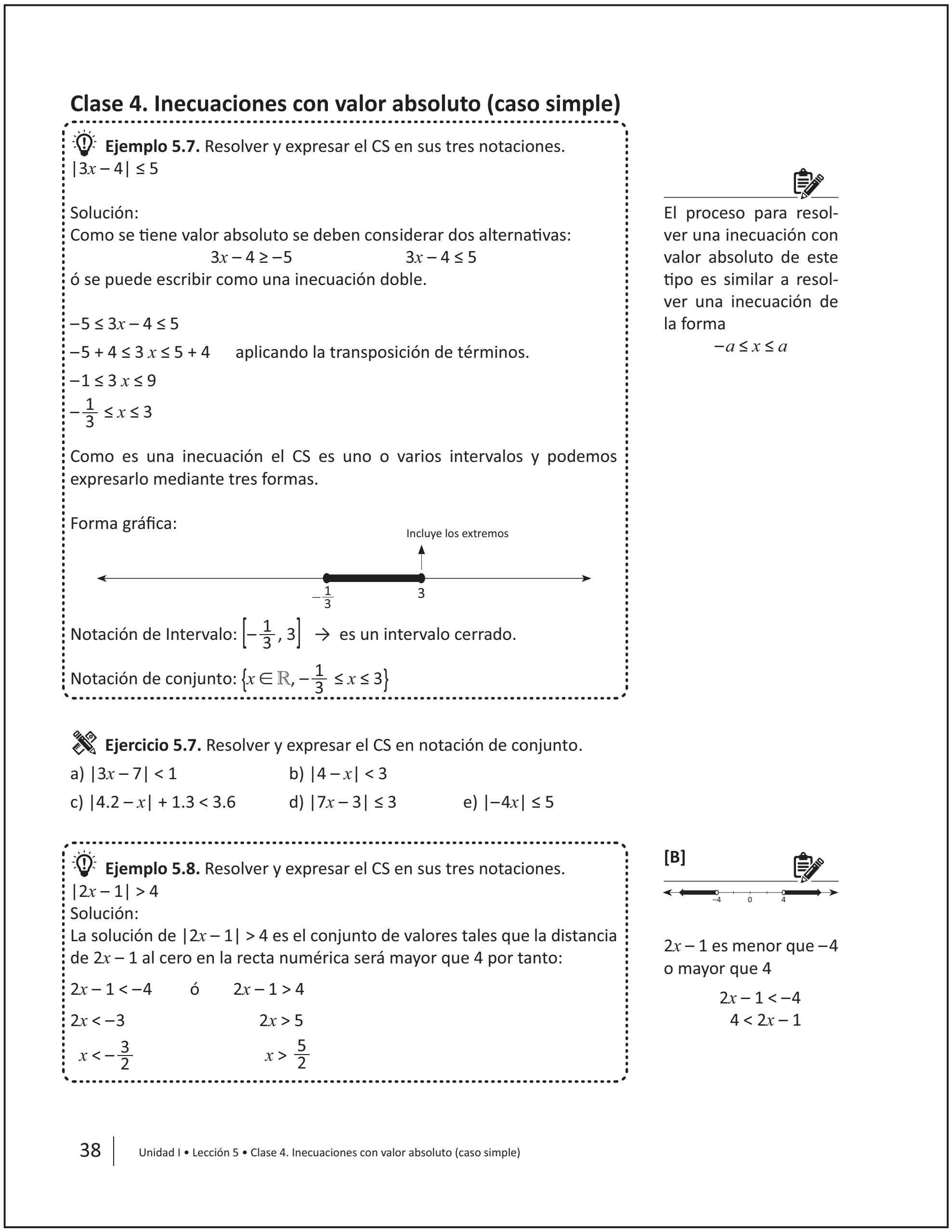
¿Qué valores puede tomar x para que se cumpla la igualdad?

RP: Varios ya que son todos los números que están el intervalo $[-\frac{1}{3}, 3]$

Concluye: a la expresión $|3x - 4| \leq 5$ se le llama inecuación con valor absoluto.

Concluye: La solución de una inecuación lineal puede ser uno o más intervalos, ya que los valores que puede tomar las variables son todos los números que satisfacen la inecuación y esta puede ser expresada mediante las notaciones gráfica, intervalo y de conjunto.

Concluye: una inecuación de la forma $|x| < a$ se tiene $-a < x < a$



Clase 4. Inecuaciones con valor absoluto (caso simple)

Ejemplo 5.7. Resolver y expresar el CS en sus tres notaciones.
$|3x - 4| \leq 5$

Solución:
Como se tiene valor absoluto se deben considerar dos alternativas:

$$3x - 4 \geq -5 \qquad 3x - 4 \leq 5$$

ó se puede escribir como una inecuación doble.

$-5 \leq 3x - 4 \leq 5$

$-5 + 4 \leq 3\,x \leq 5 + 4$ aplicando la transposición de términos.

$-1 \leq 3\,x \leq 9$

$-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

Como es una inecuación el CS es uno o varios intervalos y podemos expresarlo mediante tres formas.

Forma gráfica:

Incluye los extremos

$-\frac{1}{3}$ 3

Notación de Intervalo: $\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$ → es un intervalo cerrado.

Notación de conjunto: $\left\{x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{3} \leq x \leq 3\right\}$

El proceso para resolver una inecuación con valor absoluto de este tipo es similar a resolver una inecuación de la forma

$$-a \leq x \leq a$$

Ejercicio 5.7. Resolver y expresar el CS en notación de conjunto.

a) $|3x - 7| < 1$
b) $|4 - x| < 3$
c) $|4.2 - x| + 1.3 < 3.6$
d) $|7x - 3| \leq 3$
e) $|-4x| \leq 5$

Ejemplo 5.8. Resolver y expresar el CS en sus tres notaciones.
$|2x - 1| > 4$
Solución:
La solución de $|2x - 1| > 4$ es el conjunto de valores tales que la distancia de $2x - 1$ al cero en la recta numérica será mayor que 4 por tanto:

$2x - 1 < -4$ ó $2x - 1 > 4$

$2x < -3$ $\qquad$ $2x > 5$

$x < -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $x > \frac{5}{2}$

[B]

−4 0 4

$2x - 1$ es menor que -4 o mayor que 4

$2x - 1 < -4$
$4 < 2x - 1$

38 | Unidad I • Lección 5 • Clase 4. Inecuaciones con valor absoluto (caso simple)

Ejercicio 5.7

(15 min) Solución

a) CS: $\{x \in \mathbb{R},\ 2 < x < \frac{8}{3}\}$

b) CS: $\{x \in \mathbb{R}, 1 < x < 7\}$

c) CS: $\{x \in \mathbb{R}, 1.9 < x < 6.5\}$

d) CS: $\{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \frac{6}{7}\}$

e) CS: $\{x \in \mathbb{R}, -\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\}$

[B] Inecuación con valor absoluto caso $|x| > a$

*Presentar el ejercicio en la pizarra y pedir a los estudiantes que intenten resolverlo, hacer el proceso de inducción similar que en [A].
(10 min)

Objetivo: **[A]** Resuelven inecuaciones lineales complejas con valor absoluto.

Evaluación: Ejercicio 5.10

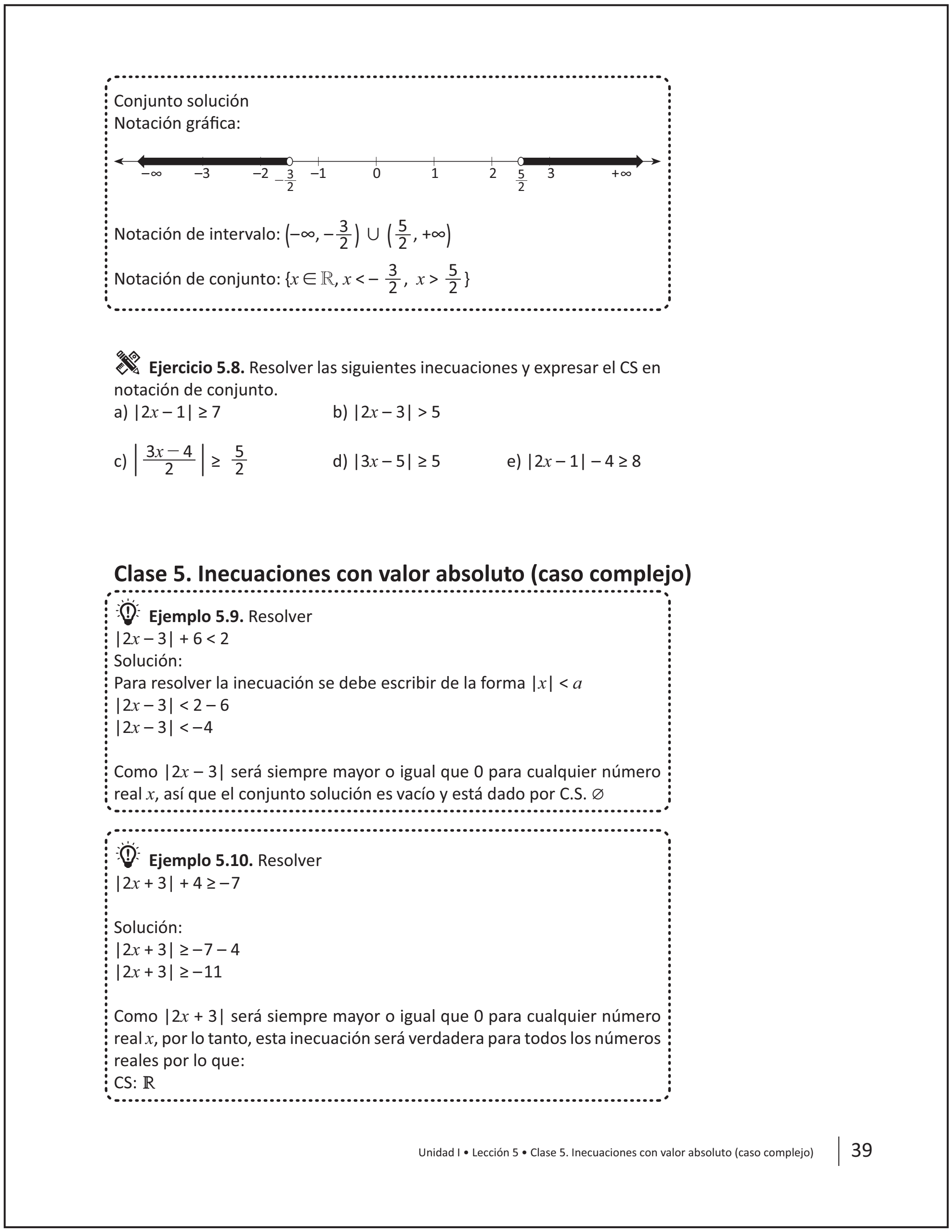
Unidad I. Lección 5.

Clase 4

(Continuación)

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)



Conjunto solución
Notación gráfica:

Notación de intervalo: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Notación de conjunto: $\{x \in \mathbb{R}, x < -\frac{3}{2},\ x > \frac{5}{2}\}$

Ejercicio 5.8. Resolver las siguientes inecuaciones y expresar el CS en notación de conjunto.

a) $|2x - 1| \geq 7$ b) $|2x - 3| > 5$

c) $\left|\frac{3x-4}{2}\right| \geq \frac{5}{2}$ d) $|3x - 5| \geq 5$ e) $|2x - 1| - 4 \geq 8$

Clase 5. Inecuaciones con valor absoluto (caso complejo)

Ejemplo 5.9. Resolver
$|2x - 3| + 6 < 2$
Solución:
Para resolver la inecuación se debe escribir de la forma $|x| < a$
$|2x - 3| < 2 - 6$
$|2x - 3| < -4$

Como $|2x - 3|$ será siempre mayor o igual que 0 para cualquier número real x, así que el conjunto solución es vacío y está dado por C.S. $\varnothing$

Ejemplo 5.10. Resolver
$|2x + 3| + 4 \geq -7$

Solución:
$|2x + 3| \geq -7 - 4$
$|2x + 3| \geq -11$

Como $|2x + 3|$ será siempre mayor o igual que 0 para cualquier número real x, por lo tanto, esta inecuación será verdadera para todos los números reales por lo que:
CS: $\mathbb{R}$

Unidad I • Lección 5 • Clase 5. Inecuaciones con valor absoluto (caso complejo) | 39

Concluye que las ecuaciones resultantes al quitar las barras de valor absoluto se consideran $2x - 1 < -4$ y $2x - 1 > 4$ por lo que es diferente al caso anterior.
*Presentar la solución de la inecuación en sus tres notaciones.
Concluye que si se tiene $|x| > a$ con $a > 0$ entonces se puede expresar $x < -a$ ó $x > a$.

Ejercicio 5.8

(10 min) Soluciones
Nota: Se omite la notación gráfica y de intervalo.
a) CS: $\{x \in \mathbb{R}, x \leq -3, x \geq 4\}$
b) CS: $\{x \in \mathbb{R}, x < -1, x > 4\}$
c) CS: $\{x \in \mathbb{R}, x \leq -\frac{1}{3}, x \geq 3\}$
d) CS: $\{x \in \mathbb{R}, x \leq 0, x \geq \frac{10}{3}\}$
e) CS: $\{x \in \mathbb{R}, x \leq -\frac{11}{2}, x \geq \frac{13}{2}\}$
Tratar de resolver en casa por si el tiempo no es suficiente asignar de tarea.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

[A] (10 min)

Ejemplo 5.9

*Presentar el ejercicio en la pizarra y pedirles a los estudiantes que intenten resolverlo.
*Es importante que el estudiante note que antes de resolver la ecuación debe escribirla de la forma $|x| < a$ para luego aplicar la propiedad.
M: ¿En la inecuación dada podemos aplicar la propiedad?
RP: No porque debe estar de la forma $|x| < a$
M: ¿Qué se puede hacer para escribirlo de esa manera?
RP: pasar 6 al otro lado de la igualdad y hacer la operación.

*Resuelven la inecuación resultante y expresar sus soluciones mediante conjunto vacío ($\varnothing$).

Ejemplo 5.10. (10 min)

Hacer el proceso de inducción similar que en el Ejemplo 5.9.

Clase 5
(Continuación)

Objetivo: **[A]** Resuelven inecuaciones lineales complejas con valor absoluto.

Evaluación: Ejercicio 5.9

Ejemplo 5.11
(10 min)

Presentar el ejercicio en la pizarra y pedir a los estudiantes que intenten resolverlo, hacer el proceso de inducción similar al Ejemplo 5.10

*En este ejemplo es importante que los estudiantes noten que cuando una inecuación con valor absoluto es mayor que cero solo se tiene una ecuación lineal al quitar las barras de valor absoluto.

*Analizar las soluciones de ambas ecuaciones

Ejercicio 5.9
(15 min)

Soluciones:

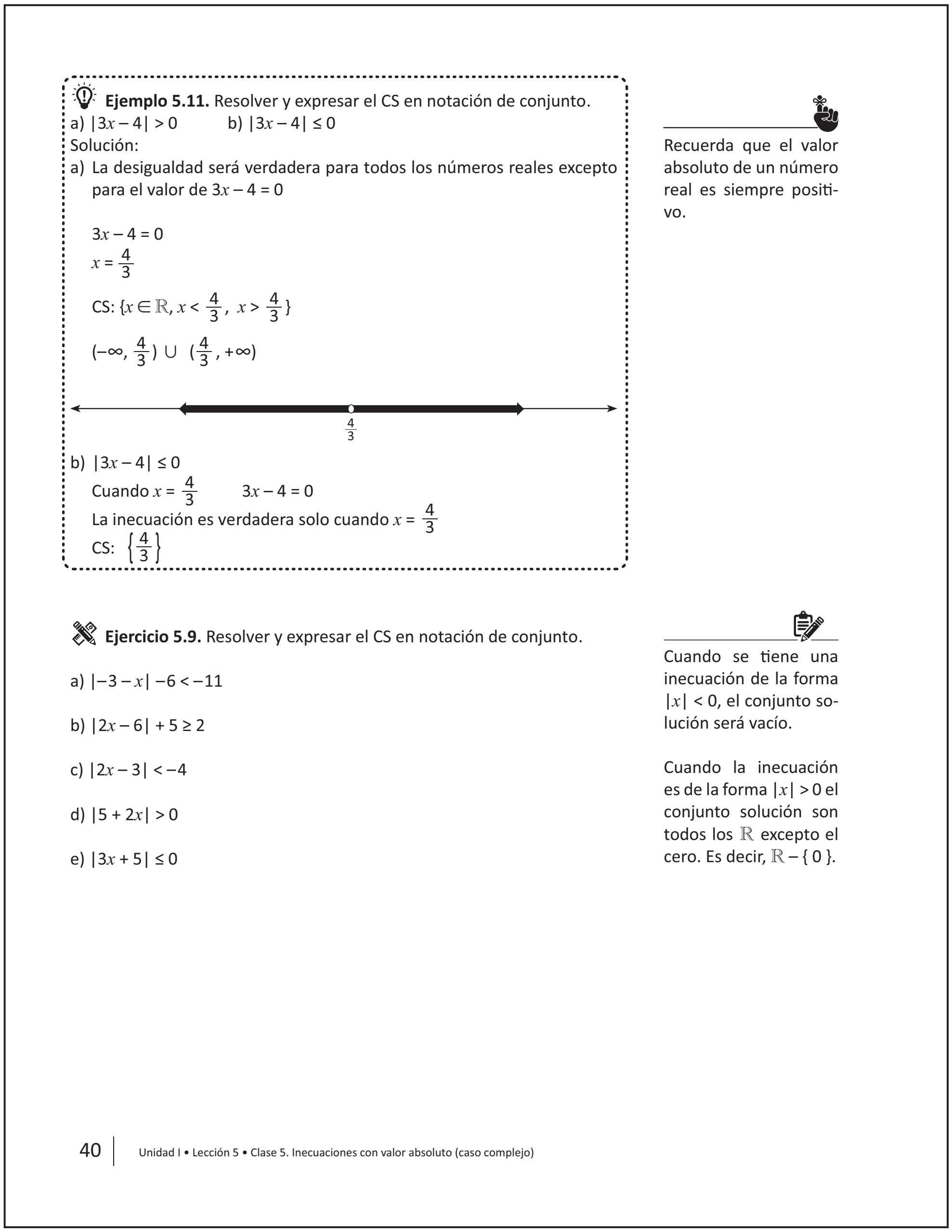
a) CS: $\varnothing$

b) CS: $\mathbb{R}$

c) CS: $\varnothing$

d) CS: $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$

e) CS: $\{-\frac{5}{3}\}$



Ejemplo 5.11. Resolver y expresar el CS en notación de conjunto.

a) $|3x - 4| > 0$ b) $|3x - 4| \leq 0$

Solución:

a) La desigualdad será verdadera para todos los números reales excepto para el valor de $3x - 4 = 0$

$3x - 4 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

CS: $\{x \in \mathbb{R}, x < \frac{4}{3},\ x > \frac{4}{3}\}$

$(-\infty, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$

b) $|3x - 4| \leq 0$

Cuando $x = \frac{4}{3}$ $3x - 4 = 0$

La inecuación es verdadera solo cuando $x = \frac{4}{3}$

CS: $\left\{\frac{4}{3}\right\}$

Recuerda que el valor absoluto de un número real es siempre positivo.

Ejercicio 5.9. Resolver y expresar el CS en notación de conjunto.

a) $|-3 - x| - 6 < -11$

b) $|2x - 6| + 5 \geq 2$

c) $|2x - 3| < -4$

d) $|5 + 2x| > 0$

e) $|3x + 5| \leq 0$

Cuando se tiene una inecuación de la forma $|x| < 0$, el conjunto solución será vacío.

Cuando la inecuación es de la forma $|x| > 0$ el conjunto solución son todos los $\mathbb{R}$ excepto el cero. Es decir, $\mathbb{R} - \{0\}$.

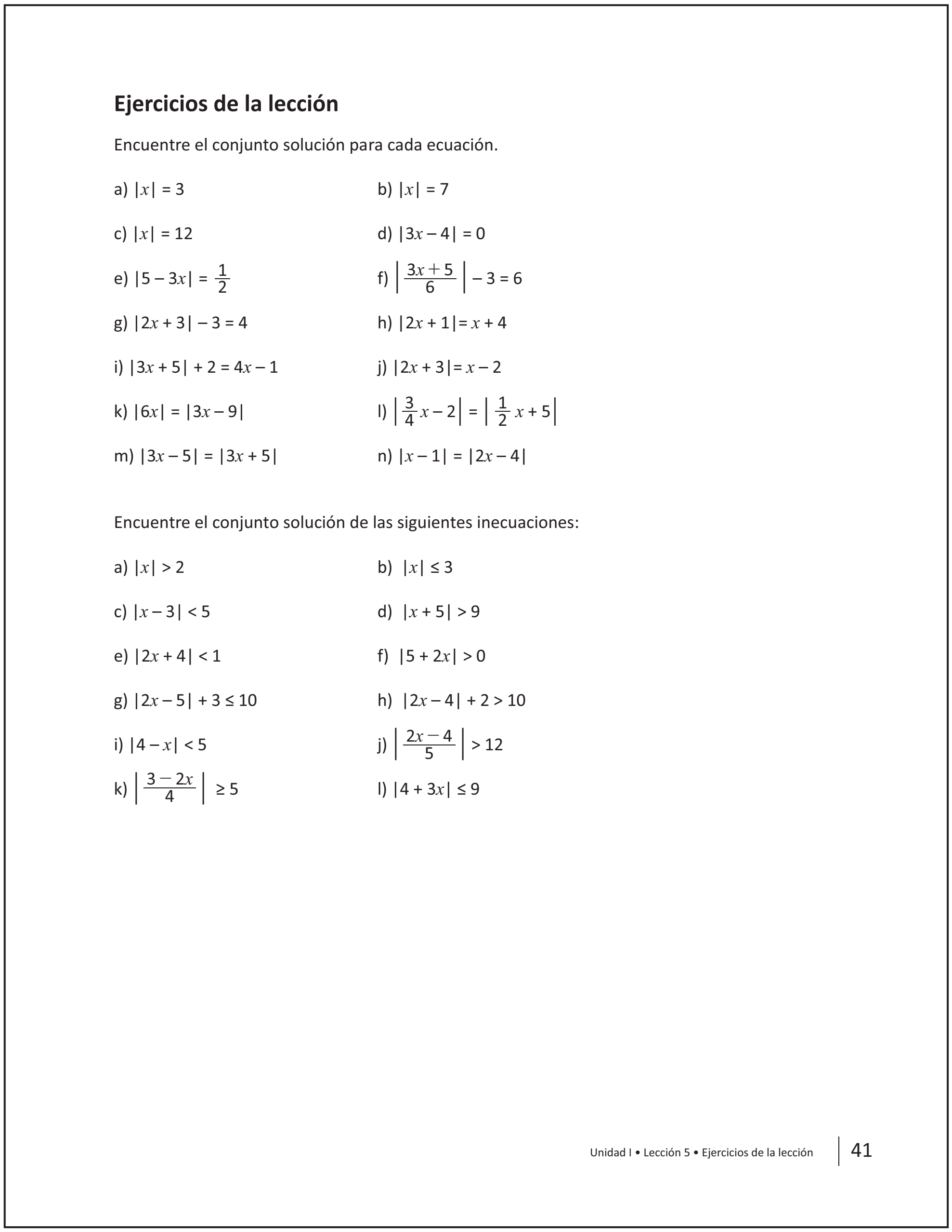
Objetivo: Resuelven inecuaciones de grado mayor que dos aplicando lo aprendido en clase 1 y 2.

Evaluación: Ejercicio de la lección.

Unidad I. Lección 5.

Ejercicios de la Lección

Soluciones



Ejercicios de la lección

Encuentre el conjunto solución para cada ecuación.

a) $|x| = 3$
b) $|x| = 7$
c) $|x| = 12$
d) $|3x - 4| = 0$
e) $|5 - 3x| = \frac{1}{2}$
f) $\left|\frac{3x+5}{6}\right| - 3 = 6$
g) $|2x + 3| - 3 = 4$
h) $|2x + 1| = x + 4$
i) $|3x + 5| + 2 = 4x - 1$
j) $|2x + 3| = x - 2$
k) $|6x| = |3x - 9|$
l) $\left|\frac{3}{4}x - 2\right| = \left|\frac{1}{2}x + 5\right|$
m) $|3x - 5| = |3x + 5|$
n) $|x - 1| = |2x - 4|$

Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $|x| > 2$
b) $|x| \leq 3$
c) $|x - 3| < 5$
d) $|x + 5| > 9$
e) $|2x + 4| < 1$
f) $|5 + 2x| > 0$
g) $|2x - 5| + 3 \leq 10$
h) $|2x - 4| + 2 > 10$
i) $|4 - x| < 5$
j) $\left|\frac{2x-4}{5}\right| > 12$
k) $\left|\frac{3-2x}{4}\right| \geq 5$
l) $|4 + 3x| \leq 9$

Unidad I • Lección 5 • Ejercicios de la lección | 41

Soluciones:
a) CS: $\{3, -3\}$
b) CS: $\{7, -7\}$
c) CS: $\{12, -12\}$
d) CS: $\{\frac{4}{3}\}$
e) CS: $\{\frac{3}{2}, \frac{11}{6}\}$
f) CS: $\{\frac{49}{3}, -\frac{59}{3}\}$
g) CS: $\{2, -5\}$
h) CS: $\{-\frac{5}{3}, 3\}$
i) CS: $\{8\}$
j) CS: $\varnothing$
k) CS: $\{-3, 1\}$
l) CS: $\{28, -\frac{12}{5}\}$
m) CS: $\{0\}$
n) CS: $\{3, \frac{5}{3}\}$

Conjunto solución de inecuaciones
a) CS: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
b) CS: $[-3, 3]$
c) CS: $(-2, 8)$
d) CS: $(-\infty, -14) \cup (4, +\infty)$
e) CS: $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$
f) CS: $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$
g) CS: $[-1, 6]$
h) CS: $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$
i) CS: $(-1, 9)$
j) CS: $(-\infty, -28) \cup (32, +\infty)$
k) CS: $(-\infty, -\frac{17}{2}] \cup [\frac{23}{2}, +\infty)$
l) CS: $[-\frac{13}{3}, \frac{5}{3}]$

Unidad I. Lección 6.

Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Deducir el comportamiento general de las funciones potencia.
[B] Analizar la gráfica de la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$

Evaluación: [A] Ejercicio 6.1, [B] Ejercicio 6.2

[A]

Ejercicio 6.1

(10 min) Solución:

a)

- Si n es par, la gráfica es una parábola. Y si n es impar el dominio y rango de la función son todos los números reales.
- Las funciones de potencia impar.
- Las funciones de potencia par.

b)

- Una recta horizontal
- 1, $f(x) = a_1 x + a_0$
- Una parábola

[B]

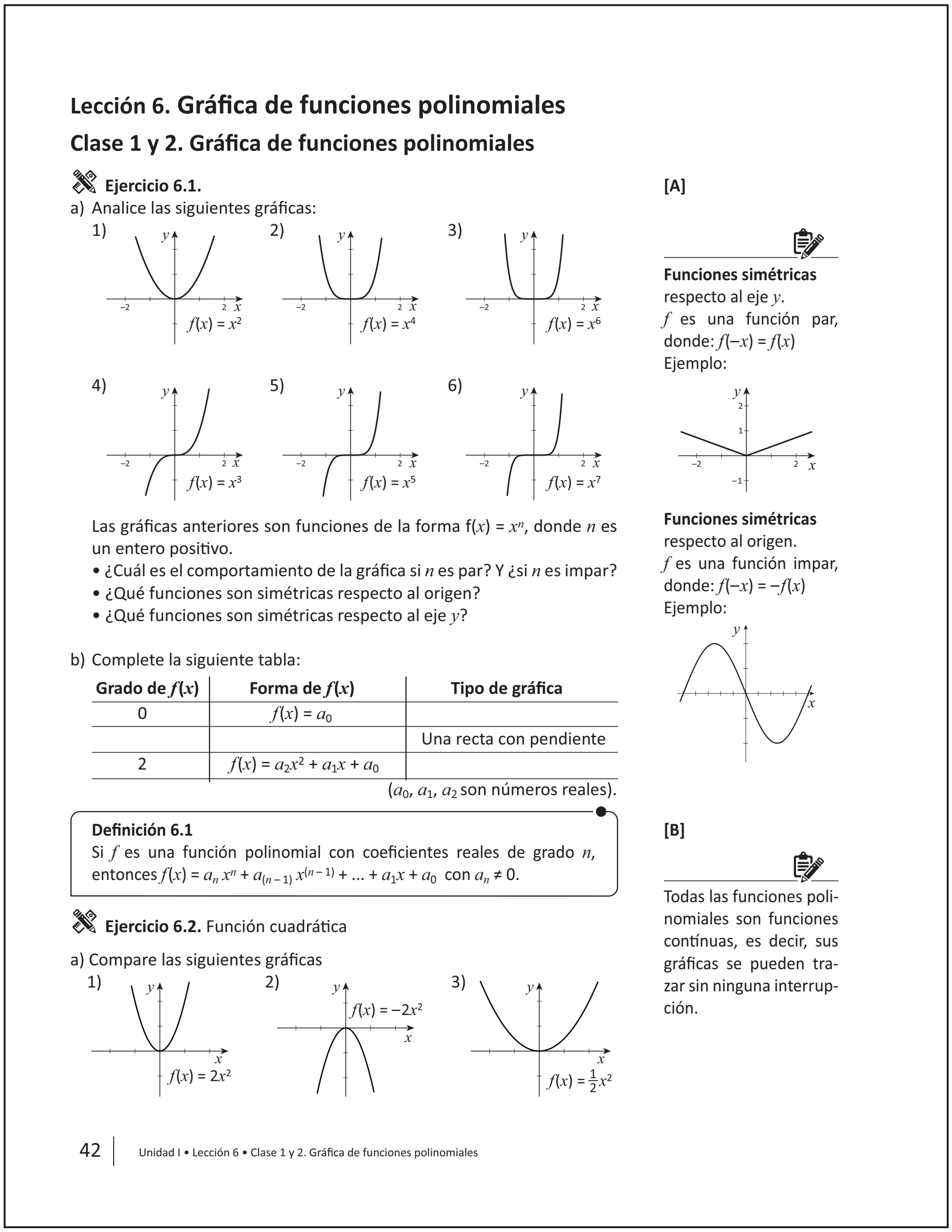
Ejercicio 6.2

(15 min) Solución:

a)

- Si el signo del coeficiente del término cuadrático es positivo, la parábola es cóncava hacia arriba, si el signo es negativo, la gráfica es cóncava hacia abajo
- Aumenta la abertura de la parábola.

* En ésta lección no se pretende profundizar en las gráficas de las funciones cuadráticas y cúbicas, más bien, lo que se trabaja son estrategias para realizar un bosquejo de gráficas polinomiales.



Lección 6. Gráfica de funciones polinomiales

Clase 1 y 2. Gráfica de funciones polinomiales

Ejercicio 6.1.

a) Analice las siguientes gráficas:

1) $f(x) = x^2$
2) $f(x) = x^4$
3) $f(x) = x^6$
4) $f(x) = x^3$
5) $f(x) = x^5$
6) $f(x) = x^7$

Las gráficas anteriores son funciones de la forma $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo.

- ¿Cuál es el comportamiento de la gráfica si n es par? Y ¿si n es impar?
- ¿Qué funciones son simétricas respecto al origen?
- ¿Qué funciones son simétricas respecto al eje y?

b) Complete la siguiente tabla:

Grado de $f(x)$	Forma de $f(x)$	Tipo de gráfica
0	$f(x) = a_0$	
		Una recta con pendiente
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	

(a_0, a_1, a_2 son números reales).

Definición 6.1
Si f es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, entonces $f(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_1x + a_0$ con $a_n \neq 0$.

Ejercicio 6.2. Función cuadrática

a) Compare las siguientes gráficas

1) $f(x) = 2x^2$
2) $f(x) = -2x^2$
3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

[A]

Funciones simétricas respecto al eje y.
f es una función par, donde: $f(-x) = f(x)$
Ejemplo:

Funciones simétricas respecto al origen.
f es una función impar, donde: $f(-x) = -f(x)$
Ejemplo:

[B]

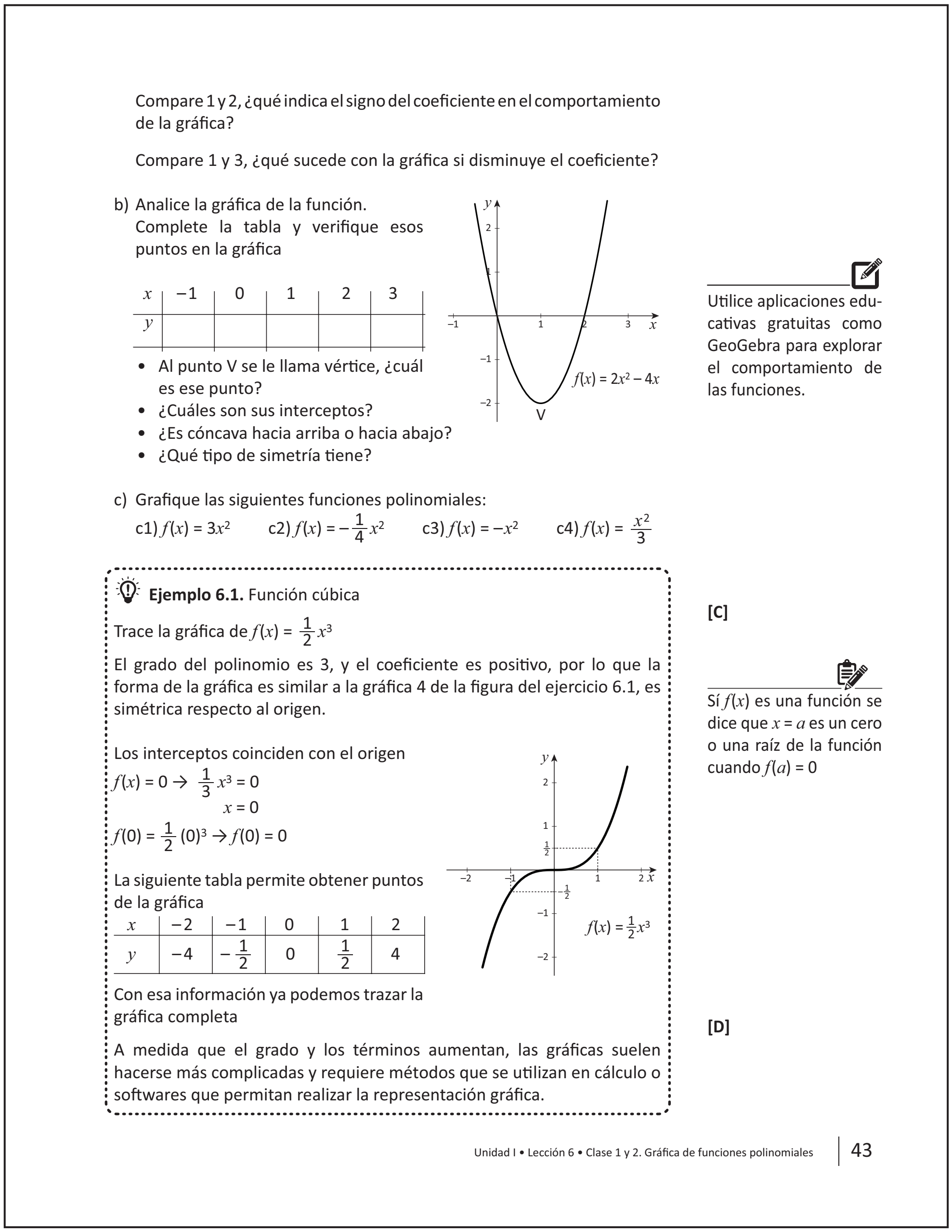
Todas las funciones polinomiales son funciones contínuas, es decir, sus gráficas se pueden trazar sin ninguna interrupción.

Objetivo: **[C]** Analizar la gráfica de la función cúbica de la forma $f(x) = ax^3$.
[D] Analizar la gráfica de las funciones polinómicas de grado mayor que dos.

Clase 1 y 2
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: Ejercicio 6.3.



Compare 1 y 2, ¿qué indica el signo del coeficiente en el comportamiento de la gráfica?

Compare 1 y 3, ¿qué sucede con la gráfica si disminuye el coeficiente?

b) Analice la gráfica de la función. Complete la tabla y verifique esos puntos en la gráfica

x	−1	0	1	2	3
y					

- Al punto V se le llama vértice, ¿cuál es ese punto?
- ¿Cuáles son sus interceptos?
- ¿Es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
- ¿Qué tipo de simetría tiene?

Utilice aplicaciones educativas gratuitas como GeoGebra para explorar el comportamiento de las funciones.

c) Grafique las siguientes funciones polinomiales:
c1) $f(x) = 3x^2$ c2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ c3) $f(x) = -x^2$ c4) $f(x) = \frac{x^2}{3}$

Ejemplo 6.1. Función cúbica

Trace la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

El grado del polinomio es 3, y el coeficiente es positivo, por lo que la forma de la gráfica es similar a la gráfica 4 de la figura del ejercicio 6.1, es simétrica respecto al origen.

Los interceptos coinciden con el origen

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^3 = 0$

$x = 0$

$f(0) = \frac{1}{2}(0)^3 \rightarrow f(0) = 0$

La siguiente tabla permite obtener puntos de la gráfica

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4

Con esa información ya podemos trazar la gráfica completa

A medida que el grado y los términos aumentan, las gráficas suelen hacerse más complicadas y requiere métodos que se utilizan en cálculo o softwares que permitan realizar la representación gráfica.

[C]

Sí $f(x)$ es una función se dice que $x = a$ es un cero o una raíz de la función cuando $f(a) = 0$

[D]

Unidad I • Lección 6 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones polinomiales 43

Solución:
b)

x	−1	0	1	2	3
y	6	0	−2	0	6

- V = (1, −2)
- (0, 0), (2, 0)
- Es cóncava hacia arriba
- Eje de simetría $x = 1$

(20 min)
c) Hacer énfasis en los pasos que se muestran para graficar la función.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

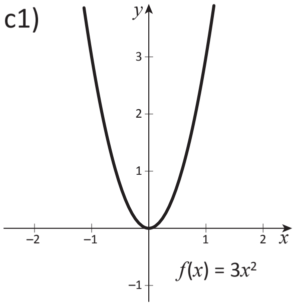
[C]

Ejemplo 6.1.
(10 min)

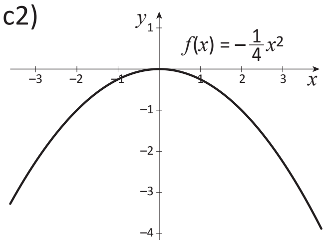
[D] (35 min)
- Hacer énfasis en las recomendaciones para graficar funciones polinomiales.

Gráficas de [B] inciso c)

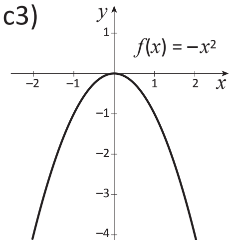
c1)



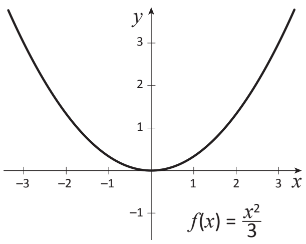
c2)



c3)



c4)



Clase 1 y 2
(Continuación)

- Los ceros o raíces del polinomio, se pueden determinar mediante la factorización, o utilizando la división sintética.

Ejemplo 6.2

- Al representar la gráfica, no se colocará graduación en el eje y, solamente se verificará la posición de la gráfica respecto al eje x.

En este momento nos valdremos del siguiente teorema y hacemos un bosquejo de la gráfica.

Teorema 6.1. Teorema del valor medio
Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$, entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ en el intervalo $[a, b]$.

Este teorema nos permite afirmar que si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distintos signos, existe al menos un cero de la función.

Recomendaciones para graficar funciones polinomiales de grado mayor que 2:
1. Observar el grado del polinomio y su coeficiente principal. Estos proporcionan información acerca de la forma general de la gráfica.
2. Encontrar los interceptos.
   En el eje x, resolviendo $f(x) = 0$ (ceros o raíces).
   En el eje y, calculando $f(0)$.
3. Determinar con la tabla de variación de signos, los intervalos donde la gráfica f está arriba del eje x o por debajo del eje x.
4. Hacer el bosquejo de la gráfica mediante una curva suave y continua.

Ejemplo 6.2.

a) Grafique $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

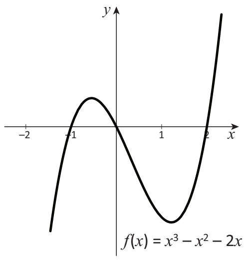
Para determinar los ceros para un polinomio de grado mayor que 2, se puede factorizar o utilizar división sintética.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x \qquad x(x+1)(x-2) = 0$$
$$= x(x^2 - x - 2) \qquad x = 0 \quad x = -1 \quad x = 2$$
$$= x(x+1)(x-2)$$

Estos valores dividen al eje x en cuatro intervalos:
$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$

- Intercepto en el eje y, $f(0) = 0^3 - 0^2 - 2(0) = 0$ entonces el punto es $(0, 0)$
- Con la tabla de variación de signos, se determina si la gráfica de la función se encuentra sobre o bajo el eje x.

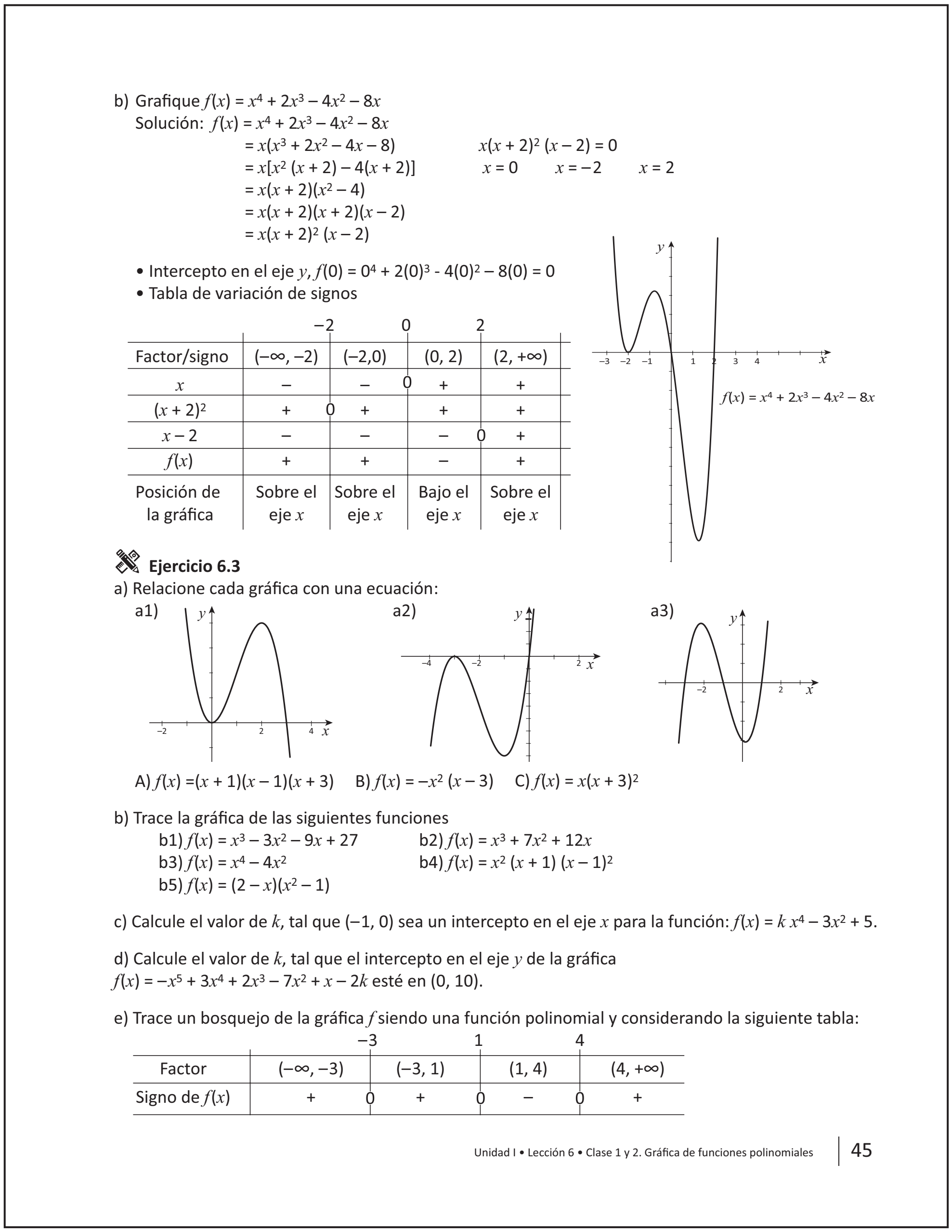
	−1	0	2	
Factor/signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	−	− 0	+	+
$x + 1$	− 0	+	+	+
$x - 2$	−	−	− 0	+
$f(x)$	−	+	−	+
Posición de la gráfica	Bajo el eje x	Sobre el eje x	Bajo el eje x	Sobre el eje x



Con la información anterior trazamos la gráfica.

44 | Unidad I • Lección 6 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones polinomiales

Clase 1 y 2
(Continuación)



b) Grafique $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

Solución: $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

$= x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$

$= x[x^2 (x + 2) - 4(x + 2)]$

$= x(x + 2)(x^2 - 4)$

$= x(x + 2)(x + 2)(x - 2)$

$= x(x + 2)^2 (x - 2)$

$x(x + 2)^2 (x - 2) = 0$

$x = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 2$

- Intercepto en el eje y, $f(0) = 0^4 + 2(0)^3 - 4(0)^2 - 8(0) = 0$
- Tabla de variación de signos

	−2	0	2	
Factor/signo	(−∞, −2)	(−2,0)	(0, 2)	(2, +∞)
x	−	− 0	+	+
$(x + 2)^2$	+ 0	+	+	+
$x - 2$	−	−	− 0	+
$f(x)$	+	+	−	+
Posición de la gráfica	Sobre el eje x	Sobre el eje x	Bajo el eje x	Sobre el eje x

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

Ejercicio 6.3

a) Relacione cada gráfica con una ecuación:

a1) a2) a3)

A) $f(x) =(x + 1)(x - 1)(x + 3)$ B) $f(x) = -x^2 (x - 3)$ C) $f(x) = x(x + 3)^2$

b) Trace la gráfica de las siguientes funciones

b1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

b2) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

b3) $f(x) = x^4 - 4x^2$

b4) $f(x) = x^2 (x + 1) (x - 1)^2$

b5) $f(x) = (2 - x)(x^2 - 1)$

c) Calcule el valor de k, tal que (−1, 0) sea un intercepto en el eje x para la función: $f(x) = k x^4 - 3x^2 + 5$.

d) Calcule el valor de k, tal que el intercepto en el eje y de la gráfica $f(x) = -x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - 2k$ esté en (0, 10).

e) Trace un bosquejo de la gráfica f siendo una función polinomial y considerando la siguiente tabla:

	−3	1	4	
Factor	(−∞, −3)	(−3, 1)	(1, 4)	(4, +∞)
Signo de $f(x)$	+ 0	+ 0	− 0	+

Unidad I • Lección 6 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones polinomiales 45

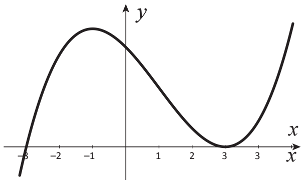
Ejercicio 6.3

Solución:

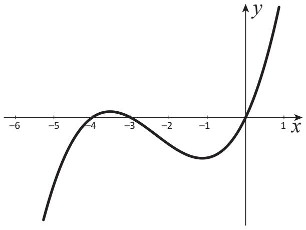
a) a1 con B, a2 con C, a3 con A

b)

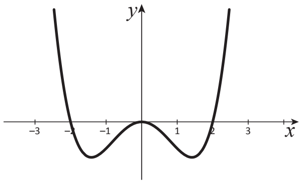
b1) $f(x) = (x + 3)(x - 3)^2$



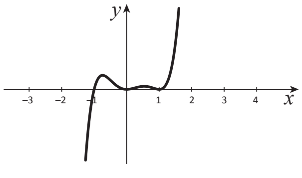
b2) $f(x) = x(x + 3)(x + 4)$



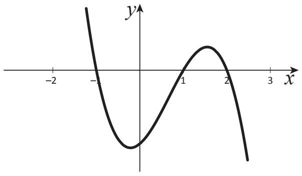
b3) $f(x) = x^2(x + 2)(x - 2)$



b4)



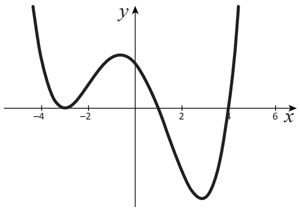
b5) $f(x) = -(x - 2)(x + 1)(x - 1)$



c) $k = -2$

d) $k = -5$

e)



Unidad I. Lección 7.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Determinar el valor numérico de una expresión algebraica racional.
[B] Simplificar una expresión algebraica racional.

Evaluación: Ejercicios 7.1 y 7.2

[A]

Ejercicio 7.1

(5 min) Solución:

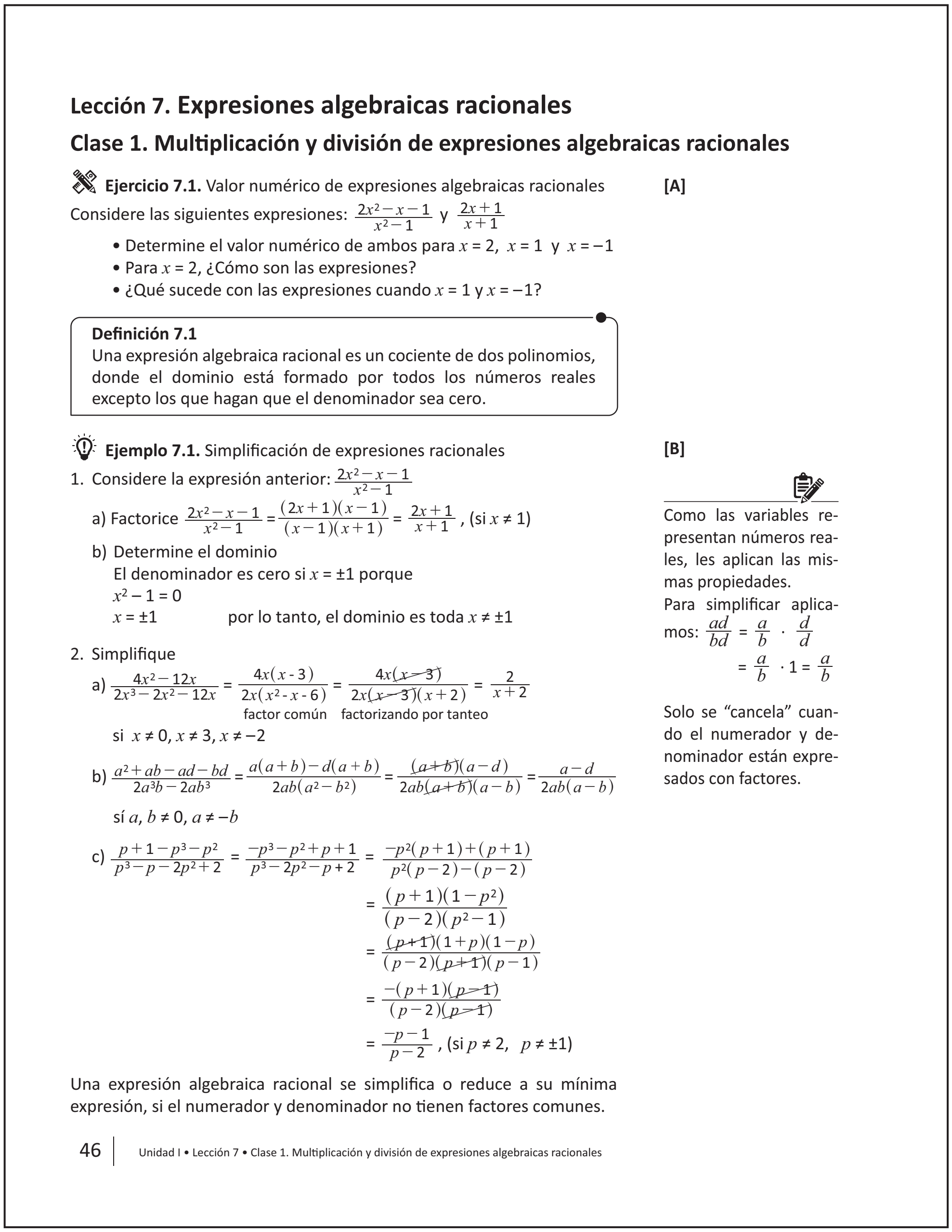
- Para $x = 2$; $\frac{5}{3}$ y $\frac{5}{3}$
- Para $x = 1$; No está definida y $\frac{3}{2}$
- Para $x = -1$; Ninguna está definida
- Son equivalentes
- Son valores que vuelven cero el denominador.

[B]

(15 min)

- Al introducir las operaciones con expresiones algebraicas racionales, se debe establecer la relación con el procedimiento que conocen para operar con fracciones.
- Deben recordar muy bien los métodos de factorización.

* Uno de los errores más comunes, es cancelar numeradores y denominadores que no están expresados en forma de factores. Incluir la explicación de la columna.



Lección 7. Expresiones algebraicas racionales

Clase 1. Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales

Ejercicio 7.1. Valor numérico de expresiones algebraicas racionales

[A]

Considere las siguientes expresiones: $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ y $\frac{2x+1}{x+1}$

- Determine el valor numérico de ambos para $x = 2$, $x = 1$ y $x = -1$
- Para $x = 2$, ¿Cómo son las expresiones?
- ¿Qué sucede con las expresiones cuando $x = 1$ y $x = -1$?

Definición 7.1
Una expresión algebraica racional es un cociente de dos polinomios, donde el dominio está formado por todos los números reales excepto los que hagan que el denominador sea cero.

Ejemplo 7.1. Simplificación de expresiones racionales

[B]

1. Considere la expresión anterior: $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

   a) Factorice $\frac{2x^2-x-1}{x^2-1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x+1}$, (si $x \neq 1$)

   b) Determine el dominio
   El denominador es cero si $x = \pm 1$ porque
   $x^2 - 1 = 0$
   $x = \pm 1$ por lo tanto, el dominio es toda $x \neq \pm 1$

2. Simplifique

   a) $\frac{4x^2-12x}{2x^3-2x^2-12x} = \frac{4x(x-3)}{2x(x^2-x-6)} = \frac{4x\cancel{(x-3)}}{2x\cancel{(x-3)}(x+2)} = \frac{2}{x+2}$
   factor común factorizando por tanteo
   si $x \neq 0$, $x \neq 3$, $x \neq -2$

   b) $\frac{a^2+ab-ad-bd}{2a^3b-2ab^3} = \frac{a(a+b)-d(a+b)}{2ab(a^2-b^2)} = \frac{\cancel{(a+b)}(a-d)}{2ab\cancel{(a+b)}(a-b)} = \frac{a-d}{2ab(a-b)}$
   sí $a, b \neq 0$, $a \neq -b$

   c) $$\frac{p+1-p^3-p^2}{p^3-p-2p^2+2} = \frac{-p^3-p^2+p+1}{p^3-2p^2-p+2} = \frac{-p^2(p+1)+(p+1)}{p^2(p-2)-(p-2)}$$
   $$= \frac{(p+1)(1-p^2)}{(p-2)(p^2-1)}$$
   $$= \frac{\cancel{(p+1)}(1+p)(1-p)}{(p-2)\cancel{(p+1)}(p-1)}$$
   $$= \frac{-(p+1)\cancel{(p-1)}}{(p-2)\cancel{(p-1)}}$$
   $$= \frac{-p-1}{p-2}, \text{ (si } p \neq 2, \ p \neq \pm 1)$$

Una expresión algebraica racional se simplifica o reduce a su mínima expresión, si el numerador y denominador no tienen factores comunes.

Como las variables representan números reales, les aplican las mismas propiedades.
Para simplificar aplicamos: $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d}$
$= \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

Solo se “cancela” cuando el numerador y denominador están expresados con factores.

46 | Unidad I • Lección 7 • Clase 1. Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales

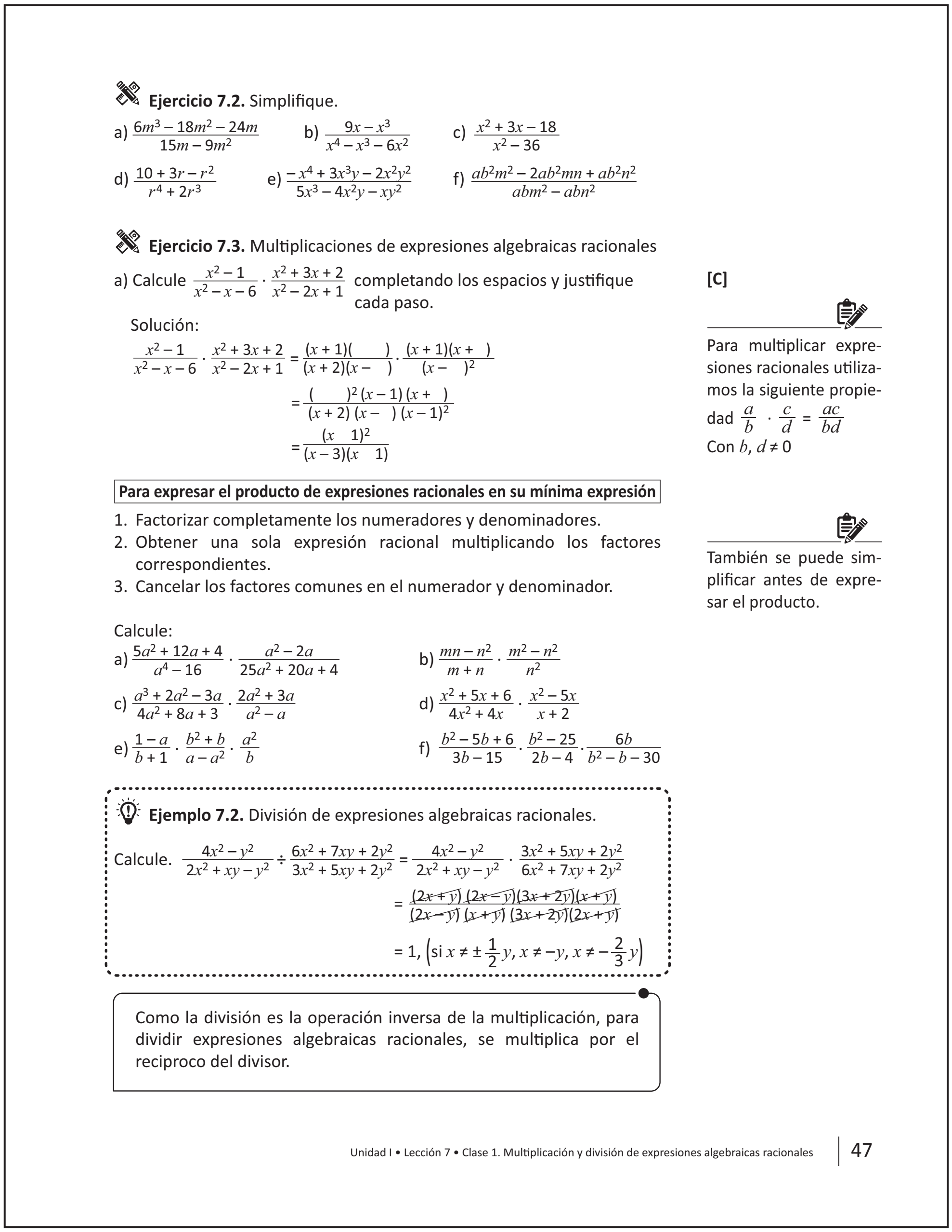
Objetivo: **[C]** Multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales.

Evaluación: Ejercicios 7.3 y 7.4

Clase 1

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Ejercicio 7.2. Simplifique.

a) $\dfrac{6m^3-18m^2-24m}{15m-9m^2}$ b) $\dfrac{9x-x^3}{x^4-x^3-6x^2}$ c) $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2-36}$

d) $\dfrac{10+3r-r^2}{r^4+2r^3}$ e) $\dfrac{-x^4+3x^3y-2x^2y^2}{5x^3-4x^2y-xy^2}$ f) $\dfrac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$

Ejercicio 7.3. Multiplicaciones de expresiones algebraicas racionales

a) Calcule $\dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$ completando los espacios y justifique cada paso.

Solución:

$$\frac{x^2-1}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}=\frac{(x+1)(\quad\;)}{(x+2)(x-\;\;)}\cdot\frac{(x+1)(x+\;\;)}{(x-\;\;)^2}$$
$$=\frac{(\quad\;)^2(x-1)(x+\;\;)}{(x+2)(x-\;\;)(x-1)^2}$$
$$=\frac{(x\quad1)^2}{(x-3)(x\quad1)}$$

Para expresar el producto de expresiones racionales en su mínima expresión

1. Factorizar completamente los numeradores y denominadores.
2. Obtener una sola expresión racional multiplicando los factores correspondientes.
3. Cancelar los factores comunes en el numerador y denominador.

Calcule:

a) $\dfrac{5a^2+12a+4}{a^4-16}\cdot\dfrac{a^2-2a}{25a^2+20a+4}$ b) $\dfrac{mn-n^2}{m+n}\cdot\dfrac{m^2-n^2}{n^2}$

c) $\dfrac{a^3+2a^2-3a}{4a^2+8a+3}\cdot\dfrac{2a^2+3a}{a^2-a}$ d) $\dfrac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\dfrac{x^2-5x}{x+2}$

e) $\dfrac{1-a}{b+1}\cdot\dfrac{b^2+b}{a-a^2}\cdot\dfrac{a^2}{b}$ f) $\dfrac{b^2-5b+6}{3b-15}\cdot\dfrac{b^2-25}{2b-4}\cdot\dfrac{6b}{b^2-b-30}$

Ejemplo 7.2. División de expresiones algebraicas racionales.

Calcule. $\dfrac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2}\div\dfrac{6x^2+7xy+2y^2}{3x^2+5xy+2y^2}=\dfrac{4x^2-y^2}{2x^2+xy-y^2}\cdot\dfrac{3x^2+5xy+2y^2}{6x^2+7xy+2y^2}$

$$=\frac{\cancel{(2x+y)}\,\cancel{(2x-y)}\cancel{(3x+2y)}\cancel{(x+y)}}{\cancel{(2x-y)}\,\cancel{(x+y)}\,\cancel{(3x+2y)}\cancel{(2x+y)}}$$

$$=1,\left(\text{si } x\neq\pm\frac{1}{2}y,\ x\neq-y,\ x\neq-\frac{2}{3}y\right)$$

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, para dividir expresiones algebraicas racionales, se multiplica por el reciproco del divisor.

[C]

Para multiplicar expresiones racionales utilizamos la siguiente propiedad $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$

Con b, $d\neq0$

También se puede simplificar antes de expresar el producto.

Unidad I • Lección 7 • Clase 1. Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales 47

Ejercicio 7.2

Solución:

a) $\dfrac{2(m+1)(m-4)}{5-3m}$

b) $-\dfrac{x+3}{x(x+2)}$

c) $\dfrac{x-3}{x-6}$

d) $\dfrac{-r^3+5}{r^3}$

e) $\dfrac{-x(x-2y)}{5x+y}$

f) $\dfrac{b(m-n)}{m+n}$

[C]

Ejercicio 7.3

(25 min) Solución:

a)

$$\frac{(x+1)\boxed{(x-1)}}{(x+2)(x-\boxed{3})}\cdot\frac{(x+1)(x+\boxed{2})}{(x-\boxed{1})^2}$$

$$\frac{\boxed{(x+1)^2}(x-1)\,(x\boxed{+2})}{(x+2)\,(x\boxed{-3})\,(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x\boxed{+}1)^2}{(x-3)\,(x\boxed{-}1)}$$

a) $\dfrac{a}{(a^2+4)\,(5a+2)}$

b) $\dfrac{(m-n)^2}{n}$

c) $\dfrac{a(a+3)}{2a+1}$

d) $\dfrac{(x+3)(x-5)}{4(x+1)}$

e) a

f) $\dfrac{b(b-3)}{b-6}$

Unidad I. Lección 7.

Clase 1

(Continuación)

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Determinar el mínimo común denominador de expresiones algebraicas racionales.
[B] Efectuar sumas y restas de expresiones algebraicas racionales.

Evaluación: [A] Ejercicio 7.5

Ejercicio 7.4.

Solución:

a) $\dfrac{2(a+1)}{5a}$

b) $\dfrac{x-7}{x+11}$

c) $\dfrac{5}{1-m}$

d) $\dfrac{x(3x-2)^2}{x-1}$

e) $\dfrac{x^2(3x-7)}{x-1}$

f) $\dfrac{3(x-1)(x-2)}{x(x-5)(x+3)}$

g) $\dfrac{2(x-1)}{x+3}$

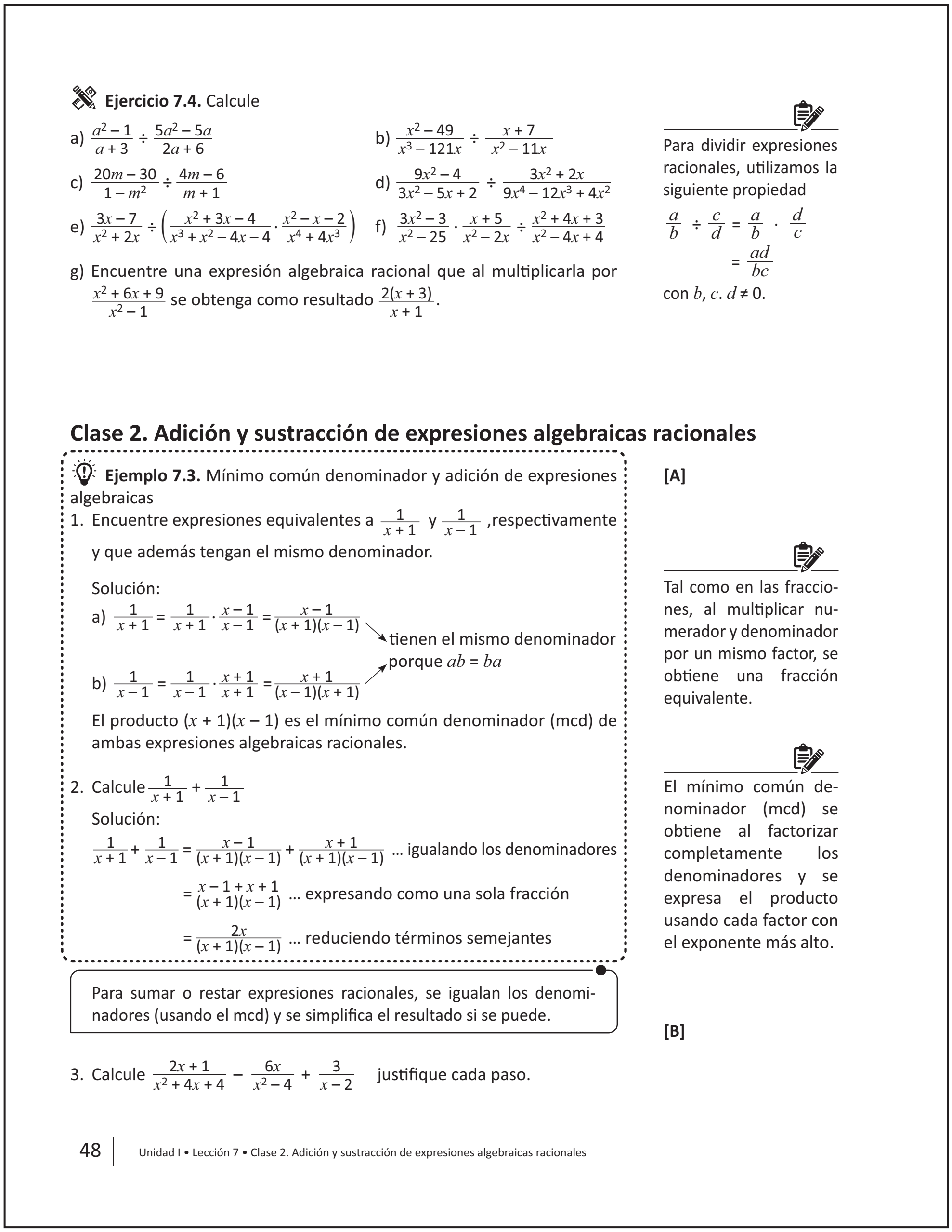
[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

[A] (10 min)

Es recomendable que además de sumar y restar utilizando el método de fracciones equivalentes, se resuelvan por otros métodos y que el estudiante decida cuál es el más conveniente.

[B] (35 min)



Ejercicio 7.4. Calcule

a) $\dfrac{a^2-1}{a+3} \div \dfrac{5a^2-5a}{2a+6}$

b) $\dfrac{x^2-49}{x^3-121x} \div \dfrac{x+7}{x^2-11x}$

c) $\dfrac{20m-30}{1-m^2} \div \dfrac{4m-6}{m+1}$

d) $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2} \div \dfrac{3x^2+2x}{9x^4-12x^3+4x^2}$

e) $\dfrac{3x-7}{x^2+2x} \div \left(\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+x^2-4x-4} \cdot \dfrac{x^2-x-2}{x^4+4x^3}\right)$

f) $\dfrac{3x^2-3}{x^2-25} \cdot \dfrac{x+5}{x^2-2x} \div \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+4}$

g) Encuentre una expresión algebraica racional que al multiplicarla por $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-1}$ se obtenga como resultado $\dfrac{2(x+3)}{x+1}$.

Para dividir expresiones racionales, utilizamos la siguiente propiedad

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

con b, c. $d \neq 0$.

Clase 2. Adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales

Ejemplo 7.3. Mínimo común denominador y adición de expresiones algebraicas

1. Encuentre expresiones equivalentes a $\dfrac{1}{x+1}$ y $\dfrac{1}{x-1}$,respectivamente y que además tengan el mismo denominador.

   Solución:

   a) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{x-1} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

   b) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x-1} \cdot \dfrac{x+1}{x+1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}$

   tienen el mismo denominador porque $ab = ba$

   El producto $(x+1)(x-1)$ es el mínimo común denominador (mcd) de ambas expresiones algebraicas racionales.

2. Calcule $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

   Solución:

   $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$ … igualando los denominadores

   $= \dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}$ … expresando como una sola fracción

   $= \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$ … reduciendo términos semejantes

Para sumar o restar expresiones racionales, se igualan los denominadores (usando el mcd) y se simplifica el resultado si se puede.

3. Calcule $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4} - \dfrac{6x}{x^2-4} + \dfrac{3}{x-2}$ justifique cada paso.

[A]

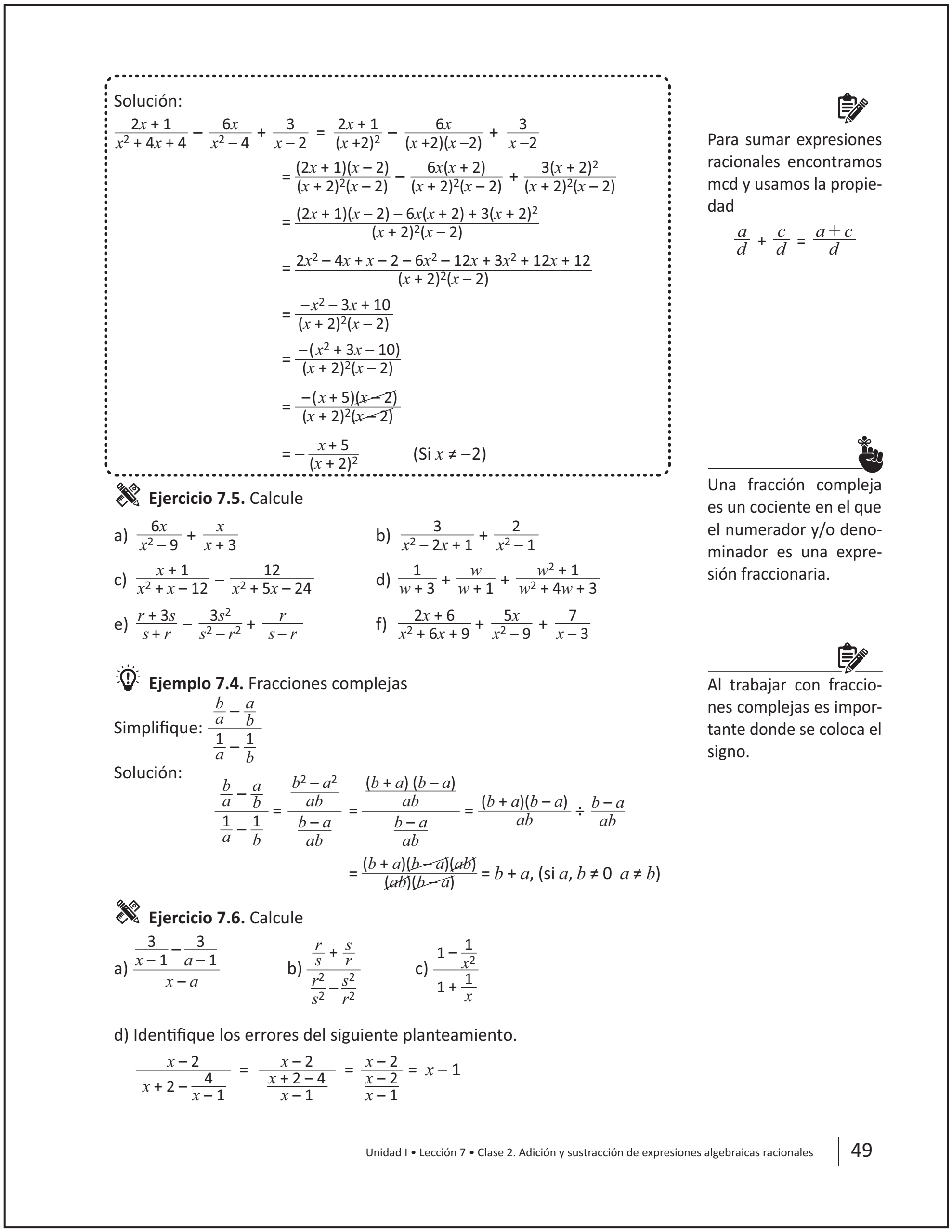
Tal como en las fracciones, al multiplicar numerador y denominador por un mismo factor, se obtiene una fracción equivalente.

El mínimo común denominador (mcd) se obtiene al factorizar completamente los denominadores y se expresa el producto usando cada factor con el exponente más alto.

[B]

48 | Unidad I • Lección 7 • Clase 2. Adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales

Clase 2
(Continuación)



Solución:

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+4}-\frac{6x}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}=\frac{2x+1}{(x+2)^2}-\frac{6x}{(x+2)(x-2)}+\frac{3}{x-2}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)}-\frac{6x(x+2)}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{3(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-2)-6x(x+2)+3(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2-4x+x-2-6x^2-12x+3x^2+12x+12}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{-x^2-3x+10}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{-(x^2+3x-10)}{(x+2)^2(x-2)}$$

$$=\frac{-(x+5)\cancel{(x-2)}}{(x+2)^2\cancel{(x-2)}}$$

$$=-\frac{x+5}{(x+2)^2} \qquad (\text{Si } x \neq -2)$$

Para sumar expresiones racionales encontramos mcd y usamos la propiedad

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{d}$$

Ejercicio 7.5. Calcule

a) $\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}$

b) $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{x^2-1}$

c) $\frac{x+1}{x^2+x-12}-\frac{12}{x^2+5x-24}$

d) $\frac{1}{w+3}+\frac{w}{w+1}+\frac{w^2+1}{w^2+4w+3}$

e) $\frac{r+3s}{s+r}-\frac{3s^2}{s^2-r^2}+\frac{r}{s-r}$

f) $\frac{2x+6}{x^2+6x+9}+\frac{5x}{x^2-9}+\frac{7}{x-3}$

Una fracción compleja es un cociente en el que el numerador y/o denominador es una expresión fraccionaria.

Ejemplo 7.4. Fracciones complejas

Simplifique: $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

Solución:

$$\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b^2-a^2}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{\frac{(b+a)\,(b-a)}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{(b+a)(b-a)}{ab}\div\frac{b-a}{ab}$$

$$=\frac{(b+a)\cancel{(b-a)}\cancel{(ab)}}{\cancel{(ab)}\cancel{(b-a)}}=b+a, \ (\text{si } a, b \neq 0 \ \ a \neq b)$$

Al trabajar con fracciones complejas es importante donde se coloca el signo.

Ejercicio 7.6. Calcule

a) $\dfrac{\frac{3}{x-1}-\frac{3}{a-1}}{x-a}$

b) $\dfrac{\frac{r}{s}+\frac{s}{r}}{\frac{r^2}{s^2}-\frac{s^2}{r^2}}$

c) $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$

d) Identifique los errores del siguiente planteamiento.

$$\frac{x-2}{x+2-\frac{4}{x-1}}=\frac{x-2}{\frac{x+2-4}{x-1}}=\frac{x-2}{\frac{x-2}{x-1}}=x-1$$

Unidad I • Lección 7 • Clase 2. Adición y sustracción de expresiones algebraicas racionales | 49

Ejercicio 7.5.
Solución:

a) $\frac{x}{x-3}$

b) $\frac{5x+1}{(x-1)^2(x+1)}$

c) $\frac{(x-8)(x+5)}{(x+4)(x-3)(x+8)}$

d) $\frac{2(w+1)}{w+3}$

e) $\frac{rs}{(r-s)(r+s)}$

f) $\frac{14x+15}{(x-3)(x+3)}$

Ejercicio 7.6
Solución:

a) $-\frac{3}{(x-1)(a-1)}$

b) $\frac{rs}{r^2-s^2}$

c) $\frac{x-1}{x}$

d) Error al restar y dividir las expresiones algebraicas, la respuesta correcta es

$$\frac{1}{(x+3)(x-1)}$$

Unidad I. Lección 8.

Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Identificar el comportamiento de las gráficas de funciones racionales.
[B] Determinar las asíntotas verticales de una función racional.

Evaluación: Ejercicio 8.1

[A]

Ejercicio 8.1

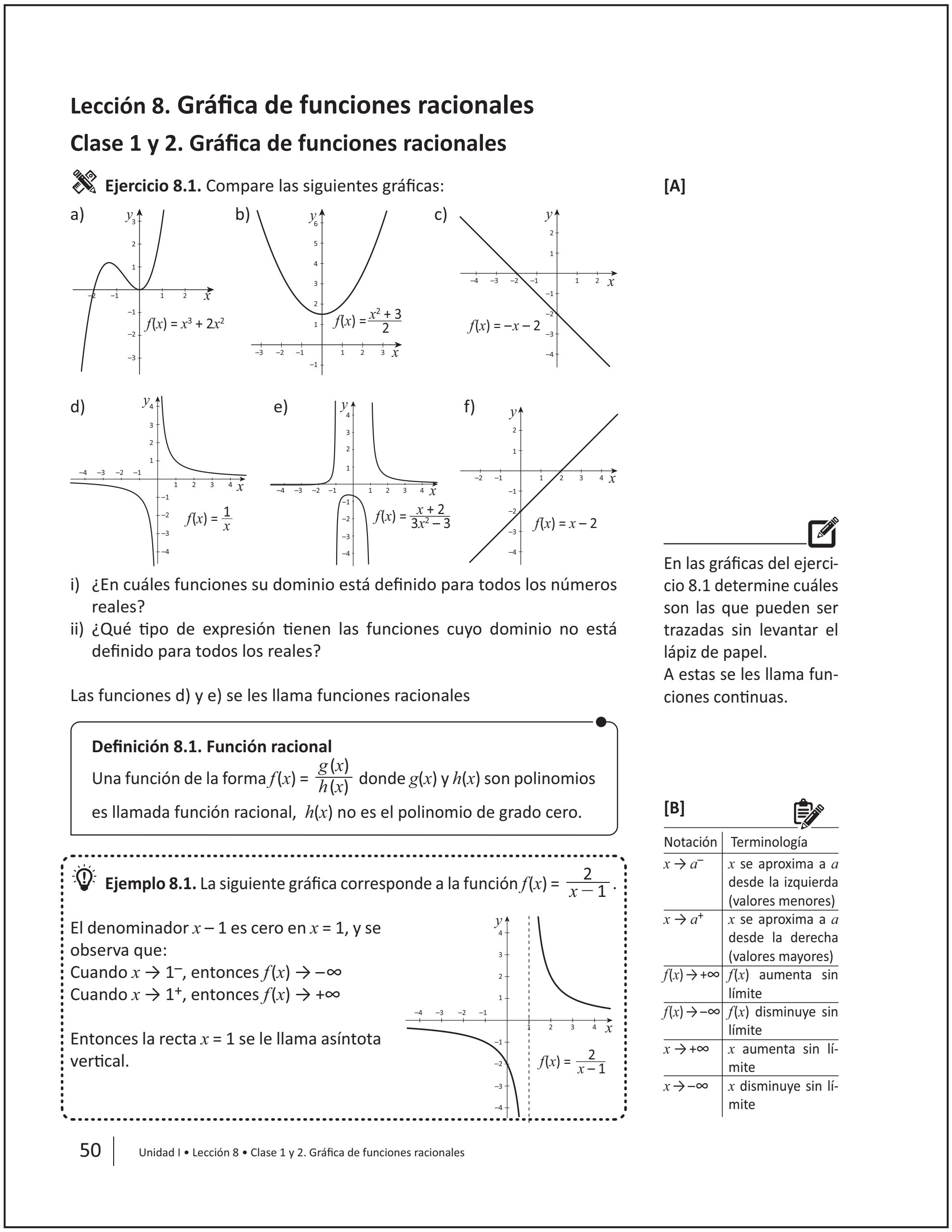
(10 min) Solución:

i) Las gráficas a), b), c) y f)
ii) Son expresiones racionales

- Aunque el tema de continuidad se abordará hasta la enseñanza del cálculo, es conveniente que en éste momento se asocie al comportamiento de las gráficas mostradas en el ejercicio 8.1, como las que pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel.

[B] (10 min)

- Hacer énfasis en que el signo utilizado en la notación $x \to a^-$ y $x \to a^+$, no se refiere al signo del número, sino el sentido en el que nos aproximaremos al valor de a.



Lección 8. Gráfica de funciones racionales

Clase 1 y 2. Gráfica de funciones racionales

Ejercicio 8.1. Compare las siguientes gráficas:

i) ¿En cuáles funciones su dominio está definido para todos los números reales?
ii) ¿Qué tipo de expresión tienen las funciones cuyo dominio no está definido para todos los reales?

Las funciones d) y e) se les llama funciones racionales

Definición 8.1. Función racional
Una función de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios es llamada función racional, $h(x)$ no es el polinomio de grado cero.

Ejemplo 8.1. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = \frac{2}{x - 1}$.

El denominador $x - 1$ es cero en $x = 1$, y se observa que:
Cuando $x \to 1^-$, entonces $f(x) \to -\infty$
Cuando $x \to 1^+$, entonces $f(x) \to +\infty$

Entonces la recta $x = 1$ se le llama asíntota vertical.

[A]

En las gráficas del ejercicio 8.1 determine cuáles son las que pueden ser trazadas sin levantar el lápiz de papel.
A estas se les llama funciones continuas.

[B]

Notación	Terminología
$x \to a^-$	x se aproxima a a desde la izquierda (valores menores)
$x \to a^+$	x se aproxima a a desde la derecha (valores mayores)
$f(x) \to +\infty$	$f(x)$ aumenta sin límite
$f(x) \to -\infty$	$f(x)$ disminuye sin límite
$x \to +\infty$	x aumenta sin límite
$x \to -\infty$	x disminuye sin límite

50 | Unidad I • Lección 8 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones racionales

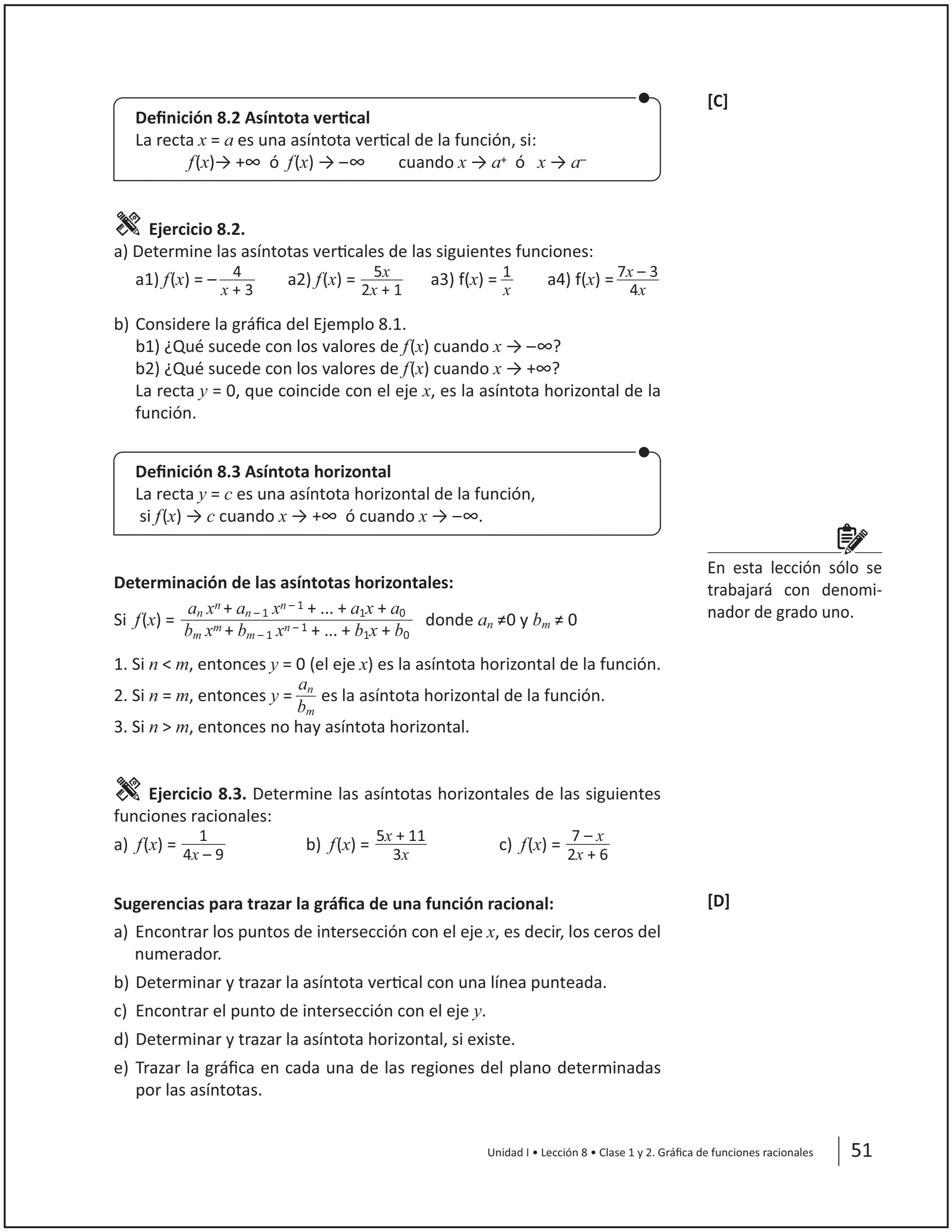
Objetivo: **[C]** Determinar las asíntotas horizontales de una función racional.
[D] Graficar funciones racionales con denominador de grado uno.

Evaluación: Ejercicios 8.2 y 8.3

Clase 1 y 2

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



[C]

Definición 8.2 Asíntota vertical
La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función, si:
$f(x) \to +\infty$ ó $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ ó $x \to a^-$

Ejercicio 8.2.

a) Determine las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

a1) $f(x) = -\frac{4}{x+3}$ a2) $f(x) = \frac{5x}{2x+1}$ a3) $f(x) = \frac{1}{x}$ a4) $f(x) = \frac{7x-3}{4x}$

b) Considere la gráfica del Ejemplo 8.1.
b1) ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$?
b2) ¿Qué sucede con los valores de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$?
La recta $y = 0$, que coincide con el eje x, es la asíntota horizontal de la función.

Definición 8.3 Asíntota horizontal
La recta $y = c$ es una asíntota horizontal de la función,
si $f(x) \to c$ cuando $x \to +\infty$ ó cuando $x \to -\infty$.

En esta lección sólo se trabajará con denominador de grado uno.

Determinación de las asíntotas horizontales:

Si $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$ donde $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$

1. Si $n < m$, entonces $y = 0$ (el eje x) es la asíntota horizontal de la función.
2. Si $n = m$, entonces $y = \frac{a_n}{b_m}$ es la asíntota horizontal de la función.
3. Si $n > m$, entonces no hay asíntota horizontal.

Ejercicio 8.3. Determine las asíntotas horizontales de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{1}{4x-9}$ b) $f(x) = \frac{5x+11}{3x}$ c) $f(x) = \frac{7-x}{2x+6}$

[D]

Sugerencias para trazar la gráfica de una función racional:

a) Encontrar los puntos de intersección con el eje x, es decir, los ceros del numerador.
b) Determinar y trazar la asíntota vertical con una línea punteada.
c) Encontrar el punto de intersección con el eje y.
d) Determinar y trazar la asíntota horizontal, si existe.
e) Trazar la gráfica en cada una de las regiones del plano determinadas por las asíntotas.

Unidad I • Lección 8 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones racionales | 51

Ejercicio 8.2

(15 min)
Solución:

a1) $x = -3$

a2) $x = -\frac{1}{2}$

a3) $x = 0$

a4) $x = 0$

b1) Se aproximan a cero

b2) Se aproximan a cero

[C]

Ejercicio 8.3

(10 min) Solución:

a) $y = 0$

b) $y = \frac{5}{3}$

c) $y = -\frac{1}{2}$

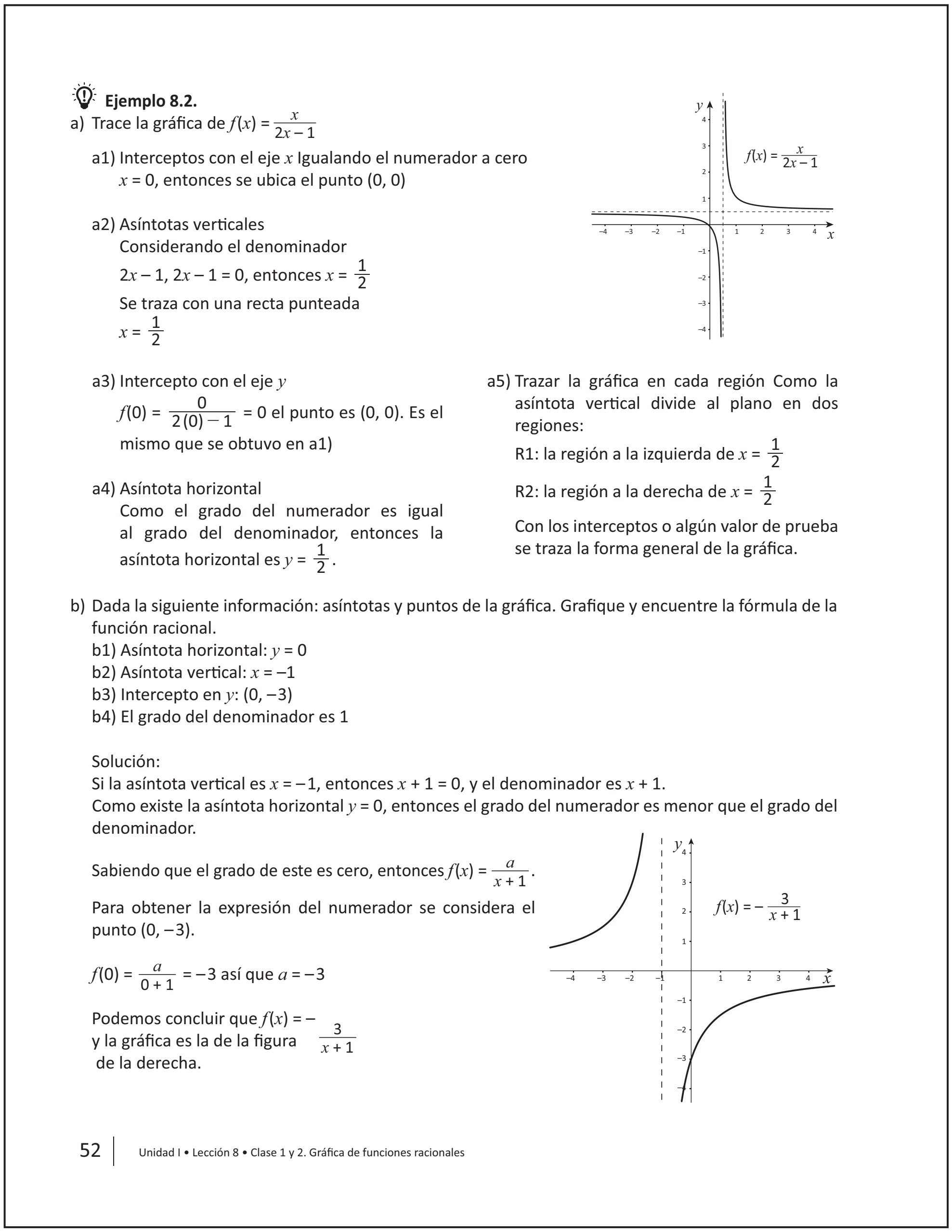
[D] (20 min)

Clase 1 y 2

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

En estos ejemplos se debe hacer énfasis en determinar la forma general de la gráfica, poniendo especial atención a la forma en que la gráfica se aproxima a las asíntotas. Localizando sólo unos pocos puntos, como los correspondientes a los puntos de intersección con los ejes x y y o la intersección de la gráfica con una asíntota horizontal.



Ejemplo 8.2.

a) Trace la gráfica de $f(x) = \frac{x}{2x-1}$

a1) Interceptos con el eje x Igualando el numerador a cero $x = 0$, entonces se ubica el punto (0, 0)

a2) Asíntotas verticales
Considerando el denominador
$2x - 1$, $2x - 1 = 0$, entonces $x = \frac{1}{2}$
Se traza con una recta punteada
$x = \frac{1}{2}$

a3) Intercepto con el eje y
$f(0) = \frac{0}{2(0)-1} = 0$ el punto es (0, 0). Es el mismo que se obtuvo en a1)

a4) Asíntota horizontal
Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, entonces la asíntota horizontal es $y = \frac{1}{2}$.

a5) Trazar la gráfica en cada región Como la asíntota vertical divide al plano en dos regiones:
R1: la región a la izquierda de $x = \frac{1}{2}$
R2: la región a la derecha de $x = \frac{1}{2}$
Con los interceptos o algún valor de prueba se traza la forma general de la gráfica.

b) Dada la siguiente información: asíntotas y puntos de la gráfica. Grafique y encuentre la fórmula de la función racional.
b1) Asíntota horizontal: $y = 0$
b2) Asíntota vertical: $x = -1$
b3) Intercepto en y: $(0, -3)$
b4) El grado del denominador es 1

Solución:
Si la asíntota vertical es $x = -1$, entonces $x + 1 = 0$, y el denominador es $x + 1$.
Como existe la asíntota horizontal $y = 0$, entonces el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Sabiendo que el grado de este es cero, entonces $f(x) = \frac{a}{x+1}$.

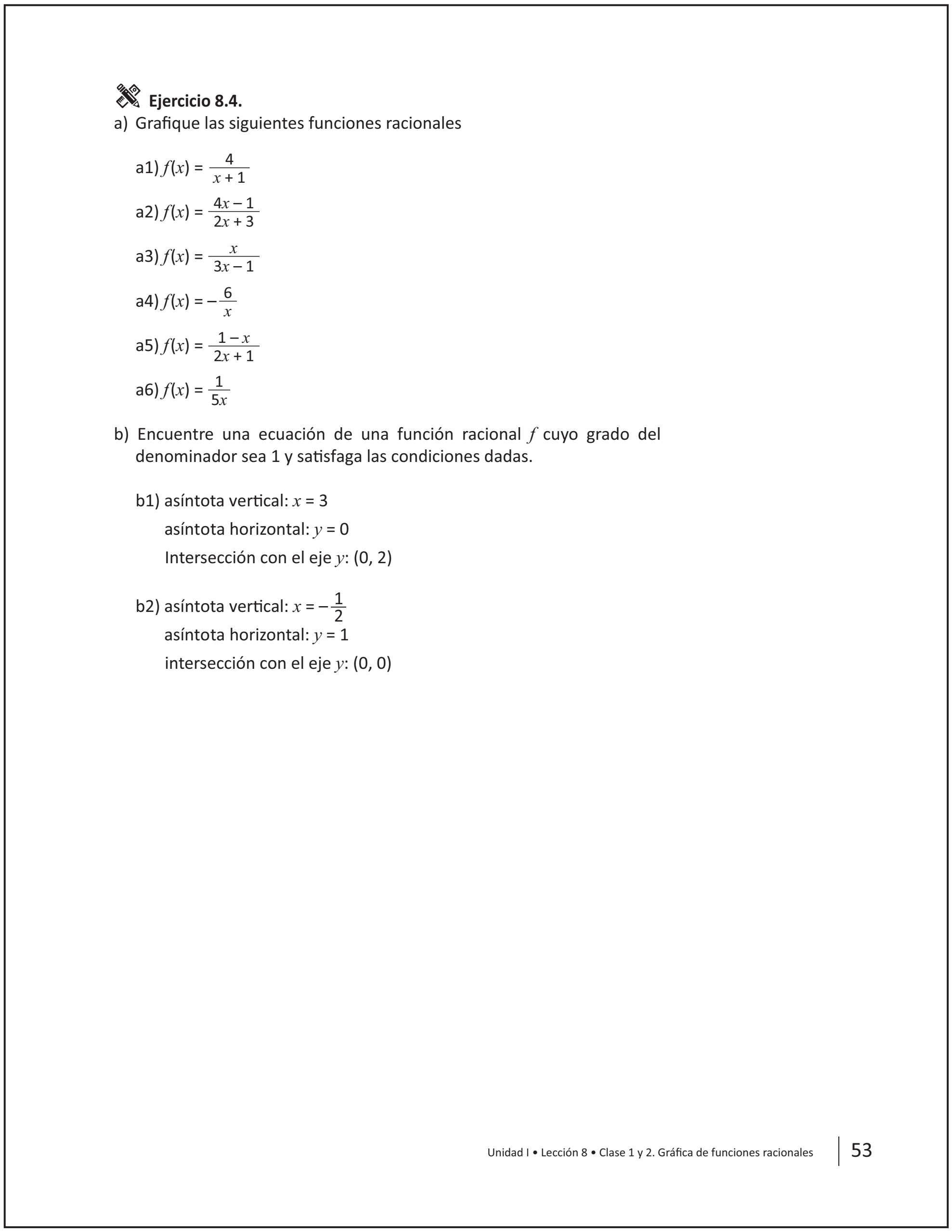
Para obtener la expresión del numerador se considera el punto $(0, -3)$.

$f(0) = \frac{a}{0+1} = -3$ así que $a = -3$

Podemos concluir que $f(x) = -\frac{3}{x+1}$ y la gráfica es la de la figura de la derecha.

52 | Unidad I • Lección 8 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones racionales

Clase 1 y 2
(Continuación)



Ejercicio 8.4.

a) Grafique las siguientes funciones racionales

a1) $f(x) = \frac{4}{x+1}$

a2) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

a3) $f(x) = \frac{x}{3x-1}$

a4) $f(x) = -\frac{6}{x}$

a5) $f(x) = \frac{1-x}{2x+1}$

a6) $f(x) = \frac{1}{5x}$

b) Encuentre una ecuación de una función racional f cuyo grado del denominador sea 1 y satisfaga las condiciones dadas.

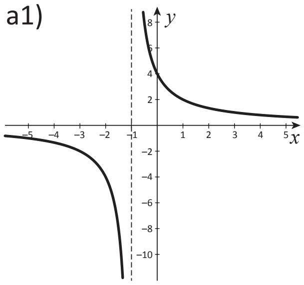
b1) asíntota vertical: $x = 3$
asíntota horizontal: $y = 0$
Intersección con el eje y: (0, 2)

b2) asíntota vertical: $x = -\frac{1}{2}$
asíntota horizontal: $y = 1$
intersección con el eje y: (0, 0)

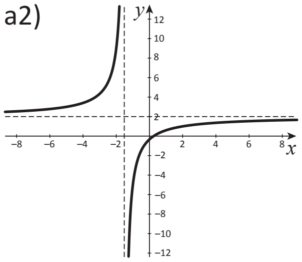
Unidad I • Lección 8 • Clase 1 y 2. Gráfica de funciones racionales 53

Ejercicio 8.4
(25 min) Solución:

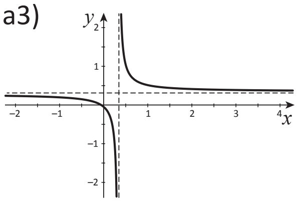
a1)



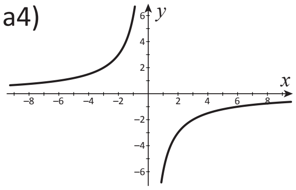
a2)



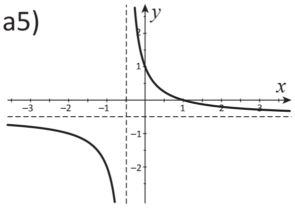
a3)



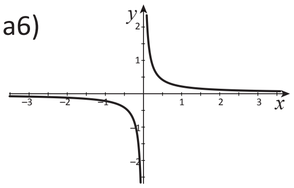
a4)



a5)



a6)



b1) $f(x) = -\frac{6}{x-3}$

b2) $f(x) = \frac{2x}{2x+1}$

Unidad I. Lección 9.

Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Analizar el comportamiento de la gráfica de la función valor absoluto.
[B] Graficar la función valor absoluto.

Evaluación: Ejercicio 9.1

[A] (20 min)

Ejemplo 9.1

- El dominio de f es $\mathbb{R}$, porque el valor absoluto de x existe para todo número real x.
  Si x está en R, entonces $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

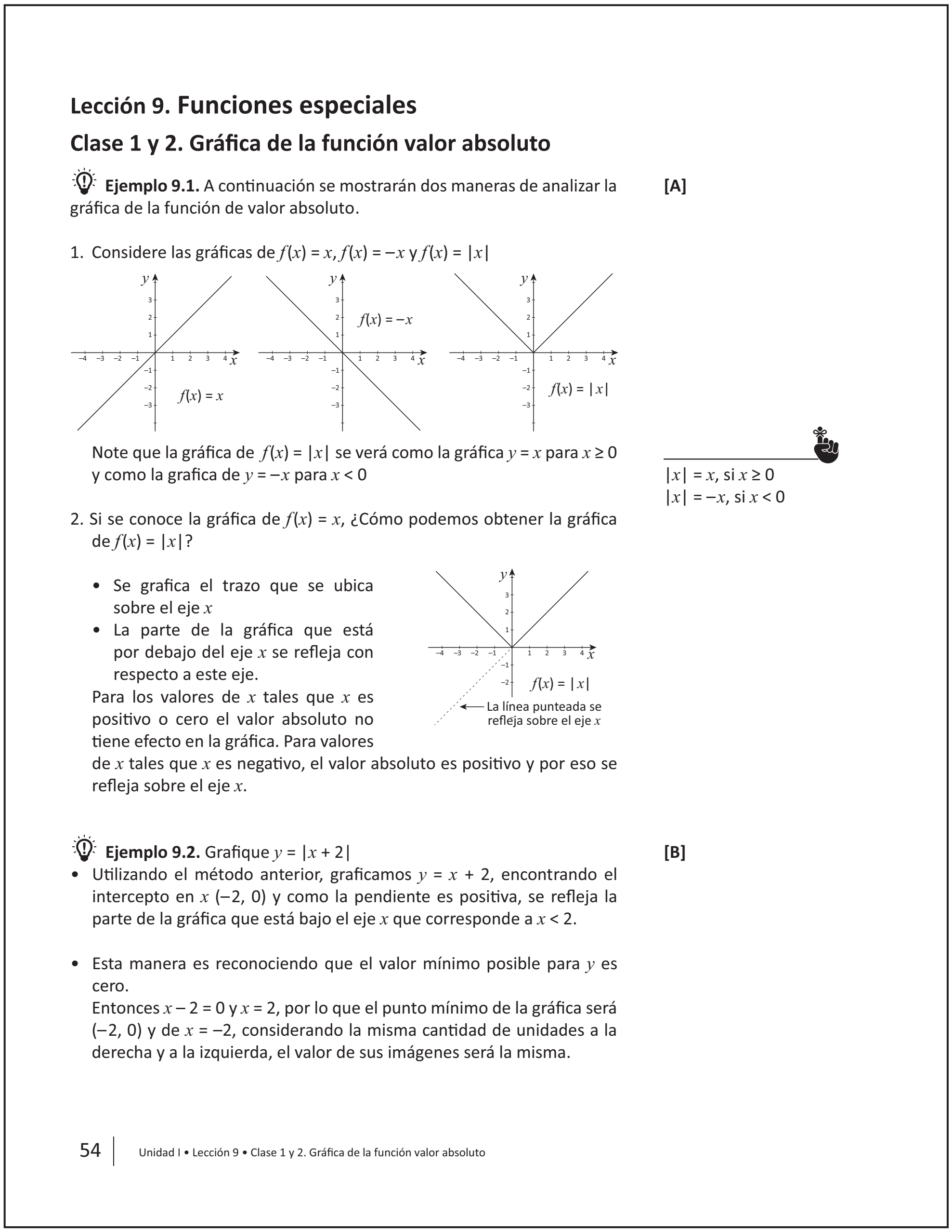
Por lo tanto, f es una función par.

Y como f es par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Por lo que se analizan dos maneras de obtener la gráfica de $f(x) = |x|$

[B] (25 min)

Ejemplo 9.2



Lección 9. Funciones especiales

Clase 1 y 2. Gráfica de la función valor absoluto

Ejemplo 9.1. A continuación se mostrarán dos maneras de analizar la gráfica de la función de valor absoluto. **[A]**

1. Considere las gráficas de $f(x) = x$, $f(x) = -x$ y $f(x) = |x|$

Note que la gráfica de $f(x) = |x|$ se verá como la gráfica $y = x$ para $x \geq 0$ y como la grafica de $y = -x$ para $x < 0$

$|x| = x$, si $x \geq 0$
$|x| = -x$, si $x < 0$

2. Si se conoce la gráfica de $f(x) = x$, ¿Cómo podemos obtener la gráfica de $f(x) = |x|$?

- Se grafica el trazo que se ubica sobre el eje x
- La parte de la gráfica que está por debajo del eje x se refleja con respecto a este eje.

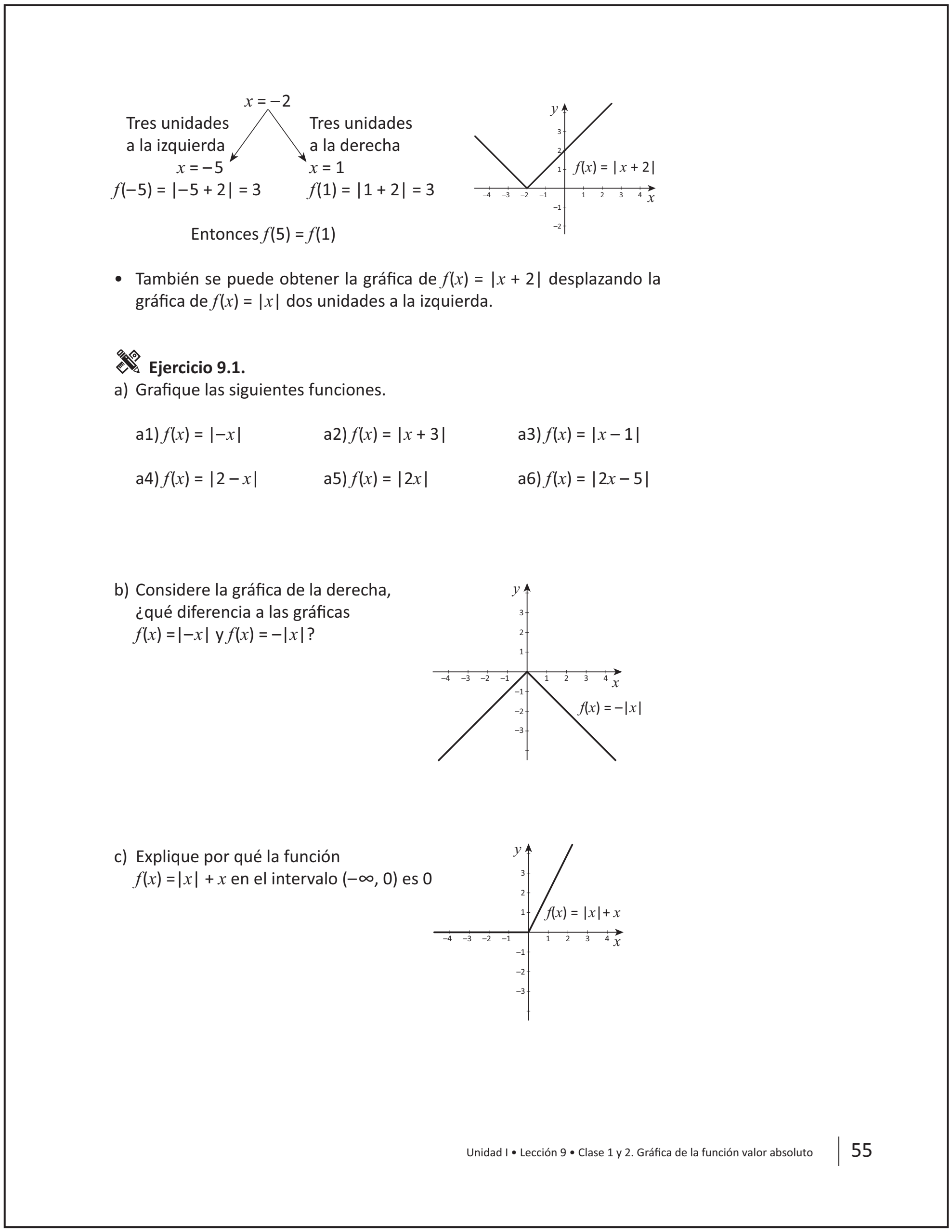
Para los valores de x tales que x es positivo o cero el valor absoluto no tiene efecto en la gráfica. Para valores de x tales que x es negativo, el valor absoluto es positivo y por eso se refleja sobre el eje x.

Ejemplo 9.2. Grafique $y = |x + 2|$ **[B]**

- Utilizando el método anterior, graficamos $y = x + 2$, encontrando el intercepto en x (−2, 0) y como la pendiente es positiva, se refleja la parte de la gráfica que está bajo el eje x que corresponde a $x < 2$.
- Esta manera es reconociendo que el valor mínimo posible para y es cero.
  Entonces $x - 2 = 0$ y $x = 2$, por lo que el punto mínimo de la gráfica será (−2, 0) y de $x = -2$, considerando la misma cantidad de unidades a la derecha y a la izquierda, el valor de sus imágenes será la misma.

54 | Unidad I • Lección 9 • Clase 1 y 2. Gráfica de la función valor absoluto

Clase 1 y 2
(Continuación)



$x = -2$

Tres unidades a la izquierda

$x = -5$

$f(-5) = |-5 + 2| = 3$

Tres unidades a la derecha

$x = 1$

$f(1) = |1 + 2| = 3$

Entonces $f(5) = f(1)$

- También se puede obtener la gráfica de $f(x) = |x + 2|$ desplazando la gráfica de $f(x) = |x|$ dos unidades a la izquierda.

Ejercicio 9.1.

a) Grafique las siguientes funciones.

a1) $f(x) = |-x|$ a2) $f(x) = |x + 3|$ a3) $f(x) = |x - 1|$

a4) $f(x) = |2 - x|$ a5) $f(x) = |2x|$ a6) $f(x) = |2x - 5|$

b) Considere la gráfica de la derecha, ¿qué diferencia a las gráficas $f(x) = |-x|$ y $f(x) = -|x|$?

c) Explique por qué la función $f(x) = |x| + x$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ es 0

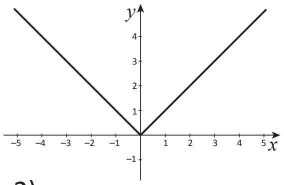
Unidad I • Lección 9 • Clase 1 y 2. Gráfica de la función valor absoluto | 55

Ejercicio 9.1

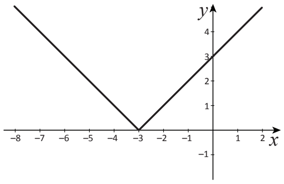
Solución:

a)

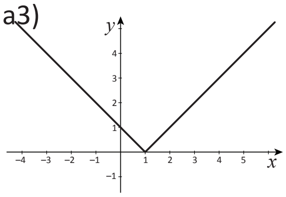
a1)



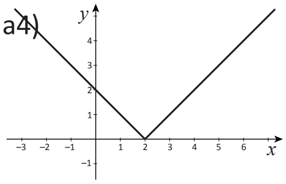
a2)



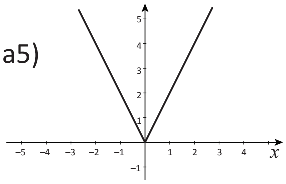
a3)



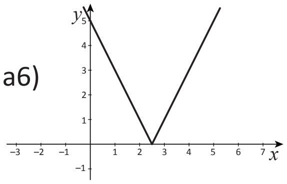
a4)



a5)



a6)



b) Que la ubicación del signo cambia la ubicación de la gráfica.

c) Porque si $x < 0$, entonces
$$\begin{aligned} f(x) &= |x| + x \\ &= -x + x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Unidad I. Lección 9.

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Identificar el mayor entero en expresiones numéricas.
[B] Graficar la función mayor entero.

Evaluación: Ejercicio 9.2

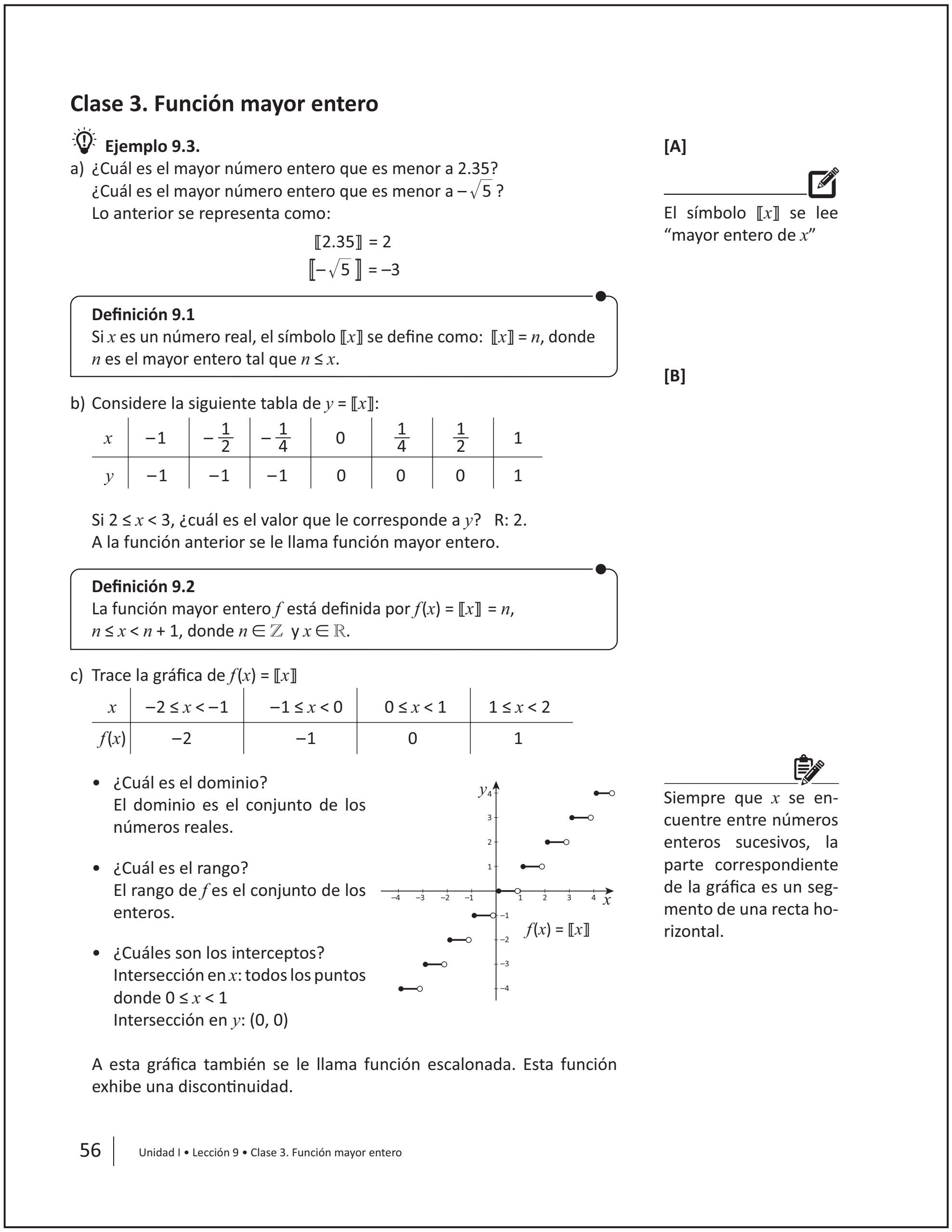
[A] (5 min)

Ejemplo 9.3

b) Si $2 \leq x < 3$, entonces $y = 2$

[B] (40 min)

- Ésta gráfica también recibe el nombre de función escalonada, es un ejemplo en el que los estudiantes pueden comprender muy bien el concepto de discontinuidad.



Clase 3. Función mayor entero

Ejemplo 9.3.

a) ¿Cuál es el mayor número entero que es menor a 2.35?
¿Cuál es el mayor número entero que es menor a $-\sqrt{5}$?
Lo anterior se representa como:

$$[\![2.35]\!] = 2$$
$$[\![-\sqrt{5}\,]\!] = -3$$

Definición 9.1
Si x es un número real, el símbolo $[\![x]\!]$ se define como: $[\![x]\!] = n$, donde n es el mayor entero tal que $n \leq x$.

b) Considere la siguiente tabla de $y = [\![x]\!]$:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
y	−1	−1	−1	0	0	0	1

Si $2 \leq x < 3$, ¿cuál es el valor que le corresponde a y? R: 2.
A la función anterior se le llama función mayor entero.

Definición 9.2
La función mayor entero f está definida por $f(x) = [\![x]\!] = n$, $n \leq x < n + 1$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$.

c) Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$

x	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$
$f(x)$	−2	−1	0	1

- ¿Cuál es el dominio?
  El dominio es el conjunto de los números reales.
- ¿Cuál es el rango?
  El rango de f es el conjunto de los enteros.
- ¿Cuáles son los interceptos?
  Intersección en x: todos los puntos donde $0 \leq x < 1$
  Intersección en y: (0, 0)

A esta gráfica también se le llama función escalonada. Esta función exhibe una discontinuidad.

[A]

El símbolo $[\![x]\!]$ se lee "mayor entero de x"

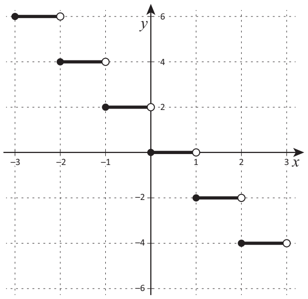
[B]

Siempre que x se encuentre entre números enteros sucesivos, la parte correspondiente de la gráfica es un segmento de una recta horizontal.

56 | Unidad I • Lección 9 • Clase 3. Función mayor entero

Clase 3
(Continuación)

d) Analice la siguiente gráfica:



- Complete la tabla:

x	y
$-2 \le x < -1$	4
$-1 \le x < 0$	
$0 \le x < 1$	
$1 \le x < 2$	

- ¿Cuál es la ecuación de la gráfica?

Ejercicio 9.2. Grafique las siguientes funciones.

a) $f(x) = [\![2x]\!]$

b) $f(x) = \left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right]$

c) $f(x) = -[\![x]\!]$

*d) $f(x) = [\![-x]\!]$

e) $f(x) = [\![x-2]\!]$

*f) $f(x) = [\![1-x]\!]$

d)

x	y
$-2 \le x < -1$	4
$-1 \le x < 0$	2
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	−2

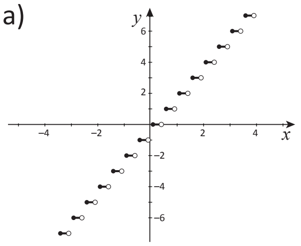
La ecuación de la recta es

$$f(x) = -2[\![x]\!]$$

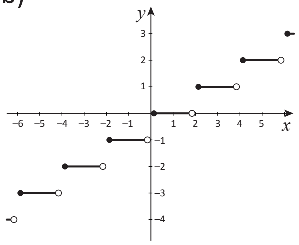
Ejercicio 9.2.

Solución:

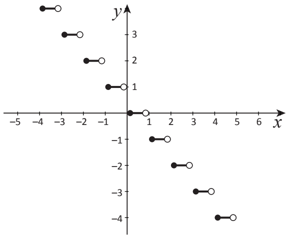
a)



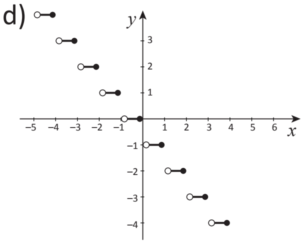
b)



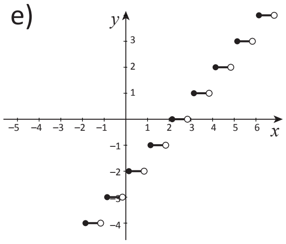
c)



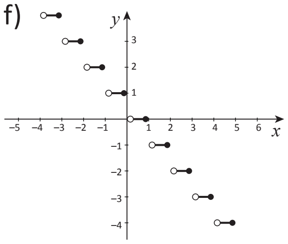
d)



e)



f)



Soluciones Ejercicios Unidad I. Lección 3

Ejercicio 3.2. Pág. 23
(20 minutos)
Resolver los ejercicios y discutir las soluciones en la pizarra.
Soluciones:

a) CS: $\{\pm 2, \pm 3\}$

b) CS: $\{\pm\sqrt{2}, \pm 2\}$

c) CS: $\{\pm\frac{2}{3}, \pm 2\}$

d) CS: $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$

e) CS: $\{\pm 2, \pm\sqrt{3}\}$

Ejercicio 3.3. Pág. 24
(10 min) Soluciones

a) CS: $\{\pm 1, \pm\sqrt{3}\, i\}$

b) CS: $\{\pm 3, \pm\frac{\sqrt{3}}{3} i\}$

c) CS: $\{\pm 3, \pm\sqrt{\frac{39}{5}}\, i\}$

d) CS: $\{\pm 1, \pm 2\}$

e) CS: $\{\pm 2i, \pm\sqrt{3}\}$

Ejercicio 3.5. Pág. 24
(10 min) Soluciones

a) CS: $\{0, \pm\sqrt{3}, \pm 2i\}$

b) CS: $\{0, \pm\sqrt{3}\, i, \pm i\}$

Ejercicio 3.4. Pág. 24
(10 min) Soluciones

a) CS: $\{\pm 1, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\, i\}$

b) CS: $\{\pm i\}$

c) CS: $\{\pm i, \pm\sqrt{3}\, i\}$

d) CS: $\{\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}\, i\}$

e) CS: $\{\pm i\}$

Soluciones Ejercicios Unidad I. Lección 4

Ejercicio 4.6. Pág. 38
(10 min) Soluciones:

a) CS: $(-8, 4) \cup (4, +\infty)$

b) CS: $(-\infty, -5)$

c) CS: $(-\infty, -5) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$

d) CS: $\{0\} \cup (2, +\infty)$

e) CS: $(-\infty, -2] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup [2, +\infty)$

Soluciones Ejercicios Unidad I. Lección 5

Ejercicio 5.4. Pág. 42
(25 min) Soluciones:

a) CS: $\{-2, 6\}$

b) CS: $\{-3, -7\}$

c) CS: $\left\{-\frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right\}$

d) CS: $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

e) CS: $\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$

f) CS: $\left\{-1, \frac{7}{5}\right\}$

g) CS: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right\}$

h) CS: $\{-4, 2\}$

i) CS: $\left\{-1, \frac{1}{5}\right\}$

j) CS: $\{2\}$

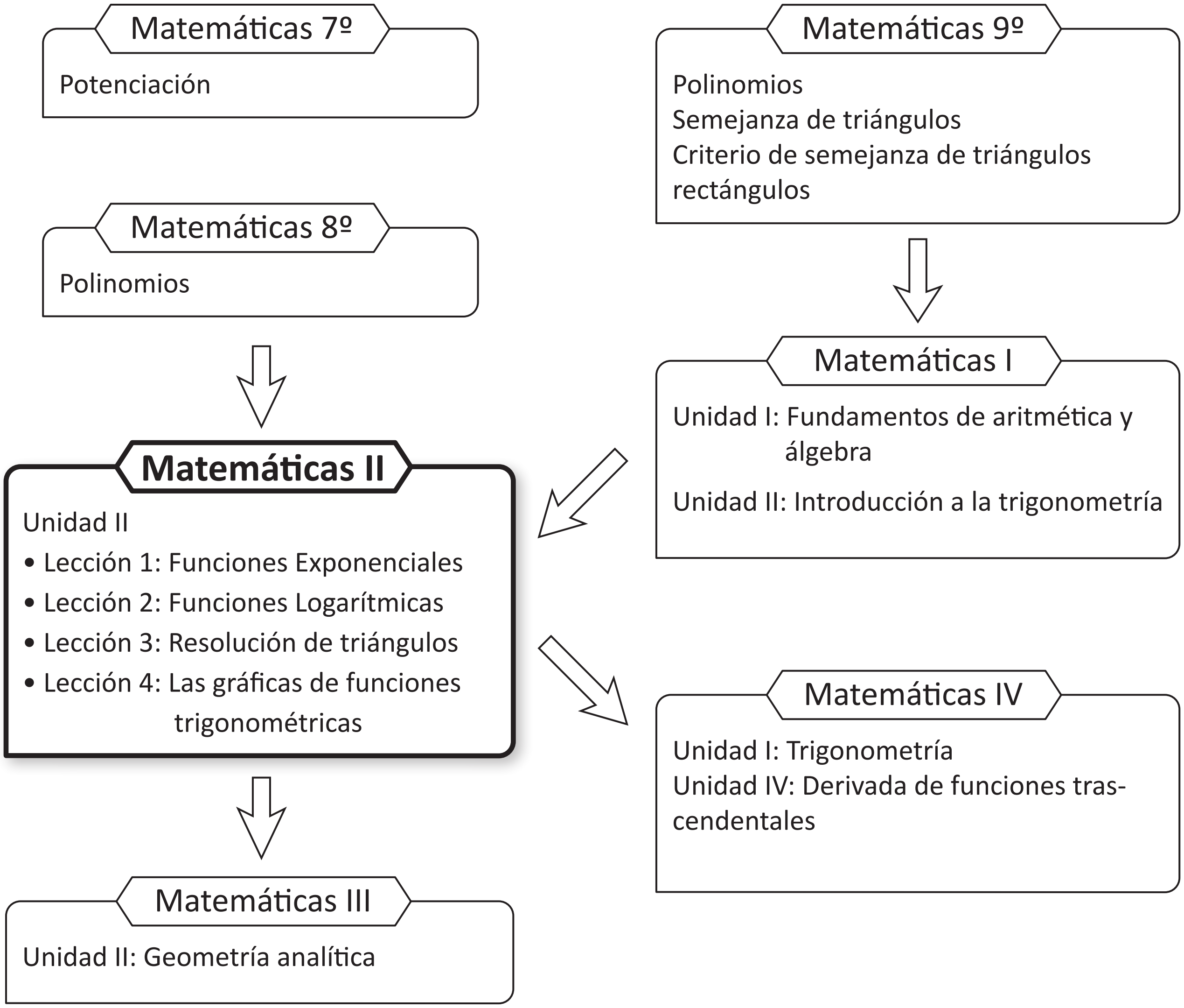
Matemáticas II
Unidad II

Funciones trascendentales

1. Competencias de la Unidad

1. Identificar las características de las funciones exponenciales para establecer su definición.
2. Identificar las propiedades de la función exponencial.
3. Graficar funciones exponenciales.
4. Identificar las características de las funciones logarítmicas para establecer su definición.
5. Identificar las propiedades de la función logarítmica.
6. Graficar funciones logarítmicas.
7. Identificar las propiedades de la función seno y coseno.
8. Graficar funciones seno y coseno.

2. Relación y Desarrollo



Matemáticas 7º

Potenciación

Matemáticas 8º

Polinomios

Matemáticas 9º

Polinomios
Semejanza de triángulos
Criterio de semejanza de triángulos rectángulos

Matemáticas I

Unidad I: Fundamentos de aritmética y álgebra

Unidad II: Introducción a la trigonometría

Matemáticas II

Unidad II

- Lección 1: Funciones Exponenciales
- Lección 2: Funciones Logarítmicas
- Lección 3: Resolución de triángulos
- Lección 4: Las gráficas de funciones trigonométricas

Matemáticas III

Unidad II: Geometría analítica

Matemáticas IV

Unidad I: Trigonometría
Unidad IV: Derivada de funciones trascendentales

3. Plan de Estudio de la Unidad (39 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Funciones Exponenciales	1,2	Potenciación: Exponente natural	Base, exponente, potencia $a^n = b$
	3 y 4	Potenciación: Exponente entero	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
	5 y 6	Radical 1	Raíz, índice, cantidad subradical $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$
	7	Radicales 2	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$
	8	Exponente Racional	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
	9 y 10	Exponente racional y real	
	11 y 12	Definición de funciones exponenciales	Función exponencial $f(x) = a^x$
	13 y 14	Características de las gráficas de funciones exponenciales	Dominio, rango, intercepto, asíntotas, creciente, decreciente
	15	Ecuaciones exponenciales	$a^x = a^y \rightarrow x = y$
	16	Ecuaciones exponenciales 2 (reducción a ecuación de segundo grado)	
		Ejercicios de lección	
2. Funciones logarítmicas	1	Logaritmos	log: logaritmo. $y =$ logaritmo$_a$ x se abrevia como: $y = \log_a x$
	2	Cálculo de logaritmos	
	3	Propiedades de los logaritmos	
	4	Logaritmos comunes y logaritmos naturales	ln: Logaritmo natural; $\log_{10} x = \log x$: logaritmo común
	5 y 6	Función logarítmica	$y = f(x) = \log_a x$ es una función logarítmica
	7 y 8	Ecuación logarítmica	
3. Resolución de triángulos	1	Ángulo inscrito	Ángulo central. Ángulo inscrito
	2	La ley de los senos (Demostración)	
	3	La ley de los senos (Cálculo de la medida de un lado)	
	4	La ley de los senos (Cálculo de la medida de un ángulo)	

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
	5	La ley de los cosenos (Demostración)	
	6	Aplicación de la ley de los cosenos: cálculo de la medida del lado	
	7	Aplicación de la ley de los cosenos: cálculo de la medida del ángulo	
	8	Aplicación de la ley de los cosenos: discriminación del ángulo agudo, recto y obtuso	
	9	Cálculo del área del triángulo utilizando el seno	
		Ejercicios de la lección	
4. Las gráficas de las funciones trigonométricas	1	Gráficas de seno y coseno	función periódica, período
	2	La gráfica de tangente, secante, cosecante y cotangente	asíntota
	3	Amplificación y desplazamiento vertical	amplitud
	4	Desplazamiento lateral	
	5	Cambio del período	
	6	Gráfica de la forma general	
		Ejercicios de la lección	
Problema de la Unidad		Problema de la Unidad A	
		Problema de la Unidad B	

Puntos de lección

Lección 1: Funciones exponenciales

En esta lección se trata de hacer un repaso de las propiedades de los exponentes cuando este son naturales, luego se introduce el comportamiento de las potencias cuando el exponente es entero negativo, cero, racional y real, lo que puede generar algunas dificultades en los estudiantes ya que deben generalizar las propiedades aprendidas anteriormente.

También se pretende establecer una relación entre los radicales y las potencias como operaciones inversas $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$, además se incluyen ejercicios de potencias raíces con variables.

Es importante que los estudiantes tengan dominio sobre estos contenidos para poder dar paso al desarrollo de las funciones exponenciales, donde es necesario que se apliquen las propiedades vistas.

En este caso se estudiarán funciones sencillas ya que lo que se busca es la conceptualización y que los estudiantes puedan analizar su gráfica, es decir identificar intercepto, rango, dominio, asíntotas y si es creciente o decreciente, a la vez se pretende que aprendan a graficar funciones cuando hay desplazamientos paralelos (horizontal $f(x) = a^{x+b}$, o vertical $f(x) = a^x + b$). Tenga en cuenta que este contenido le será útil en Matemática IV unidad I y IV.

En la clase 9 y 10 se hace una breve introducción de la resolución de ecuaciones exponenciales en donde se tratan casos sencillos que para su resolución basta con igualar bases y hacer las operaciones necesarias, no se consideraron los casos donde se debe aplicar logaritmos para igualar bases porque para este curso basta con la conceptualización y solución de ecuaciones sencillas.

Lección 2: Funciones logarítmicas

Se introducen los logaritmos dándole significado a la y en la expresión $x = 3^y$, en la lección se concluye que un logaritmo es un exponente estableciendo la relación que $y = \log_a x$ si y sólo si $a^y = x$. En primera instancia los exponentes son números enteros positivos, luego negativos y por últimos números racionales, de manera que se gradúe el nivel de dificultad y que los estudiantes no utilicen calculadora. Las propiedades de los logaritmos (producto, cociente y potencia) se deducen usando tablas, luego se aplican para reducir o expandir una expresión logarítmica.

Con las bases 10 y $e = 2.7182\ldots$ se definen los logaritmos comunes y naturales respectivamente, estas bases se usan para definir el cambio de base ($\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$) en los logaritmos que es utilizada para encontrar los valores de algunos logaritmos.

Se aprovecha la definición de logaritmo para definir la función logarítmica ya que a cada valor de x corresponde un único valor de y, se hace énfasis en si la base $a > 1$ o si $0 < a < 1$ para determinar la tendencia de la gráfica de la función, se analiza que el eje y es una asíntota vertical (en ejercicios posteriores la asíntota vertical se desplazará a la izquierda o a la derecha). Luego se grafican en el mismo plano la función logarítmica ($y = \log_2 x$) y la función exponencial ($y = 2^x$) para concluir que estas gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$ (una es la inversa de la otra).

Se concluye esta lección definiendo una ecuación logarítmica como aquella ecuación en la cual la variable es parte del argumento de un logaritmo. Se resuelven las ecuaciones logarítmicas convirtiéndolas en su forma exponencial y/o aplicando las propiedades de los logaritmos.

Lección 3: Resolución de triángulos

En el Libro del Estudiante se tratan ejemplos donde aparece sólo los ángulos especiales como ser 30°, 45°, 60° etc., por lo tanto, no hay necesidad de utilizar la calculadora.

Para dar la relación entre los senos y el radio de la circunferencia circunscrita, se utiliza la relación entre los ángulos inscritos, que es el tema de la Clase 1.

Tenga en cuenta que la ley de seno da la relación.

Lección 4: Las gráficas de funciones trigonométricas

Se trata el ejemplo $y = \text{sen}(\theta - 60°)$ donde no se usa la unidad de medida radián, la razón es porque si se utiliza radián y se plantea el problema como $y = \text{sen}(\theta - \frac{\pi}{3})$, hay que usar fracciones, decimales, etc., lo que complica el aprendizaje.

Unidad II. Lección 1.

Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definir una potencia con exponentes naturales.

Evaluación: Ejercicio 1.1

[A] Concepto de potencia

Ejemplo 1.1

(15 min)

M: ¿Qué se pide encontrar en el problema y cuáles son los datos con los que se cuenta?

RP: La cantidad de ahorro que tendrá la niña en en tres, cinco y diez días.

*Es importante que el estudiante se dé cuenta que el comportamiento de los datos es una potencia de dos, a medida pasan los días el ahorro aumenta.

*El docente pide a los estudiantes que representen las cantidades como potencia.

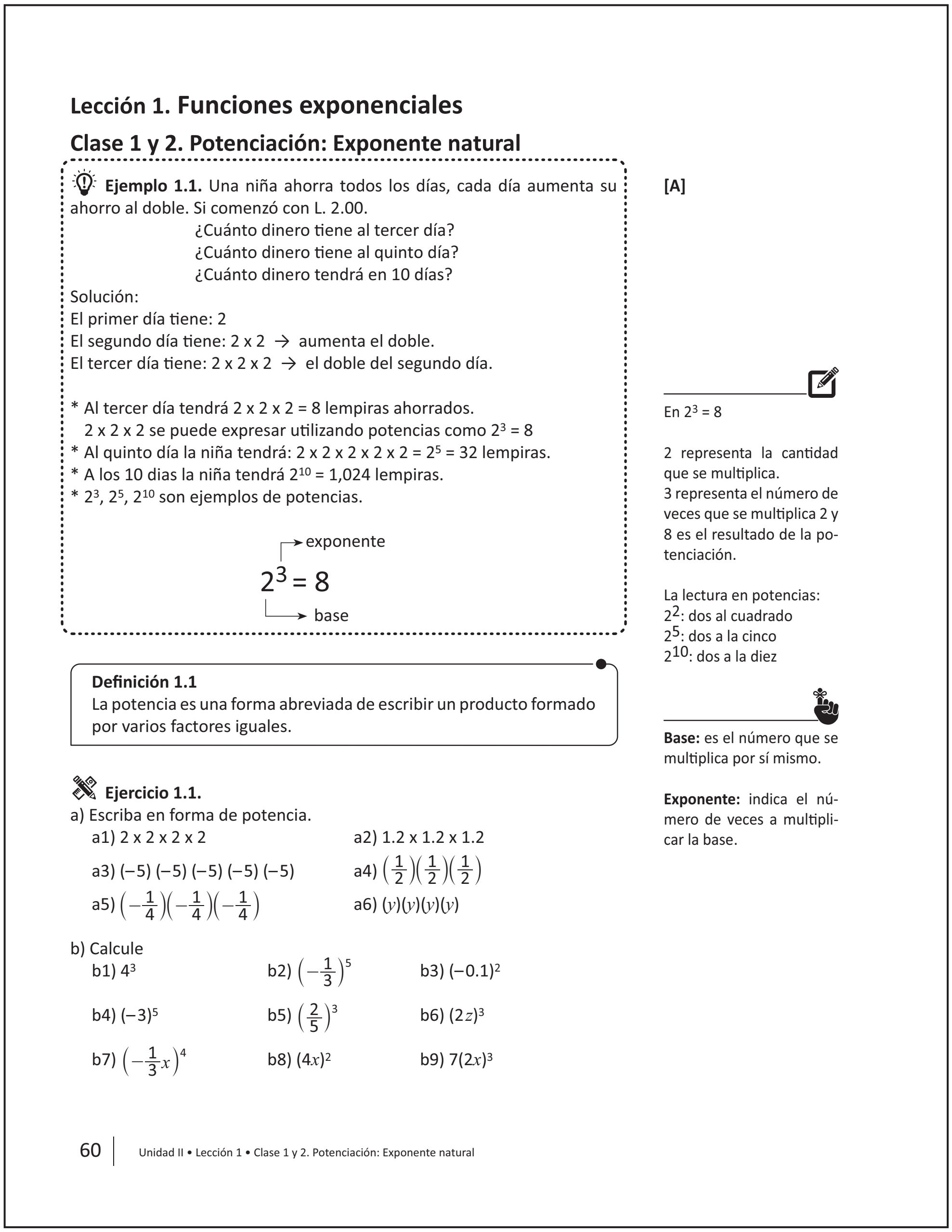
M: ¿Cuáles son las partes de la potencia?

*Hacer reforzamiento de los significados de cada elemento de la potencia.

RP: Base, exponente y el resultado de la potenciación.

Definición 1.1

Concluye en el concepto de potencia e identifican los elementos de la misma.



Lección 1. Funciones exponenciales

Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural

Ejemplo 1.1. Una niña ahorra todos los días, cada día aumenta su ahorro al doble. Si comenzó con L. 2.00.

¿Cuánto dinero tiene al tercer día?
¿Cuánto dinero tiene al quinto día?
¿Cuánto dinero tendrá en 10 días?

Solución:
El primer día tiene: 2
El segundo día tiene: 2 x 2 → aumenta el doble.
El tercer día tiene: 2 x 2 x 2 → el doble del segundo día.

* Al tercer día tendrá 2 x 2 x 2 = 8 lempiras ahorrados.
  2 x 2 x 2 se puede expresar utilizando potencias como $2^3 = 8$
* Al quinto día la niña tendrá: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^5 = 32 lempiras.
* A los 10 dias la niña tendrá 2^{10} = 1,024 lempiras.
* 2^3, 2^5, 2^{10} son ejemplos de potencias.

exponente
$2^3 = 8$
base

Definición 1.1
La potencia es una forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

Ejercicio 1.1.

a) Escriba en forma de potencia.

a1) 2 x 2 x 2 x 2	a2) 1.2 x 1.2 x 1.2
a3) (−5) (−5) (−5) (−5) (−5)	a4) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$
a5) $\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$	a6) $(y)(y)(y)(y)$

b) Calcule

b1) 4^3	b2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$	b3) $(-0.1)^2$
b4) $(-3)^5$	b5) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$	b6) $(2z)^3$
b7) $\left(-\frac{1}{3}x\right)^4$	b8) $(4x)^2$	b9) $7(2x)^3$

[A]

En $2^3 = 8$

2 representa la cantidad que se multiplica.
3 representa el número de veces que se multiplica 2 y 8 es el resultado de la potenciación.

La lectura en potencias:
2^2: dos al cuadrado
2^5: dos a la cinco
2^{10}: dos a la diez

Base: es el número que se multiplica por sí mismo.

Exponente: indica el número de veces a multiplicar la base.

60 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural

Ejercicio 1.1

(15 min) Soluciones:

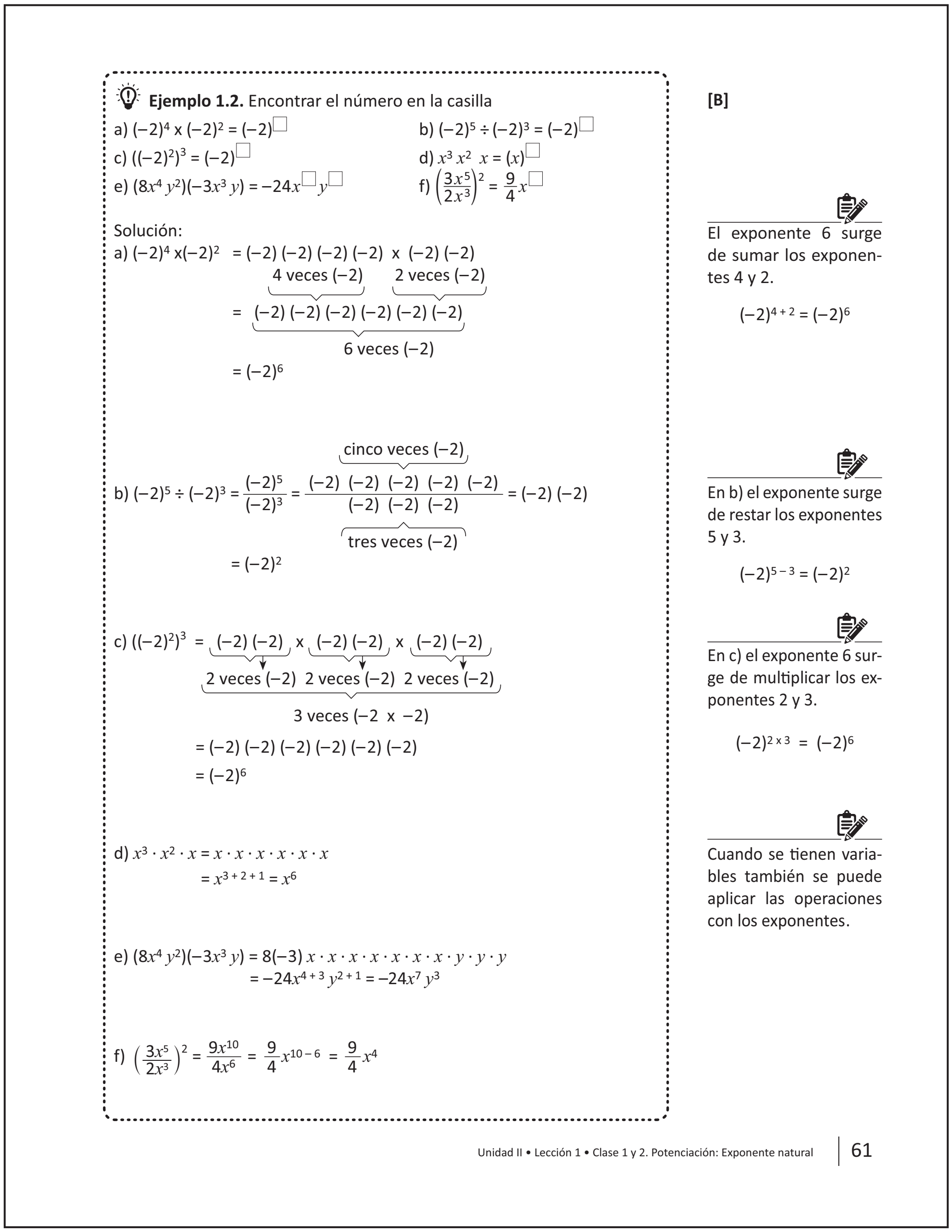
a1) 2^4	a2) $(1.2)^3$
a3) $(-5)^5$	a4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
a5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$	a6) y^4

b1) 64	b2) $-\frac{1}{243}$	b3) 0.01
b4) −243	b5) $\frac{8}{125}$	b6) $8z^3$
b7) $\frac{1}{81}x^4$	b8) $16x^2$	b9) $56x^3$

Objetivo: **[B]** Calcular potencias de igual base y exponente positivo.
Efectuar operaciones de multiplicación y división de potencias de igual base.

Clase 1 y 2
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 1.2



Ejemplo 1.2. Encontrar el número en la casilla

a) $(-2)^4 \text{ x } (-2)^2 = (-2)^{\square}$

b) $(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^{\square}$

c) $((-2)^2)^3 = (-2)^{\square}$

d) $x^3\ x^2\ \ x = (x)^{\square}$

e) $(8x^4 y^2)(-3x^3 y) = -24x^{\square}y^{\square}$

f) $\left(\frac{3x^5}{2x^3}\right)^2 = \frac{9}{4}x^{\square}$

Solución:

a) $$(-2)^4 \text{ x}(-2)^2 = \underbrace{(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)}_{4 \text{ veces } (-2)} \text{ x } \underbrace{(-2)\,(-2)}_{2 \text{ veces } (-2)}$$
$$= \underbrace{(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)}_{6 \text{ veces } (-2)}$$
$$= (-2)^6$$

b) $$(-2)^5 \div (-2)^3 = \frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{\overbrace{(-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2)}^{\text{cinco veces } (-2)}}{\underbrace{(-2)\ (-2)\ (-2)}_{\text{tres veces } (-2)}} = (-2)\,(-2)$$
$$= (-2)^2$$

c) $$((-2)^2)^3 = \underbrace{\underbrace{(-2)\,(-2)}_{2 \text{ veces } (-2)} \text{ x } \underbrace{(-2)\,(-2)}_{2 \text{ veces } (-2)} \text{ x } \underbrace{(-2)\,(-2)}_{2 \text{ veces } (-2)}}_{3 \text{ veces } (-2 \text{ x } -2)}$$
$$= (-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2)$$
$$= (-2)^6$$

d) $$x^3 \cdot x^2 \cdot x = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$
$$= x^{3+2+1} = x^6$$

e) $$(8x^4 y^2)(-3x^3 y) = 8(-3)\, x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$$
$$= -24x^{4+3} y^{2+1} = -24x^7 y^3$$

f) $$\left(\frac{3x^5}{2x^3}\right)^2 = \frac{9x^{10}}{4x^6} = \frac{9}{4}x^{10-6} = \frac{9}{4}x^4$$

[B]

El exponente 6 surge de sumar los exponentes 4 y 2.

$(-2)^{4+2} = (-2)^6$

En b) el exponente surge de restar los exponentes 5 y 3.

$(-2)^{5-3} = (-2)^2$

En c) el exponente 6 surge de multiplicar los exponentes 2 y 3.

$(-2)^{2 \text{ x } 3} = (-2)^6$

Cuando se tienen variables también se puede aplicar las operaciones con los exponentes.

Unidad II • Lección 1 • Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural | 61

*Hacer que los estudiantes se den cuenta que las propiedades de las potencias se aplican a las expresiones algebraicas de igual manera que a las expresiones numéricas.

***Definir las propiedades de las potencias**

[B] Propiedades de las potencias con exponentes positivos

Ejemplo 1.2
(15 min)

*Presentar en la pizarra el ejemplo y pedir que lo resuelvan sin consultar el Libro del Estudiante.
M: ¿Qué propiedad aplicamos en el inciso a, d y e?
RP: Multiplicación de potencias de igual base
M: ¿Qué propiedad aplicamos en el inciso b?
RP: División de potencias de igual base
M: ¿Qué propiedad aplicamos en el inciso c?
RP: Potencia de una potencia.
*El docente hace preguntas en que consiste cada propiedad con el objeto que el alumno recuerde las reglas vistas en octavo grado.

Concluir que en a, d y e se copia la base y se suman los exponentes

Concluir que en b se copia la base y se restan los exponentes.
Concluir que en c se copia la base y se multiplican los exponentes.

[Hasta aquí Clase 1]

Clase 2
(Continuación)

Objetivo: **[C]** Calcular potencias de igual exponente y diferente base.

Evaluación: Ejercicio 1.3

[Desde aquí Clase 2]

Ejercicio 1.2
(15 min) Soluciones

a) 3^7 b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

c) $(1.3)^5$ d) $(-2x)^5$

e) $(-5)^3$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$

g) x^2 h) $5xy^2$

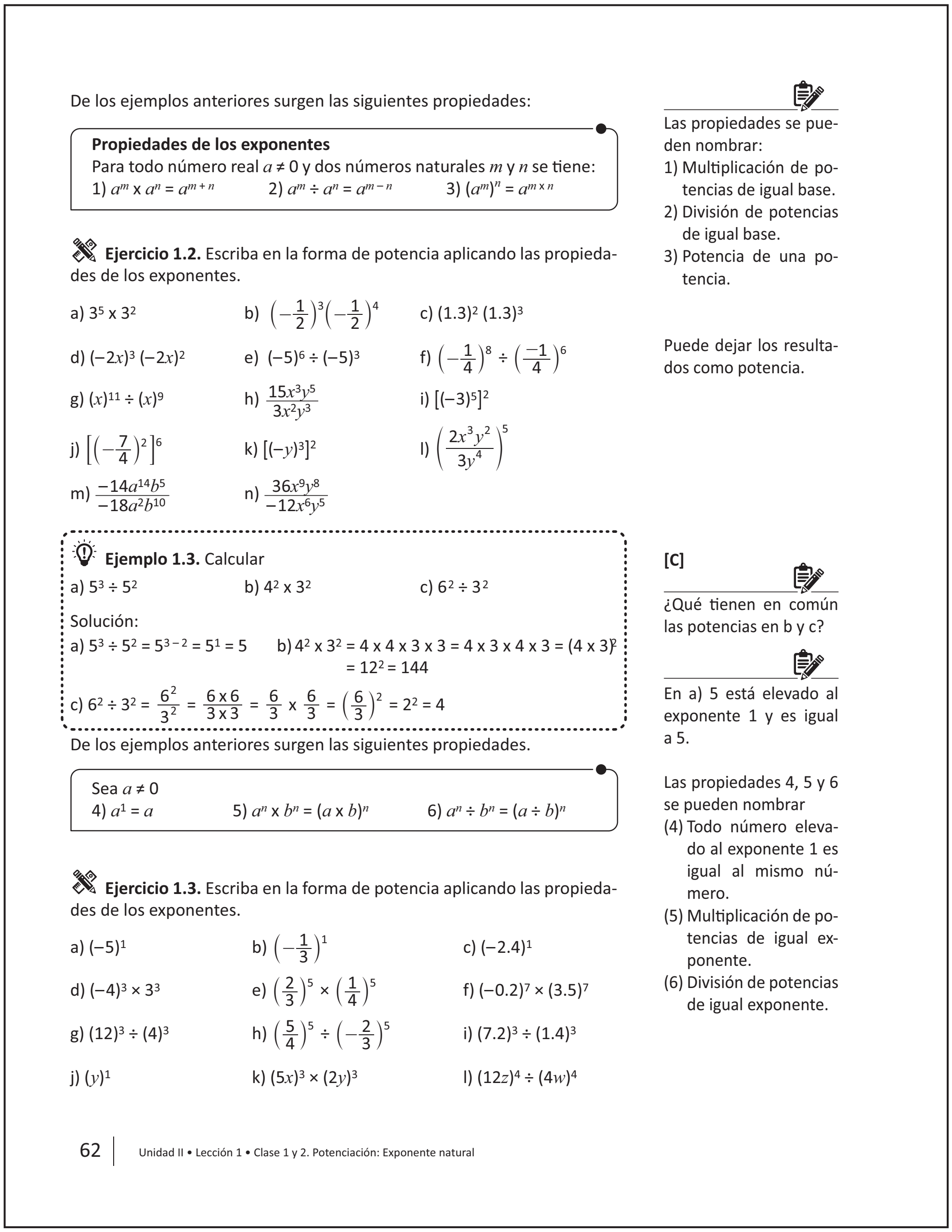
i) $(-3)^{10}$ j) $\left(-\frac{7}{4}\right)^{12}$

k) $(-y)^6$ l) $\frac{2^5x^{15}}{3^5y^{10}}$

m) $\frac{7a^{12}}{9b^5}$ n) $-3(x\,y)^3$

[C] Propiedades de potencias de igual exponente

Ejemplo 1.3
(15 min)
Presentar los ejercicios del ejemplo y permitir que los estudiantes los resuelvan sin consultar el LE.
*Hacer preguntas similares que en [B] para deducir las propiedades
M: Todo número elevado a 1 ¿será igual a?
RP: A sí mismo
M: En la multiplicación de potencias de igual exponente ¿Qué se hace?:
RP: Se multiplican las bases y se copia el exponente.
M: En la división de potencias de igual exponente. ¿Qué se hace?
RP: Se dividen las bases y se copia el exponente.



De los ejemplos anteriores surgen las siguientes propiedades:

Propiedades de los exponentes
Para todo número real $a \neq 0$ y dos números naturales m y n se tiene:
1) $a^m \text{ x } a^n = a^{m+n}$ 2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 3) $(a^m)^n = a^{m \text{ x } n}$

Ejercicio 1.2. Escriba en la forma de potencia aplicando las propiedades de los exponentes.

a) $3^5 \text{ x } 3^2$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ c) $(1.3)^2\,(1.3)^3$

d) $(-2x)^3\,(-2x)^2$ e) $(-5)^6 \div (-5)^3$ f) $\left(-\frac{1}{4}\right)^8 \div \left(\frac{-1}{4}\right)^6$

g) $(x)^{11} \div (x)^9$ h) $\frac{15x^3y^5}{3x^2y^3}$ i) $[(-3)^5]^2$

j) $\left[\left(-\frac{7}{4}\right)^2\right]^6$ k) $[(-y)^3]^2$ l) $\left(\frac{2x^3y^2}{3y^4}\right)^5$

m) $\frac{-14a^{14}b^5}{-18a^2b^{10}}$ n) $\frac{36x^9y^8}{-12x^6y^5}$

Ejemplo 1.3. Calcular
a) $5^3 \div 5^2$ b) $4^2 \text{ x } 3^2$ c) $6^2 \div 3^2$

Solución:
a) $5^3 \div 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5$ b) $4^2 \text{ x } 3^2 = 4 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 3 = 4 \text{ x } 3 \text{ x } 4 \text{ x } 3 = (4 \text{ x } 3)^2$
$= 12^2 = 144$
c) $6^2 \div 3^2 = \frac{6^2}{3^2} = \frac{6 \text{ x } 6}{3 \text{ x } 3} = \frac{6}{3} \text{ x } \frac{6}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2 = 4$

De los ejemplos anteriores surgen las siguientes propiedades.

Sea $a \neq 0$
4) $a^1 = a$ 5) $a^n \text{ x } b^n = (a \text{ x } b)^n$ 6) $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

Ejercicio 1.3. Escriba en la forma de potencia aplicando las propiedades de los exponentes.

a) $(-5)^1$ b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^1$ c) $(-2.4)^1$

d) $(-4)^3 \times 3^3$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$ f) $(-0.2)^7 \times (3.5)^7$

g) $(12)^3 \div (4)^3$ h) $\left(\frac{5}{4}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^5$ i) $(7.2)^3 \div (1.4)^3$

j) $(y)^1$ k) $(5x)^3 \times (2y)^3$ l) $(12z)^4 \div (4w)^4$

Las propiedades se pueden nombrar:
1) Multiplicación de potencias de igual base.
2) División de potencias de igual base.
3) Potencia de una potencia.

Puede dejar los resultados como potencia.

[C]

¿Qué tienen en común las potencias en b y c?

En a) 5 está elevado al exponente 1 y es igual a 5.

Las propiedades 4, 5 y 6 se pueden nombrar
(4) Todo número elevado al exponente 1 es igual al mismo número.
(5) Multiplicación de potencias de igual exponente.
(6) División de potencias de igual exponente.

62 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1 y 2. Potenciación: Exponente natural

Ejercicio 1.3. (15 min) Soluciones

a) -5 b) $-\frac{1}{3}$ c) -2.4 d) $(-12)^3$

e) $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ f) $(-0.7)^7$ g) 3^3 h) $\left(-\frac{15}{8}\right)^5$

i) $\left(\frac{36}{7}\right)^3$ j) y k) $(10xy)^3$ l) $\left(\frac{3z}{w}\right)^4$

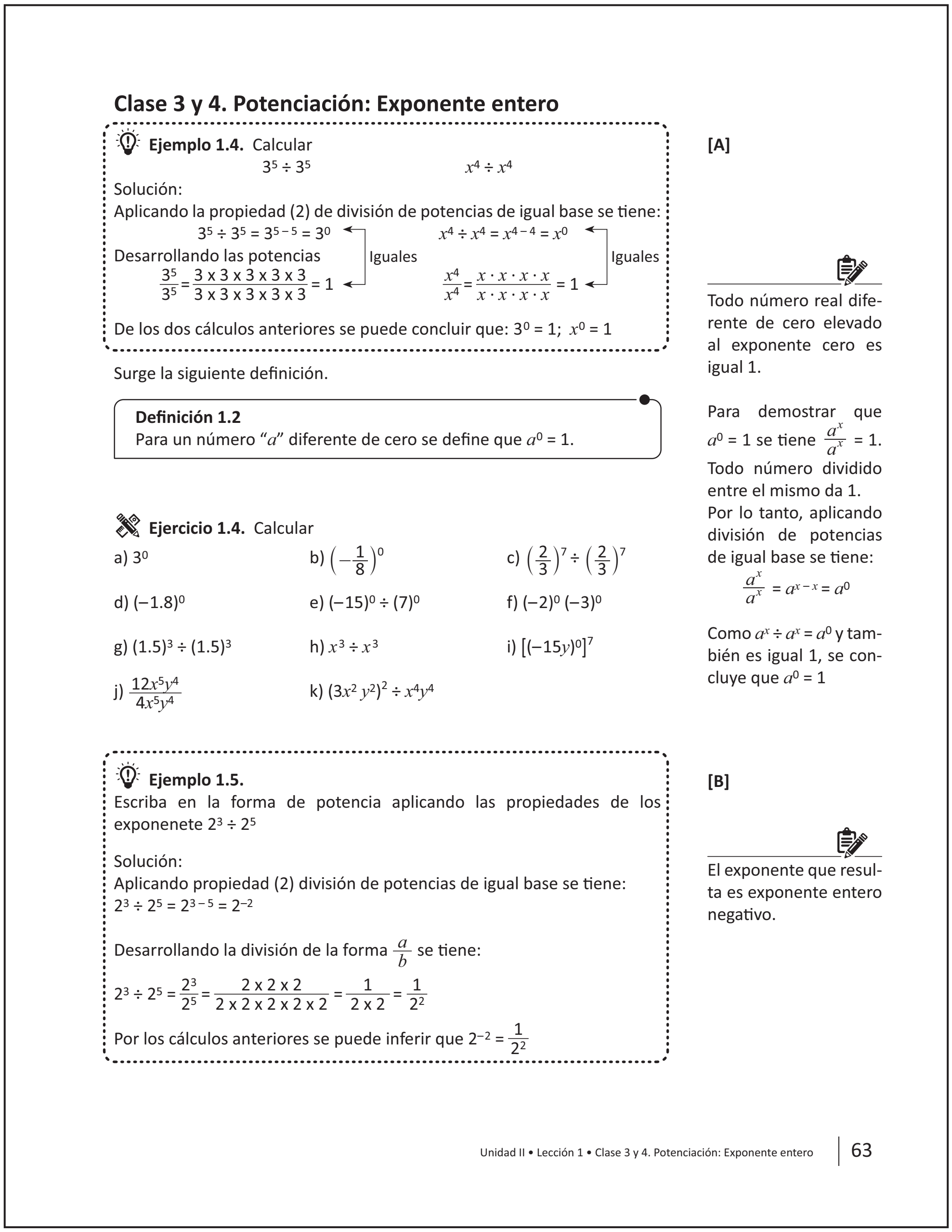
Objetivo: **[A]** Calcular potencias de igual base y exponente cero.

Evaluación: Ejercicio 1.4

Unidad II. Lección 1.

Clase 3 y 4

(Continúa en la siguiente página)



Clase 3 y 4. Potenciación: Exponente entero

Ejemplo 1.4. Calcular

$3^5 \div 3^5$ $\quad$ $x^4 \div x^4$

Solución:

Aplicando la propiedad (2) de división de potencias de igual base se tiene:

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$ $\quad$ $x^4 \div x^4 = x^{4-4} = x^0$

Desarrollando las potencias $\quad$ Iguales $\quad$ Iguales

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3}{3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3} = 1 \qquad \frac{x^4}{x^4} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x} = 1$$

De los dos cálculos anteriores se puede concluir que: $3^0 = 1$; $x^0 = 1$

[A]

Todo número real diferente de cero elevado al exponente cero es igual 1.

Para demostrar que $a^0 = 1$ se tiene $\frac{a^x}{a^x} = 1$. Todo número dividido entre el mismo da 1. Por lo tanto, aplicando división de potencias de igual base se tiene:

$$\frac{a^x}{a^x} = a^{x-x} = a^0$$

Como $a^x \div a^x = a^0$ y también es igual 1, se concluye que $a^0 = 1$

Surge la siguiente definición.

Definición 1.2
Para un número "a" diferente de cero se define que $a^0 = 1$.

Ejercicio 1.4. Calcular

a) 3^0 $\quad$ b) $\left(-\frac{1}{8}\right)^0$ $\quad$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \div \left(\frac{2}{3}\right)^7$

d) $(-1.8)^0$ $\quad$ e) $(-15)^0 \div (7)^0$ $\quad$ f) $(-2)^0\,(-3)^0$

g) $(1.5)^3 \div (1.5)^3$ $\quad$ h) $x^3 \div x^3$ $\quad$ i) $[(-15y)^0]^7$

j) $\frac{12x^5y^4}{4x^5y^4}$ $\quad$ k) $(3x^2\,y^2)^2 \div x^4y^4$

Ejemplo 1.5.

Escriba en la forma de potencia aplicando las propiedades de los exponenete $2^3 \div 2^5$

Solución:

Aplicando propiedad (2) división de potencias de igual base se tiene:

$2^3 \div 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2}$

Desarrollando la división de la forma $\frac{a}{b}$ se tiene:

$$2^3 \div 2^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \text{ x } 2 \text{ x } 2}{2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2} = \frac{1}{2 \text{ x } 2} = \frac{1}{2^2}$$

Por los cálculos anteriores se puede inferir que $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

[B]

El exponente que resulta es exponente entero negativo.

[A] Exponente cero

Ejemplo 1.4

(10 min)

*Presentar el ejemplo en la pizarra y permitir que lo resuelvan sin ayuda.

M: ¿Qué propiedad se puede aplicar para resolver el ejercicio?

RP: División de potencias de igual base o división de potencias de igual exponente.

M: Al aplicar la división de potencias de igual base ¿Qué sucede con los exponentes?

RP: Resulta cero, es decir queda tres a la cero y x a la cero.

M: Al aplicar la división de potencias de igual exponente ¿Qué resulta?

Resulta 1 elevado a la 5 y 1 elevado a la cuatro

M: ¿A qué es igual uno elevado a cualquier exponente?

RP: A 1

M: ¿Qué se puede concluir de las potencias elevadas al exponente cero?

RP: Todo número excepto cero (0) elevado a la cero es 1.

Definición 1.2

Ejercicio 1.4

(20 min) Soluciones:

a) 1 $\quad$ b) 1 $\quad$ c) 1 $\quad$ d) 1

e) 1 $\quad$ f) 1 $\quad$ g) 1 $\quad$ h) 1

i) 1 $\quad$ j) 3 $\quad$ k) 9

[B] Exponente negativo

Ejemplo 1.5. (15 min)

*Presentar el ejercicio en la pizarra y hacer preguntas de inducción para deducir la propiedad de los exponentes negativos.

Clase 3 y 4
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Calcular potencias con exponente negativo.

Evaluación: Ejercicio 1.5

Definición 1.3
*Analizar con los estudiantes la deducción de la potencia negativa.

Ejercicio 1.5
(15 min) Soluciones

a) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ b) $\frac{1}{4^7}$

c) 2^5 d) $(-10)^2$

e) $\frac{1}{(7.2)^4}$ f) $\frac{1}{a}$

g) a^3 h) $\frac{1}{a^5}$

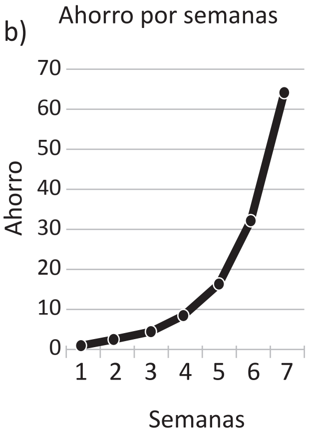
i) $\frac{1}{15^2}$ j) $\frac{1}{a^5}$

k) $\left(\frac{b}{a}\right)^5$

Ejercicio 1.6
(30 min) Soluciones:

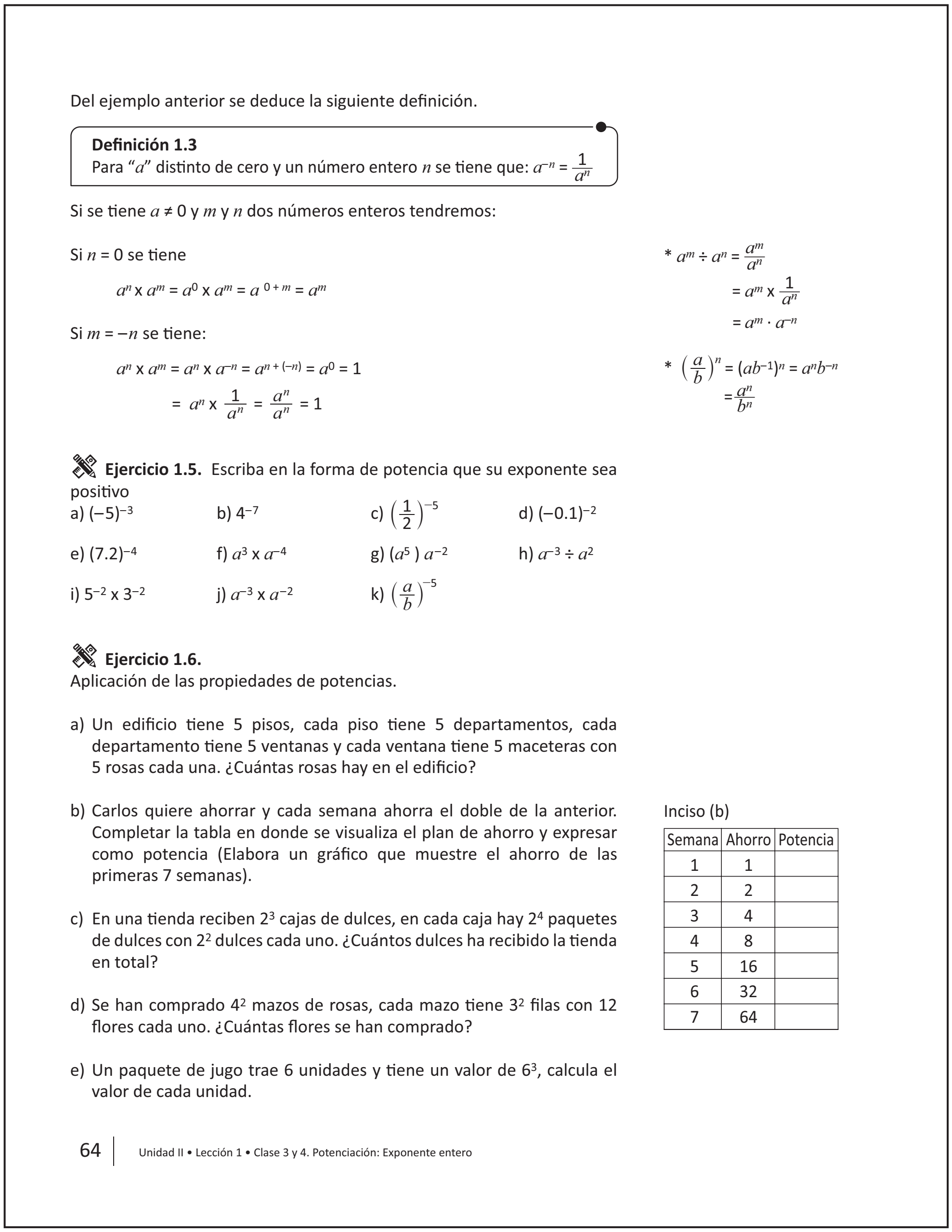
a) 3,125 rosas

b)



Completar tabla:
$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$

c) 512 dulces



Del ejemplo anterior se deduce la siguiente definición.

Definición 1.3
Para "a" distinto de cero y un número entero n se tiene que: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Si se tiene $a \neq 0$ y m y n dos números enteros tendremos:

Si $n = 0$ se tiene

$$a^n \text{ x } a^m = a^0 \text{ x } a^m = a^{0+m} = a^m$$

Si $m = -n$ se tiene:

$$a^n \text{ x } a^m = a^n \text{ x } a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$
$$= a^n \text{ x } \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$* \; a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n}$$
$$= a^m \text{ x } \frac{1}{a^n}$$
$$= a^m \cdot a^{-n}$$

$$* \; \left(\frac{a}{b}\right)^n = (ab^{-1})^n = a^n b^{-n}$$
$$= \frac{a^n}{b^n}$$

Ejercicio 1.5. Escriba en la forma de potencia que su exponente sea positivo

a) $(-5)^{-3}$ b) 4^{-7} c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ d) $(-0.1)^{-2}$

e) $(7.2)^{-4}$ f) $a^3 \text{ x } a^{-4}$ g) $(a^5)\, a^{-2}$ h) $a^{-3} \div a^2$

i) $5^{-2} \text{ x } 3^{-2}$ j) $a^{-3} \text{ x } a^{-2}$ k) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5}$

Ejercicio 1.6.
Aplicación de las propiedades de potencias.

a) Un edificio tiene 5 pisos, cada piso tiene 5 departamentos, cada departamento tiene 5 ventanas y cada ventana tiene 5 maceteras con 5 rosas cada una. ¿Cuántas rosas hay en el edificio?

b) Carlos quiere ahorrar y cada semana ahorra el doble de la anterior. Completar la tabla en donde se visualiza el plan de ahorro y expresar como potencia (Elabora un gráfico que muestre el ahorro de las primeras 7 semanas).

c) En una tienda reciben 2^3 cajas de dulces, en cada caja hay 2^4 paquetes de dulces con 2^2 dulces cada uno. ¿Cuántos dulces ha recibido la tienda en total?

d) Se han comprado 4^2 mazos de rosas, cada mazo tiene 3^2 filas con 12 flores cada uno. ¿Cuántas flores se han comprado?

e) Un paquete de jugo trae 6 unidades y tiene un valor de 6^3, calcula el valor de cada unidad.

Inciso (b)

Semana	Ahorro	Potencia
1	1	
2	2	
3	4	
4	8	
5	16	
6	32	
7	64	

64 | Unidad II • Lección 1 • Clase 3 y 4. Potenciación: Exponente entero

d) $4^2 \text{ x } 3^2 \text{ x } 12$ = 1,728 flores

e) $6^2 = 36$

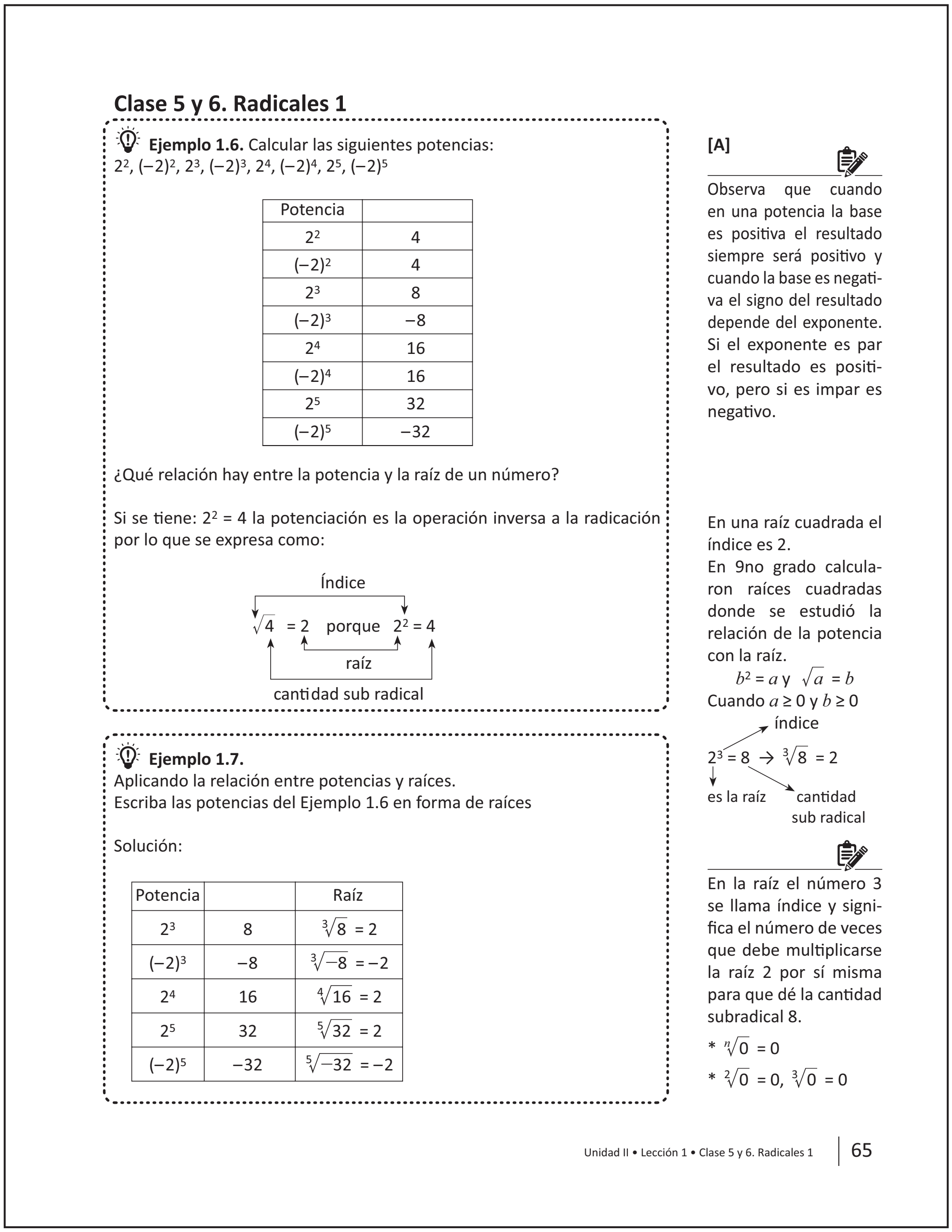
Objetivo: **[A]** Calcular raíces aplicando la potenciación.

Evaluación: Ejercicio 1.7

Unidad II. Lección 1.

Clase 5 y 6

(Continúa en la siguiente página)



Clase 5 y 6. Radicales 1

Ejemplo 1.6. Calcular las siguientes potencias:
2^2, $(-2)^2$, 2^3, $(-2)^3$, 2^4, $(-2)^4$, 2^5, $(-2)^5$

Potencia	
2^2	4
$(-2)^2$	4
2^3	8
$(-2)^3$	−8
2^4	16
$(-2)^4$	16
2^5	32
$(-2)^5$	−32

¿Qué relación hay entre la potencia y la raíz de un número?

Si se tiene: $2^2 = 4$ la potenciación es la operación inversa a la radicación por lo que se expresa como:

Índice

$\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 4$

raíz

cantidad sub radical

Ejemplo 1.7.
Aplicando la relación entre potencias y raíces.
Escriba las potencias del Ejemplo 1.6 en forma de raíces

Solución:

Potencia		Raíz
2^3	8	$\sqrt[3]{8} = 2$
$(-2)^3$	−8	$\sqrt[3]{-8} = -2$
2^4	16	$\sqrt[4]{16} = 2$
2^5	32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$(-2)^5$	−32	$\sqrt[5]{-32} = -2$

[A]

Observa que cuando en una potencia la base es positiva el resultado siempre será positivo y cuando la base es negativa el signo del resultado depende del exponente. Si el exponente es par el resultado es positivo, pero si es impar es negativo.

En una raíz cuadrada el índice es 2.
En 9no grado calcularon raíces cuadradas donde se estudió la relación de la potencia con la raíz.

$b^2 = a$ y $\sqrt{a} = b$

Cuando $a \geq 0$ y $b \geq 0$

índice

$2^3 = 8 \rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

es la raíz

cantidad sub radical

En la raíz el número 3 se llama índice y significa el número de veces que debe multiplicarse la raíz 2 por sí misma para que dé la cantidad subradical 8.

* $\sqrt[n]{0} = 0$
* $\sqrt[2]{0} = 0$, $\sqrt[3]{0} = 0$

Unidad II • Lección 1 • Clase 5 y 6. Radicales 1 | 65

*Pedir a los estudiantes que propongan ejemplos de diferentes raíces.

[A]

Ejemplo 1.6

(10 min)
*Presentar el ejemplo en la pizarra y permitir que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE.
M: ¿Qué relación hay entre la potencia y la raíz de un número?
RP: La potenciación es la operación inversa a la radicación.

Ejemplo 1.7

(10 min)
*Completar la tabla y hacer que los estudiantes noten que los términos de la potencia son también términos de la radicación pero con diferente significado.
M: ¿Si 8 es el resultado de la potencia que es en la radicación?
RP: Cantidad subradical
M: ¿Si 3 es el exponente que representa en la radicación?
RP: El índice de la raíz
M: ¿Si 2 es la base que representa en la radicación?
RP: La raíz.

Concluye en los significados de la cantidad sub radical, índice y raíz en la radicación.

Clase 5 y 6
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Escribir raíces en forma de una potencia.

Evaluación: Ejercicio 1.8

Definición 1.4
(5 min)
*Analizar las gráficas para encontrar la relación existente entre la potencia y raíz.
Además la forma que tiene cuando n es par o impar.
*Es importante que noten la forma de la gráfica ya que esto les facilitara el estudio de las funciones exponenciales.

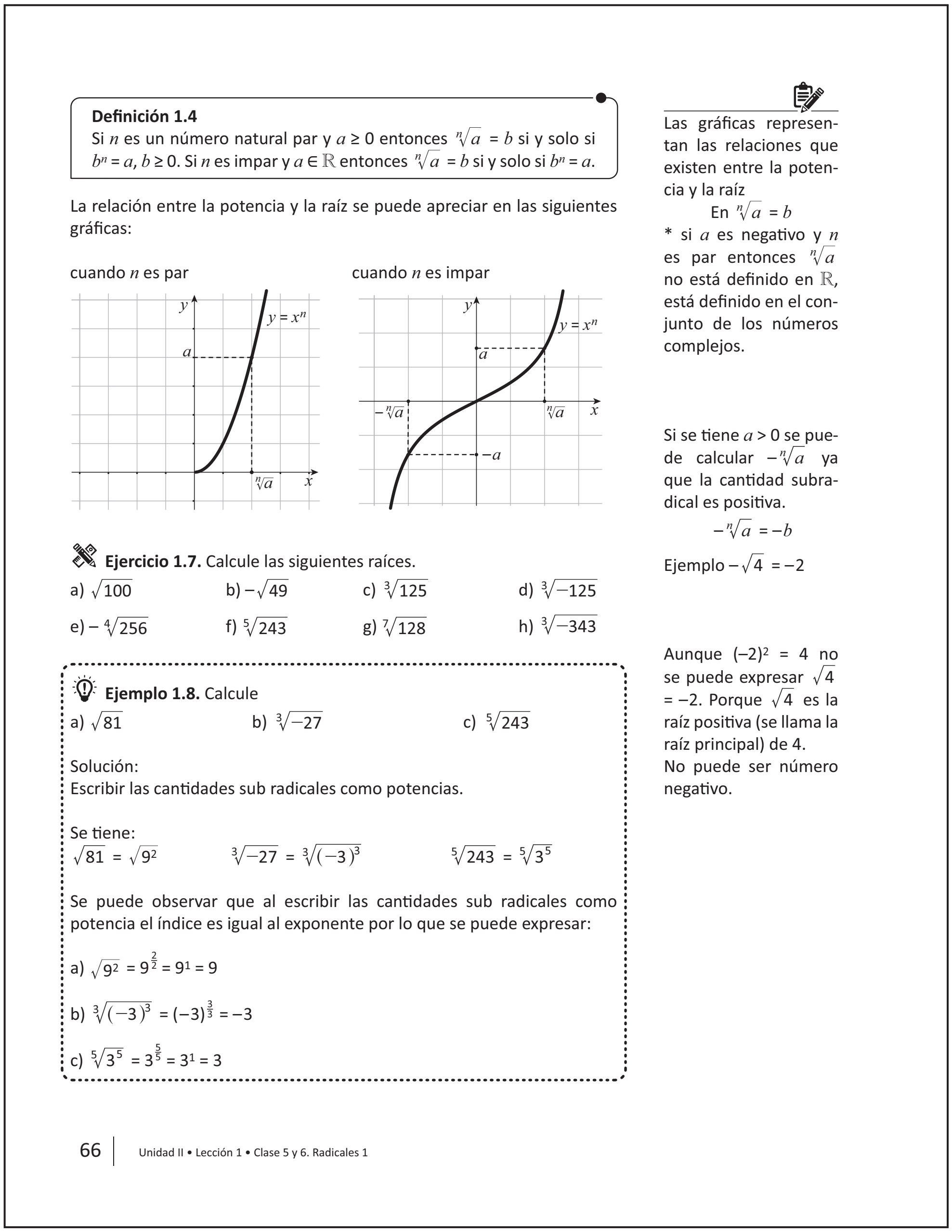
Ejercicio 1.7
(20 min) Soluciones

a) 10	b) –7	c) 5
d) –5	e) –4	f) 3
g) 2	h) –7	

[B]

Ejemplo 1.8
(20 min)
M: ¿Cómo se puede escribir una raíz como una potencia?
RP: Como el índice es el exponente en la potencia, se busca un número que elevado al exponente indicado de como resultado la cantidad sub radical.

Concluye que la raíz de un número cuyo exponente sea el mismo que el índice es el mismo número.



Definición 1.4
Si n es un número natural par y $a \geq 0$ entonces $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $b^n = a$, $b \geq 0$. Si n es impar y $a \in \mathbb{R}$ entonces $\sqrt[n]{a} = b$ si y solo si $b^n = a$.

La relación entre la potencia y la raíz se puede apreciar en las siguientes gráficas:

cuando n es par

cuando n es impar

Las gráficas representan las relaciones que existen entre la potencia y la raíz

En $\sqrt[n]{a} = b$

* si a es negativo y n es par entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definido en $\mathbb{R}$, está definido en el conjunto de los números complejos.

Si se tiene $a > 0$ se puede calcular $-\sqrt[n]{a}$ ya que la cantidad subradical es positiva.

$-\sqrt[n]{a} = -b$

Ejemplo $-\sqrt{4} = -2$

Ejercicio 1.7. Calcule las siguientes raíces.

a) $\sqrt{100}$
b) $-\sqrt{49}$
c) $\sqrt[3]{125}$
d) $\sqrt[3]{-125}$
e) $-\sqrt[4]{256}$
f) $\sqrt[5]{243}$
g) $\sqrt[7]{128}$
h) $\sqrt[3]{-343}$

Aunque $(-2)^2 = 4$ no se puede expresar $\sqrt{4} = -2$. Porque $\sqrt{4}$ es la raíz positiva (se llama la raíz principal) de 4.
No puede ser número negativo.

Ejemplo 1.8. Calcule

a) $\sqrt{81}$
b) $\sqrt[3]{-27}$
c) $\sqrt[5]{243}$

Solución:
Escribir las cantidades sub radicales como potencias.

Se tiene:
$\sqrt{81} = \sqrt{9^2}$ $\quad$ $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3}$ $\quad$ $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5}$

Se puede observar que al escribir las cantidades sub radicales como potencia el índice es igual al exponente por lo que se puede expresar:

a) $\sqrt{9^2} = 9^{\frac{2}{2}} = 9^1 = 9$

b) $\sqrt[3]{(-3)^3} = (-3)^{\frac{3}{3}} = -3$

c) $\sqrt[5]{3^5} = 3^{\frac{5}{5}} = 3^1 = 3$

66 | Unidad II • Lección 1 • Clase 5 y 6. Radicales 1

Objetivo: **[A]** Deducir las propiedades de las expresiones radicales.

Evaluación: Ejercicio 1.9

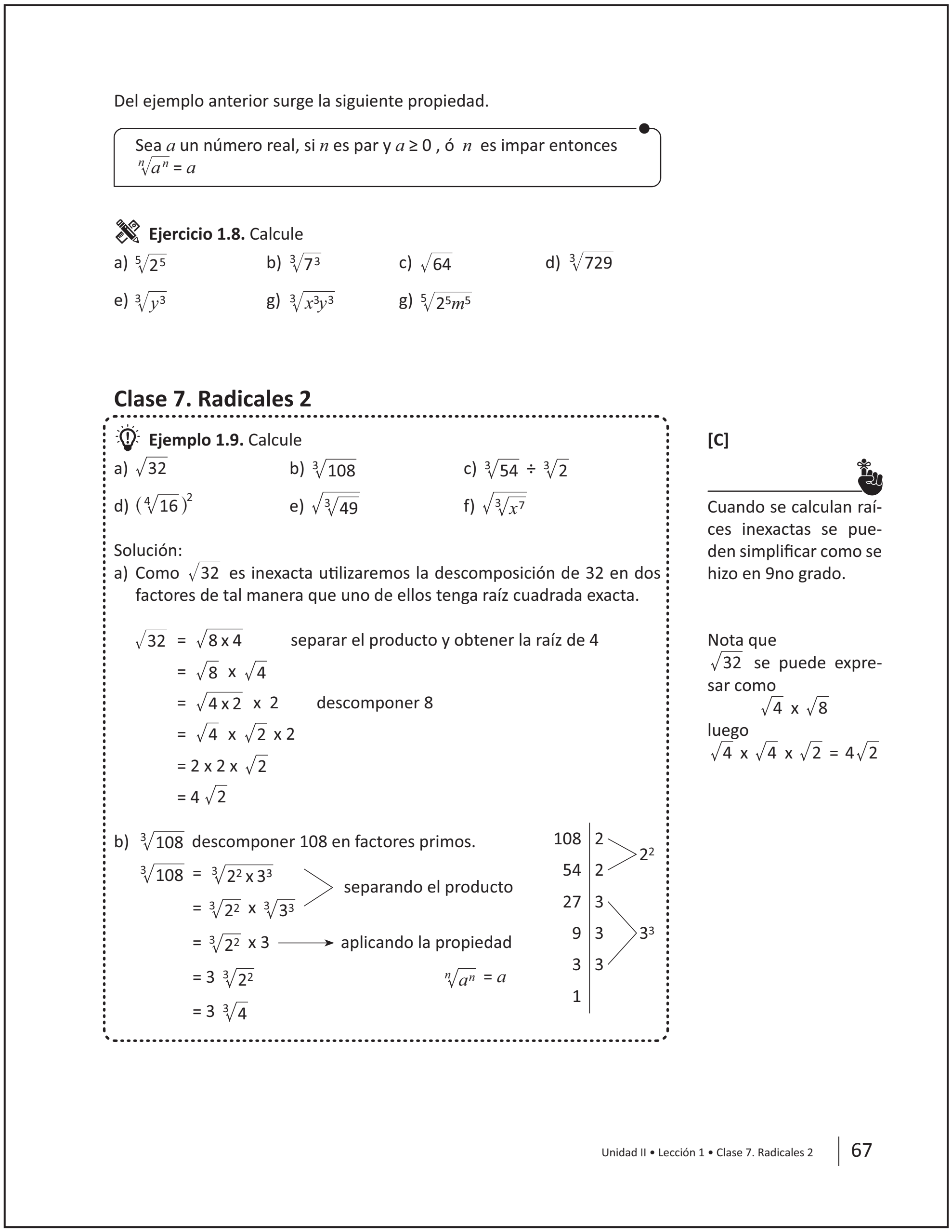
Unidad II. Lección 1.

Clase 5 y 6

(Continuación)

Clase 7

(Continúa en la siguiente página)



Del ejemplo anterior surge la siguiente propiedad.

Sea a un número real, si n es par y $a \geq 0$, ó n es impar entonces
$\sqrt[n]{a^n} = a$

Ejercicio 1.8. Calcule

a) $\sqrt[5]{2^5}$ b) $\sqrt[3]{7^3}$ c) $\sqrt{64}$ d) $\sqrt[3]{729}$

e) $\sqrt[3]{y^3}$ g) $\sqrt[3]{x^3y^3}$ g) $\sqrt[5]{2^5m^5}$

Clase 7. Radicales 2

Ejemplo 1.9. Calcule

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{108}$ c) $\sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2}$

d) $(\sqrt[4]{16})^2$ e) $\sqrt{\sqrt[3]{49}}$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}$

Solución:

a) Como $\sqrt{32}$ es inexacta utilizaremos la descomposición de 32 en dos factores de tal manera que uno de ellos tenga raíz cuadrada exacta.

$\sqrt{32} = \sqrt{8 \text{ x } 4}$ separar el producto y obtener la raíz de 4

$= \sqrt{8} \text{ x } \sqrt{4}$

$= \sqrt{4 \text{ x } 2} \text{ x } 2$ descomponer 8

$= \sqrt{4} \text{ x } \sqrt{2} \text{ x } 2$

$= 2 \text{ x } 2 \text{ x } \sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{108}$ descomponer 108 en factores primos.

$\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{2^2 \text{ x } 3^3}$

$= \sqrt[3]{2^2} \text{ x } \sqrt[3]{3^3}$ separando el producto

$= \sqrt[3]{2^2} \text{ x } 3 \longrightarrow$ aplicando la propiedad $\sqrt[n]{a^n} = a$

$= 3\sqrt[3]{2^2}$

$= 3\sqrt[3]{4}$

108	2	2^2
54	2	
27	3	3^3
9	3	
3	3	
1		

[C]

Cuando se calculan raíces inexactas se pueden simplificar como se hizo en 9no grado.

Nota que $\sqrt{32}$ se puede expresar como
$\sqrt{4} \text{ x } \sqrt{8}$
luego
$\sqrt{4} \text{ x } \sqrt{4} \text{ x } \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ejercicio 1.8

(25 min) Soluciones

a) 2 b) 7 c) 8 d) 9
e) y f) xy g) $2m$

[Hasta aquí Clase 5 y 6]

[Desde aquí Clase 7]

[A] Propiedades de las raíces

Ejemplo 1.9

(25 min)

*Presentar los ejercicios planteados en el ejemplo y permitir que los resuelvan sin ver el LE.

*En la solución de los ejercicios se necesita tener claridad en la simplificación de radicales, puede ser que hayan estudiantes que no recuerden ya que es contenido estudiado en noveno, por lo que el docente debe hacer una inducción en este ejemplo, hacer preguntas orientadoras de tal manera que conlleven al estudiante a resolverlos además deben tener en cuenta las propiedades que se aplican en cada caso.

Clase 7
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Escribir raíces en forma de una potencia.

Evaluación: Ejercicio 1.9

M: ¿Qué propiedades se debe tener en cuenta en el inciso c)?
RP: Se divide la cantidad sub radical y se copia la raíz.

*Hacer preguntas similares para obtener las propiedades de d) e) y f)

Concluye con las propiedades de las raíces

Ejercicio 1.9
(20 min) Soluciones

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[4]{2}$

c) $5\sqrt[3]{4}$ d) $2\sqrt[3]{9}$

e) $2x$ f) $3x^2\sqrt{3x}$

g) $\sqrt[6]{8}$ h) $x\sqrt{x}$

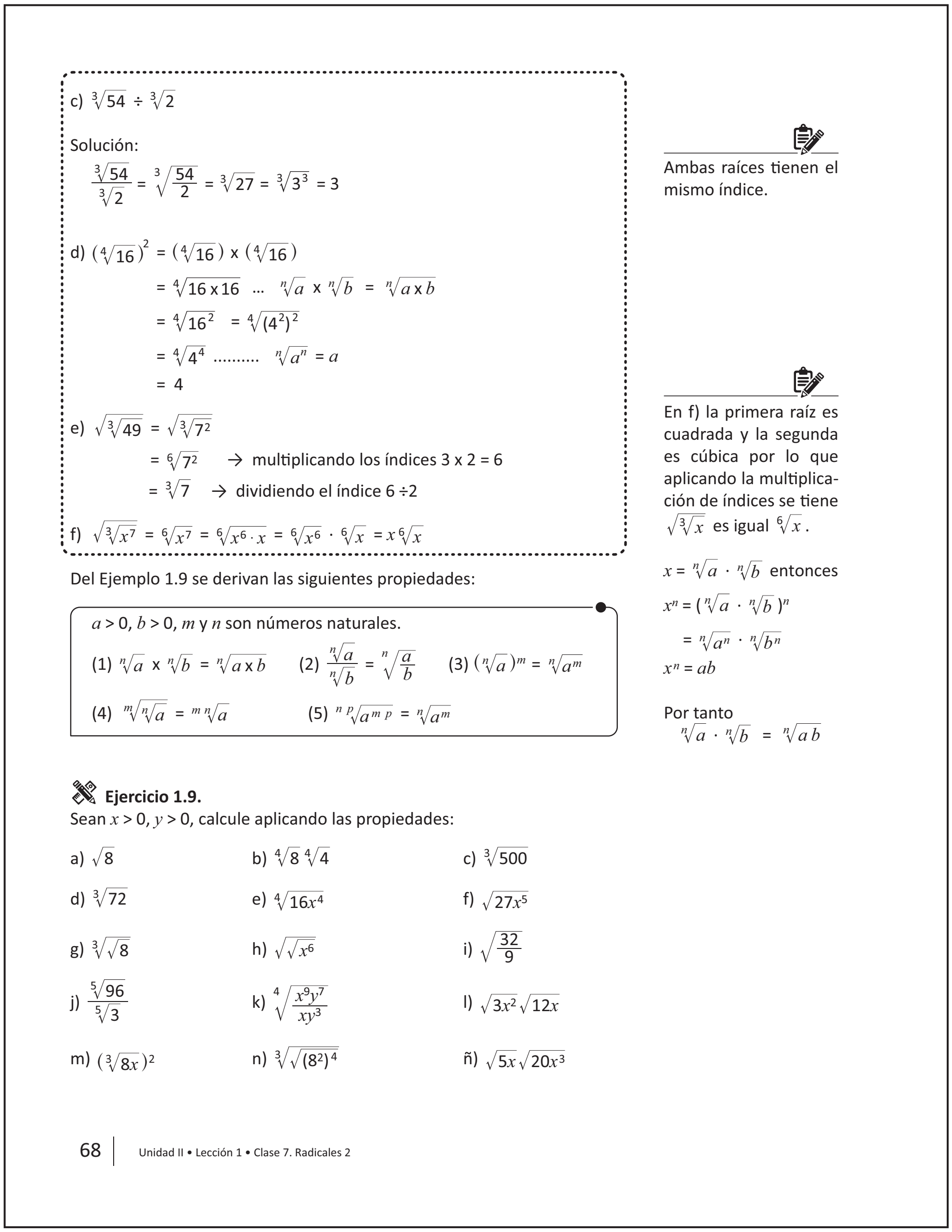
i) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ j) 2

k) x^2y l) $6x\sqrt{x}$

m) $4\sqrt[3]{x^2}$ n) $8\sqrt[3]{8}$

ñ) $10x^2$

El tiempo no es suficiente para terminar los ejercicios por lo tanto se pueden asignar como tarea para trabajar en casa. Se pueden discutir algunos en la pizarra.



c) $\sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

d) $(\sqrt[4]{16})^2 = (\sqrt[4]{16}) \text{ x } (\sqrt[4]{16})$

$= \sqrt[4]{16 \text{ x } 16}$ … $\sqrt[n]{a} \text{ x } \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \text{ x } b}$

$= \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2}$

$= \sqrt[4]{4^4}$ ………. $\sqrt[n]{a^n} = a$

$= 4$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{49}} = \sqrt{\sqrt[3]{7^2}}$

$= \sqrt[6]{7^2}$ → multiplicando los índices 3 x 2 = 6

$= \sqrt[3]{7}$ → dividiendo el índice 6 ÷2

f) $\sqrt{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[6]{x^7} = \sqrt[6]{x^6 \cdot x} = \sqrt[6]{x^6} \cdot \sqrt[6]{x} = x\sqrt[6]{x}$

Ambas raíces tienen el mismo índice.

En f) la primera raíz es cuadrada y la segunda es cúbica por lo que aplicando la multiplicación de índices se tiene $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ es igual $\sqrt[6]{x}$.

Del Ejemplo 1.9 se derivan las siguientes propiedades:

$a > 0$, $b > 0$, m y n son números naturales.

(1) $\sqrt[n]{a} \text{ x } \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \text{ x } b}$ (2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}$ (5) $\sqrt[n\,p]{a^{m\,p}} = \sqrt[n]{a^m}$

$x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ entonces

$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n$

$= \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b^n}$

$x^n = ab$

Por tanto

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$

Ejercicio 1.9.

Sean $x > 0$, $y > 0$, calcule aplicando las propiedades:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[4]{8}\,\sqrt[4]{4}$ c) $\sqrt[3]{500}$

d) $\sqrt[3]{72}$ e) $\sqrt[4]{16x^4}$ f) $\sqrt{27x^5}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ h) $\sqrt{\sqrt{x^6}}$ i) $\sqrt{\frac{32}{9}}$

j) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ k) $\sqrt[4]{\frac{x^9y^7}{xy^3}}$ l) $\sqrt{3x^2}\sqrt{12x}$

m) $(\sqrt[3]{8x})^2$ n) $\sqrt[3]{\sqrt{(8^2)^4}}$ ñ) $\sqrt{5x}\sqrt{20x^3}$

68 | Unidad II • Lección 1 • Clase 7. Radicales 2

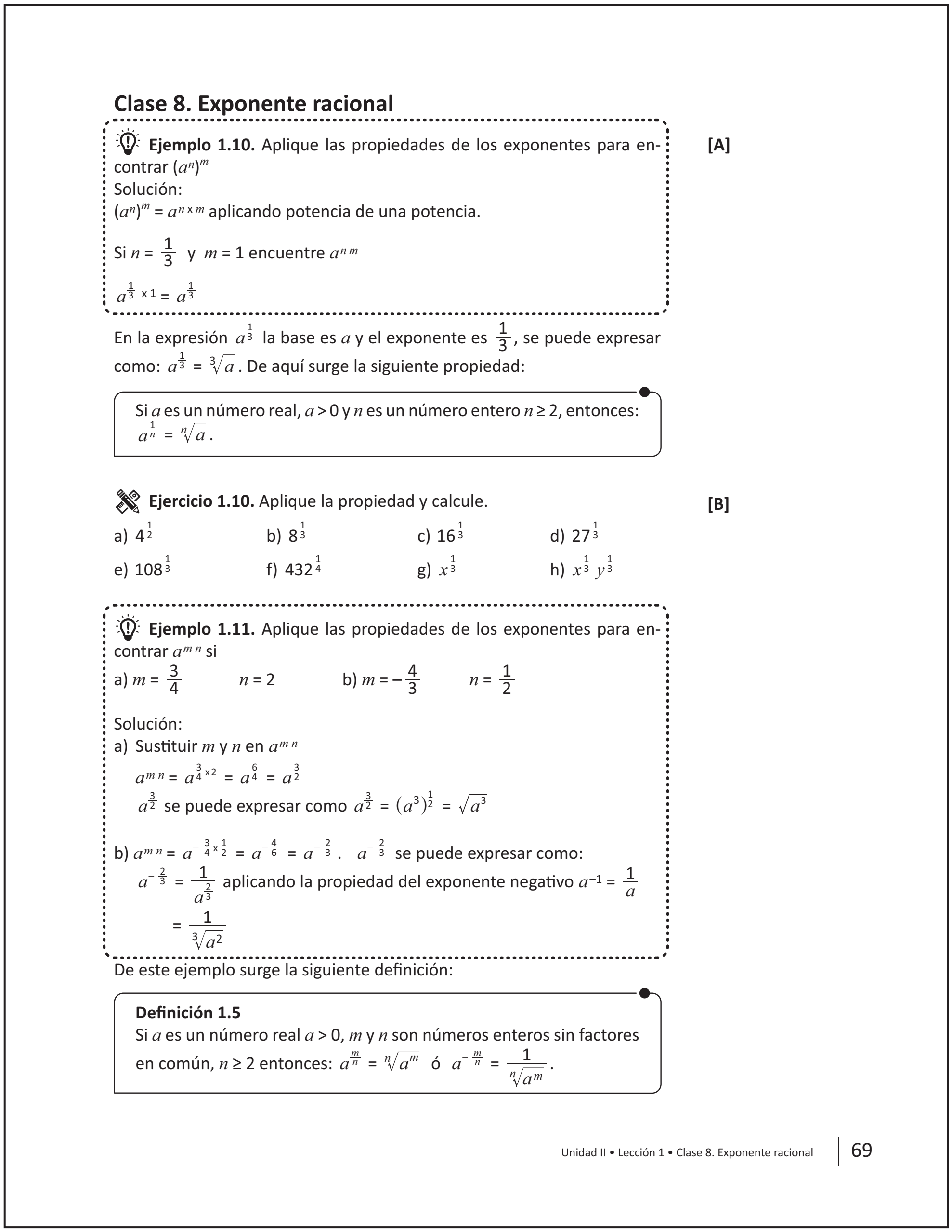
Objetivo: **[A]** Definir una potencia con exponente racional.

Evaluación: Ejercicio 1.10, Ejercicio 1.11

Unidad II. Lección 1.

Clase 8

(Continúa en la siguiente página)



Clase 8. Exponente racional

Ejemplo 1.10. Aplique las propiedades de los exponentes para encontrar $(a^n)^m$ **[A]**

Solución:

$(a^n)^m = a^{n \times m}$ aplicando potencia de una potencia.

Si $n = \frac{1}{3}$ y $m = 1$ encuentre $a^{n\,m}$

$a^{\frac{1}{3} \times 1} = a^{\frac{1}{3}}$

En la expresión $a^{\frac{1}{3}}$ la base es a y el exponente es $\frac{1}{3}$, se puede expresar como: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$. De aquí surge la siguiente propiedad:

Si a es un número real, $a > 0$ y n es un número entero $n \geq 2$, entonces: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Ejercicio 1.10. Aplique la propiedad y calcule. **[B]**

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $16^{\frac{1}{3}}$ d) $27^{\frac{1}{3}}$

e) $108^{\frac{1}{3}}$ f) $432^{\frac{1}{4}}$ g) $x^{\frac{1}{3}}$ h) $x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}$

Ejemplo 1.11. Aplique las propiedades de los exponentes para encontrar $a^{m\,n}$ si

a) $m = \frac{3}{4}$ $n = 2$ b) $m = -\frac{4}{3}$ $n = \frac{1}{2}$

Solución:

a) Sustituir m y n en $a^{m\,n}$

$a^{m\,n} = a^{\frac{3}{4} \times 2} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}}$ se puede expresar como $a^{\frac{3}{2}} = (a^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^3}$

b) $a^{m\,n} = a^{-\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}} = a^{-\frac{4}{6}} = a^{-\frac{2}{3}}$. $a^{-\frac{2}{3}}$ se puede expresar como:

$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$ aplicando la propiedad del exponente negativo $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

De este ejemplo surge la siguiente definición:

Definición 1.5

Si a es un número real $a > 0$, m y n son números enteros sin factores en común, $n \geq 2$ entonces: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ó $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Unidad II • Lección 1 • Clase 8. Exponente racional | 69

[A]

Ejemplo 1.10

(10 min)

M: ¿Qué propiedad aplicamos en el ejemplo?

RP: Potencia de una potencia

M: cuando $n = \frac{1}{3}$ y $m = 1$ ¿Qué exponente resulta?

RP: $\frac{1}{3}$

Concluye que $a^{\frac{1}{3}}$ es una potencia con exponente racional y ésta se puede expresar como una raíz $\sqrt[3]{a}$.

Concluir en la propiedad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

*Aclarar que esta propiedad es válida cuando la raíz esté definida.

Ejercicio 1.10

(10 min) Soluciones

a) 2 b) 2 c) $2\sqrt[3]{2}$

d) 3 e)$3\sqrt[3]{4}$ f) $2\sqrt[4]{27}$

g) $\sqrt[3]{x}$ h) $\sqrt[3]{xy}$

[B] Exponente racional con numerador diferente de 1.

Ejemplo 1.11

(10 min)

*Hacer preguntas similares que en [A] Encontrar la forma de escribir el radical cuando el exponente es racional positivo o negativo.

Definición 1.5

*Hacer notar al alumno que cuando el exponente racional es negativo se aplica de manera similar la propiedad del exponente negativo.

Unidad II. Lección 1.

Clase 8

(Continuación)

Clase 9 y 10

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calcular potencias con exponentes racionales.

Evaluación: Ejercicio 1.12

Ejercicio 1.11

(15 min) Soluciones

a) 4 b) 512 c) $\frac{1}{8}$ d) 81

e) 64 f) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{4}$ g) $\frac{1}{3125}$

h) $\frac{9}{8}\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{27\sqrt{2}}{16}$ i) xy^2

j) $\frac{8\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}$ k) $\frac{8x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}$

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

[A]

Ejemplo 1.12

(15 min)

M: En el inciso a ¿qué tienen en común las potencias?

RP: Tienen la misma base y diferente exponente

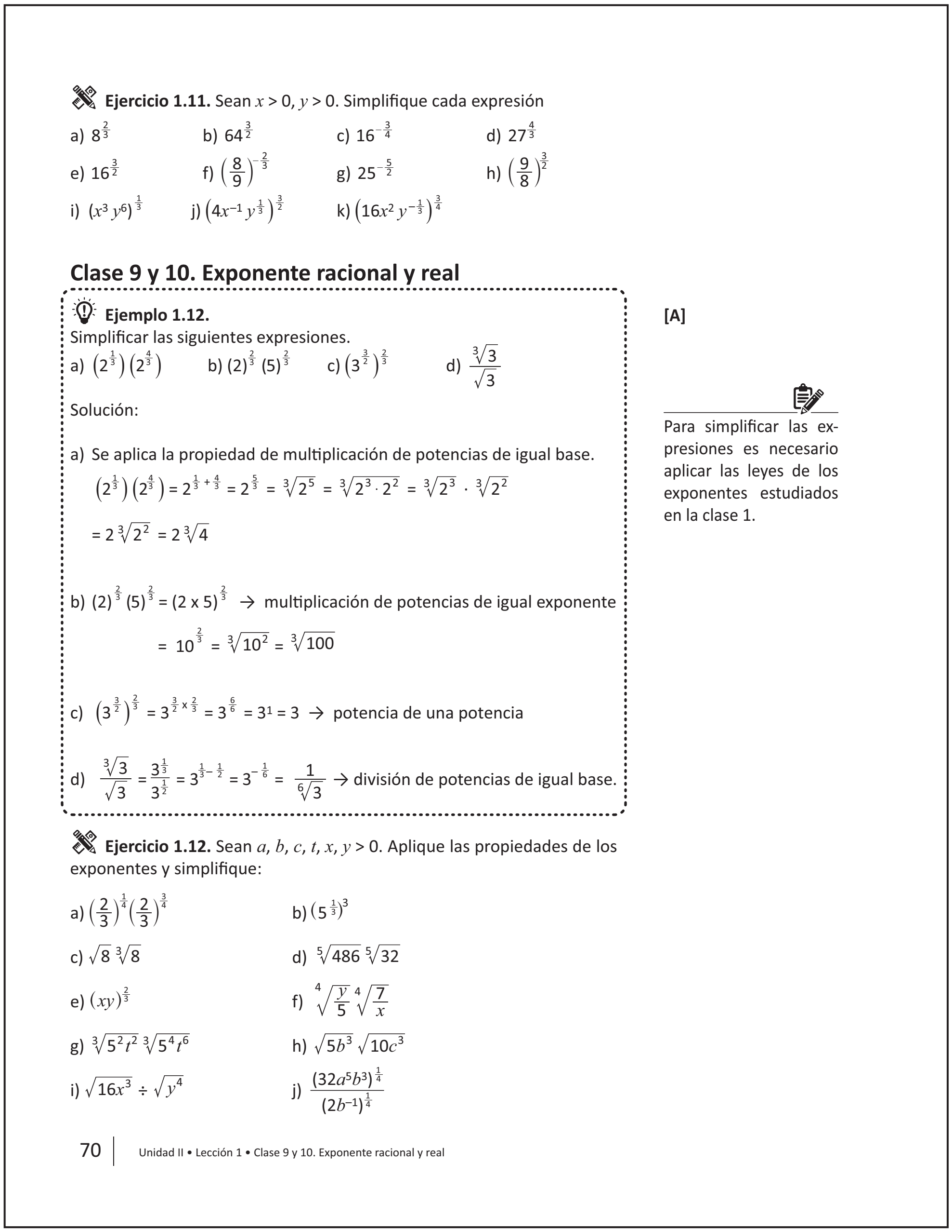
M: ¿Qué propiedad se puede aplicar para simplificar las potencia?

RP: Multiplicación de potencias de igual base.

M: Al escribir con raíz la expresión resultante ¿cómo se puede simplificar?

RP: 2^5 se puede expresar como 2^3 x 2^2 y como la raíz es cúbica resultará $2\sqrt[3]{4}$.

*El docente puede hacer preguntas similares para los demás incisos, ya que se resuelven aplicando propiedades conocidas.



Ejercicio 1.11. Sean $x > 0$, $y > 0$. Simplifique cada expresión

a) $8^{\frac{2}{3}}$ b) $64^{\frac{3}{2}}$ c) $16^{-\frac{3}{4}}$ d) $27^{\frac{4}{3}}$

e) $16^{\frac{3}{2}}$ f) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}$ g) $25^{-\frac{5}{2}}$ h) $\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$

i) $(x^3 y^6)^{\frac{1}{3}}$ j) $\left(4x^{-1} y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ k) $\left(16x^2 y^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

Clase 9 y 10. Exponente racional y real

Ejemplo 1.12.

Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{4}{3}}\right)$ b) $(2)^{\frac{2}{3}}(5)^{\frac{2}{3}}$ c) $\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}$

Solución:

a) Se aplica la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{4}{3}}\right) = 2^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2}$$

$$= 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

b) $(2)^{\frac{2}{3}}(5)^{\frac{2}{3}} = (2 \text{ x } 5)^{\frac{2}{3}}$ → multiplicación de potencias de igual exponente

$$= 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$$

c) $\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{2} \text{ x } \frac{2}{3}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3^1 = 3$ → potencia de una potencia

d) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$ → división de potencias de igual base.

[A]

Para simplificar las expresiones es necesario aplicar las leyes de los exponentes estudiados en la clase 1.

Ejercicio 1.12. Sean $a, b, c, t, x, y > 0$. Aplique las propiedades de los exponentes y simplifique:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ b) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3$

c) $\sqrt{8}\,\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt[5]{486}\,\sqrt[5]{32}$

e) $(xy)^{\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[4]{\frac{y}{5}}\,\sqrt[4]{\frac{7}{x}}$

g) $\sqrt[3]{5^2 t^2}\,\sqrt[3]{5^4 t^6}$ h) $\sqrt{5b^3}\,\sqrt{10c^3}$

i) $\sqrt{16x^3} \div \sqrt{y^4}$ j) $\frac{(32a^5b^3)^{\frac{1}{4}}}{(2b^{-1})^{\frac{1}{4}}}$

70 | Unidad II • Lección 1 • Clase 9 y 10. Exponente racional y real

Ejercicio 1.12. (15 min) Soluciones

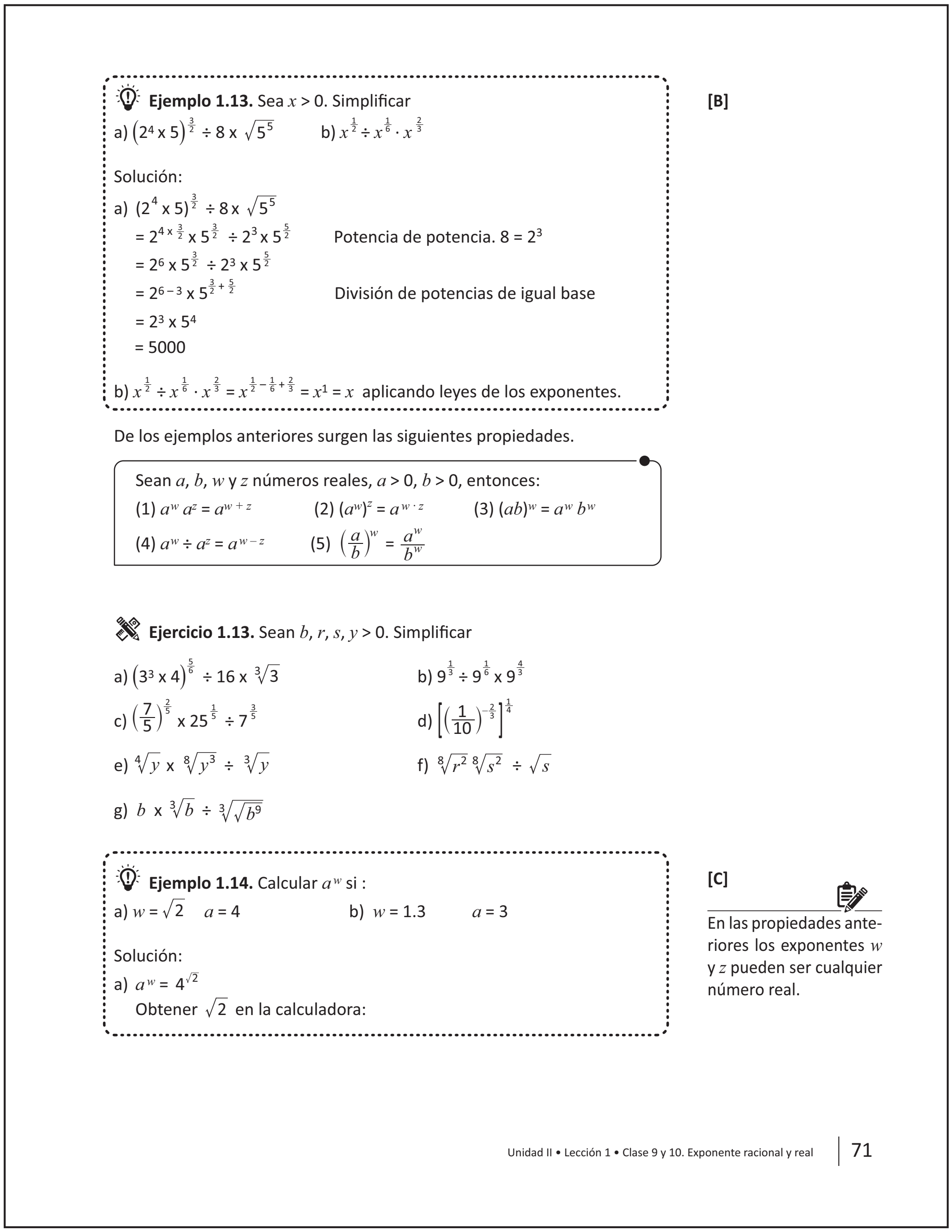
a) 2/3 b) 5 c) $4\sqrt{2}$ d) $6\sqrt[5]{2}$ e) $\sqrt[3]{x^2y^2}$

f) $\sqrt[4]{\frac{7y}{5x}}$ g) $25t^2\sqrt[3]{t^2}$ h) $5bc\sqrt{2bc}$ i) $\frac{4x\sqrt{x}}{y^2}$ j) $2ab\sqrt[4]{a}$

Objetivo: **[B]** Aplicar las propiedades de los exponentes en potencias con exponentes racionales.

Clase 9 y 10
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 1.13



Ejemplo 1.13. Sea $x > 0$. Simplificar

a) $\left(2^4 \text{ x } 5\right)^{\frac{3}{2}} \div 8 \text{ x } \sqrt{5^5}$ b) $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

[B]

Solución:

a) $(2^4 \text{ x } 5)^{\frac{3}{2}} \div 8 \text{ x } \sqrt{5^5}$

$= 2^{4 \text{ x } \frac{3}{2}} \text{ x } 5^{\frac{3}{2}} \div 2^3 \text{ x } 5^{\frac{5}{2}}$ Potencia de potencia. $8 = 2^3$

$= 2^6 \text{ x } 5^{\frac{3}{2}} \div 2^3 \text{ x } 5^{\frac{5}{2}}$

$= 2^{6-3} \text{ x } 5^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}$ División de potencias de igual base

$= 2^3 \text{ x } 5^4$

$= 5000$

b) $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}} = x^1 = x$ aplicando leyes de los exponentes.

De los ejemplos anteriores surgen las siguientes propiedades.

Sean a, b, w y z números reales, $a > 0$, $b > 0$, entonces:

(1) $a^w a^z = a^{w+z}$ (2) $(a^w)^z = a^{w \cdot z}$ (3) $(ab)^w = a^w b^w$

(4) $a^w \div a^z = a^{w-z}$ (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^w = \frac{a^w}{b^w}$

Ejercicio 1.13. Sean $b, r, s, y > 0$. Simplificar

a) $\left(3^3 \text{ x } 4\right)^{\frac{5}{6}} \div 16 \text{ x } \sqrt[3]{3}$ b) $9^{\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{6}} \text{ x } 9^{\frac{4}{3}}$

c) $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{5}} \text{ x } 25^{\frac{1}{5}} \div 7^{\frac{3}{5}}$ d) $\left[\left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}$

e) $\sqrt[4]{y} \text{ x } \sqrt[8]{y^3} \div \sqrt[3]{y}$ f) $\sqrt[8]{r^2}\,\sqrt[8]{s^2} \div \sqrt{s}$

g) $b \text{ x } \sqrt[3]{b} \div \sqrt[3]{\sqrt{b^9}}$

Ejemplo 1.14. Calcular a^w si :

a) $w = \sqrt{2}$ $a = 4$ b) $w = 1.3$ $a = 3$

Solución:

a) $a^w = 4^{\sqrt{2}}$

Obtener $\sqrt{2}$ en la calculadora:

[C]

En las propiedades anteriores los exponentes w y z pueden ser cualquier número real.

Unidad II • Lección 1 • Clase 9 y 10. Exponente racional y real | 71

[B]

Ejemplo 1.13
(15 min)

M: ¿Cómo se puede simplicar cada una de las expresiones dadas?

*Hacer que el estudiante se dé cuenta de que se pueden aplicar las propiedades de los exponentes al simplificar cada expresión.

*Consultar el LE en el caso de que el estudiante no encuentre la estrategia de resolverlo o tenga otras ideas diferentes.

Concluye en las propiedades de los exponentes cuando estos son racionales.

[Hasta aquí Clase 9]

[Desde aquí Clase 10]

Ejercicio 1.13
(20 min) Soluciones

a) $\frac{9}{4}\sqrt[6]{\frac{3^5}{4}} = \frac{9}{4}\sqrt[6]{\frac{243}{4}}$

b) 27 c) $\sqrt[5]{\frac{1}{7}}$

d) $\sqrt[6]{10}$ e) $\sqrt[24]{y^7}$

f) $\sqrt[4]{\frac{r}{s}}$ g) $\frac{1}{\sqrt[6]{b}}$

[C]

Ejemplo 1.14. (15 min)

M: ¿Cómo se puede encontrar el resultado de $4^{\sqrt{2}}$?

RP: No sé

*Pedir a los estudiantes que utilizando su calculadora encuentren la raíz cuadrada de dos.

Clase 9 y 10
(Continuación)

Objetivo: **[C]** Calcular potencias con exponentes reales.

Evaluación: Ejercicio 1.14

*Explicar a los estudiantes que se formará la sucesión de potencias con exponentes 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, … y base 4, de manera que como la raíz cuadrada de dos es un número irracional es infinito y no periódicos por lo que entre más dígitos se utilicen más aproximado será la potencia encontrada.

*Presentar de la misma manera la potencia del inciso b.
Hacer notar la diferencia entre el inciso a y b ya que en el inciso a) el exponente es un numero irracional y en el b) es racional por lo que en el b) se puede encontrar la potencia exacta mientras que en el a) no.

Ejercicio 1.14
(10 min) Soluciones

a) 10.18800591...

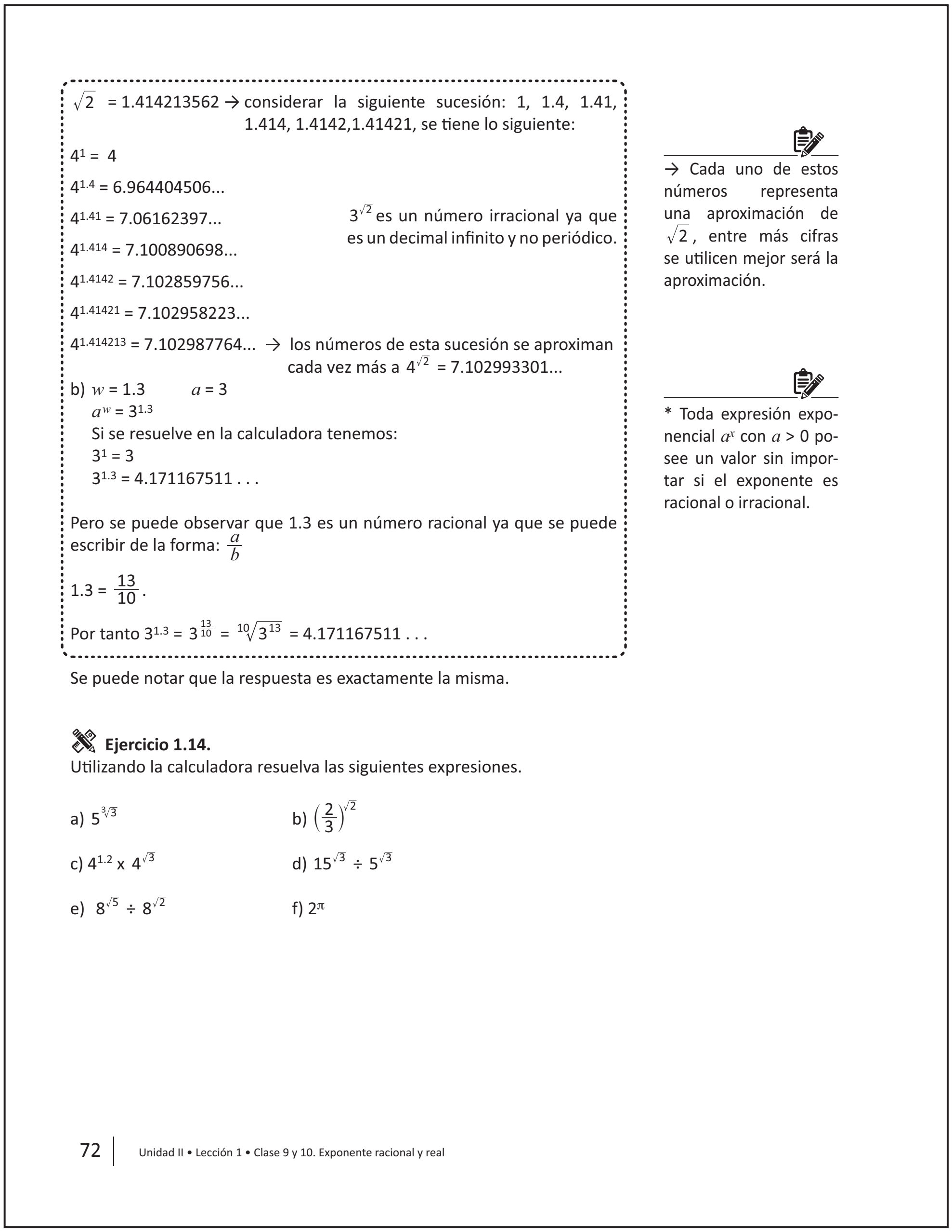
b) 0.5635978831...

c) 58.24658715...

d) 6.704991854...

e) 5.523425404...

f) 8.824977827...



$\sqrt{2}$ = 1.414213562 → considerar la siguiente sucesión: 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,1.41421, se tiene lo siguiente:

$4^{1} = 4$

$4^{1.4} = 6.964404506...$

$4^{1.41} = 7.06162397...$

$4^{1.414} = 7.100890698...$

$4^{1.4142} = 7.102859756...$

$4^{1.41421} = 7.102958223...$

$4^{1.414213} = 7.102987764...$ → los números de esta sucesión se aproximan cada vez más a $4^{\sqrt{2}} = 7.102993301...$

$3^{\sqrt{2}}$ es un número irracional ya que es un decimal infinito y no periódico.

b) $w = 1.3$ $a = 3$
$a^{w} = 3^{1.3}$
Si se resuelve en la calculadora tenemos:
$3^{1} = 3$
$3^{1.3} = 4.171167511...$

Pero se puede observar que 1.3 es un número racional ya que se puede escribir de la forma: $\frac{a}{b}$

$1.3 = \frac{13}{10}$.

Por tanto $3^{1.3} = 3^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{3^{13}} = 4.171167511...$

Se puede notar que la respuesta es exactamente la misma.

→ Cada uno de estos números representa una aproximación de $\sqrt{2}$, entre más cifras se utilicen mejor será la aproximación.

* Toda expresión exponencial a^{x} con $a > 0$ posee un valor sin importar si el exponente es racional o irracional.

Ejercicio 1.14.
Utilizando la calculadora resuelva las siguientes expresiones.

a) $5^{\sqrt[3]{3}}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$

c) $4^{1.2} \times 4^{\sqrt{3}}$

d) $15^{\sqrt{3}} \div 5^{\sqrt{3}}$

e) $8^{\sqrt{5}} \div 8^{\sqrt{2}}$

f) 2^{π}

72 Unidad II • Lección 1 • Clase 9 y 10. Exponente racional y real

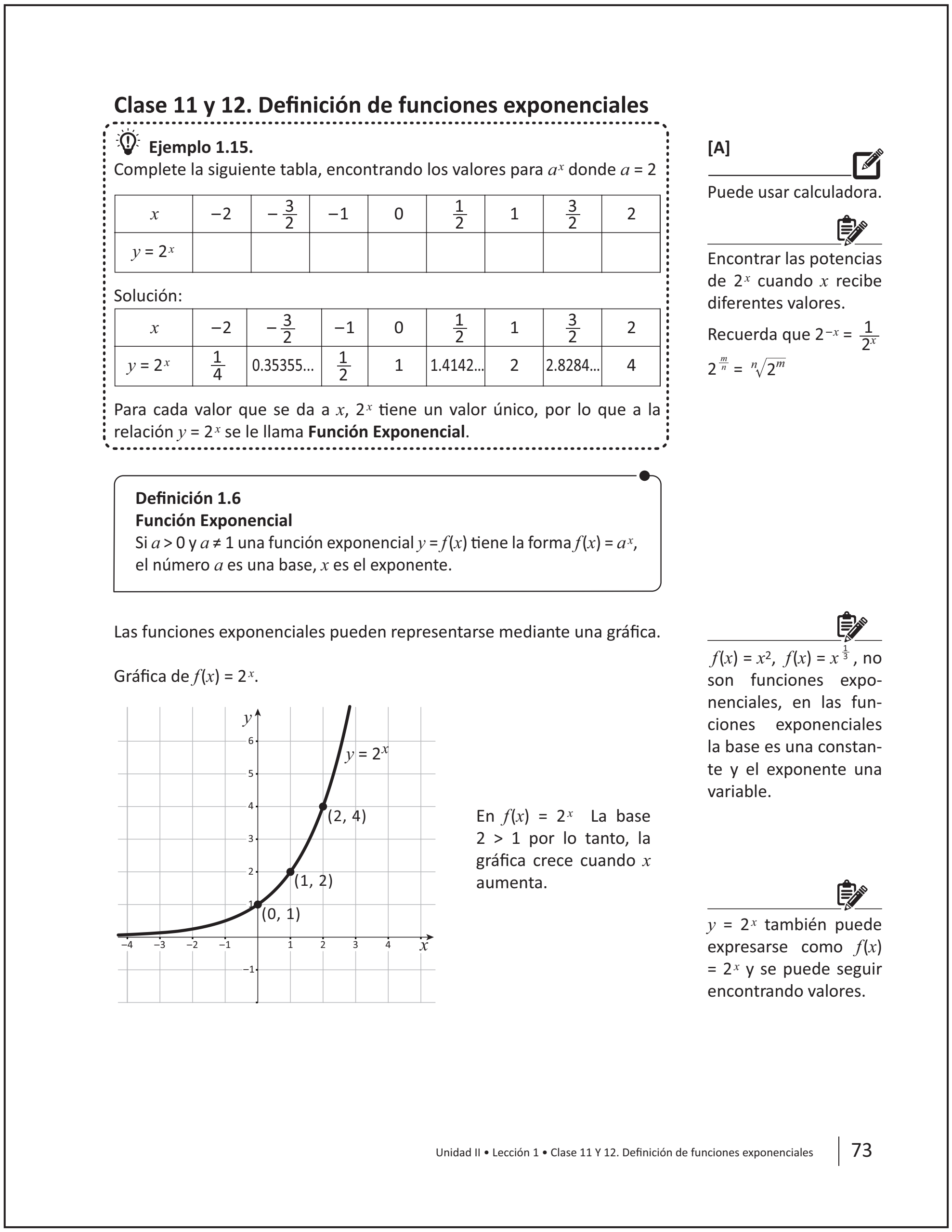
Objetivo: **[A]** Definir una función exponencial.

Evaluación: Ejercicio 1.15

Unidad II. Lección 1.

Clase 11 y 12

(Continúa en la siguiente página)



Clase 11 y 12. Definición de funciones exponenciales

Ejemplo 1.15.
Complete la siguiente tabla, encontrando los valores para a^x donde $a = 2$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = 2^x$								

Solución:

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	0.35355...	$\frac{1}{2}$	1	1.4142...	2	2.8284...	4

Para cada valor que se da a x, 2^x tiene un valor único, por lo que a la relación $y = 2^x$ se le llama **Función Exponencial**.

[A]

Puede usar calculadora.

Encontrar las potencias de 2^x cuando x recibe diferentes valores.

Recuerda que $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$

$2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}$

Definición 1.6
Función Exponencial
Si $a > 0$ y $a \neq 1$ una función exponencial $y = f(x)$ tiene la forma $f(x) = a^x$, el número a es una base, x es el exponente.

Las funciones exponenciales pueden representarse mediante una gráfica.

Gráfica de $f(x) = 2^x$.

En $f(x) = 2^x$ La base $2 > 1$ por lo tanto, la gráfica crece cuando x aumenta.

$f(x) = x^2$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, no son funciones exponenciales, en las funciones exponenciales la base es una constante y el exponente una variable.

$y = 2^x$ también puede expresarse como $f(x) = 2^x$ y se puede seguir encontrando valores.

Unidad II • Lección 1 • Clase 11 Y 12. Definición de funciones exponenciales | 73

*Pedir a los estudiantes que grafiquen los puntos encontrados en la tabla en un plano cartesiano.
Concluir que una función exponencial se puede representar de forma gráfica e inducir a que expliquen la forma que tiene la gráfica o la curva resultante.
M: Como y aumenta cuando x aumenta entonces se le puede llamar a la gráfica creciente.

[A]

Ejemplo 1.15

(10 min)
*Presentar el ejemplo en la pizarra
* El docente debe hacer que el estudiante se dé cuenta de la relación que hay entre los datos de la tabla, para poder definir una función exponencial.

M: ¿Qué pueden decir de los datos encontrados en la tabla?
RP: Que van aumentando a medida que x aumenta.
M: ¿Qué pueden decir de la expresión dada?
RP: La base siempre es 2, solo cambia el exponente.
M: Cuando x recibe valores negativos ¿Cómo es el valor de y?
RP: Cada vez más pequeño
M: ¿Y cuando son valores positivos?
RP: A medida que aumenta x aumenta y.
Se repiten los valores para y al dar los valores a x.
RP: No

Concluye que a la relación dada se le llama función exponencial.
*Aclarar a los estudiantes que en una función exponencial la base es una constante y la variable estará en el exponente.

Definición 1.6. (10 min)

Clase 11 y 12
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Ejemplo 1.16
(25 min)

*Pedir a los estudiantes que hagan la tabla de valores para la función dada y que luego la grafiquen en su cuaderno.

*Hacer una comparación entre las dos gráficas.

M: ¿Cuál es la diferencia entre la función exponencial dada y la anterior?

RP: El exponente es positivo en una y negativo en la otra

M: ¿Qué se puede decir de los valores en la tabla de las dos funciones?

RP: En la función $y = 2^{-x}$ sucede al contrario que en la función $y = 2^x$ ya que cuando x aumenta y decrece, y cuando x disminuye y crece

M: ¿Cómo es la gráfica de las funciones?

RP: Una decrece en los x negativos y la otra decrece en los x positivos.

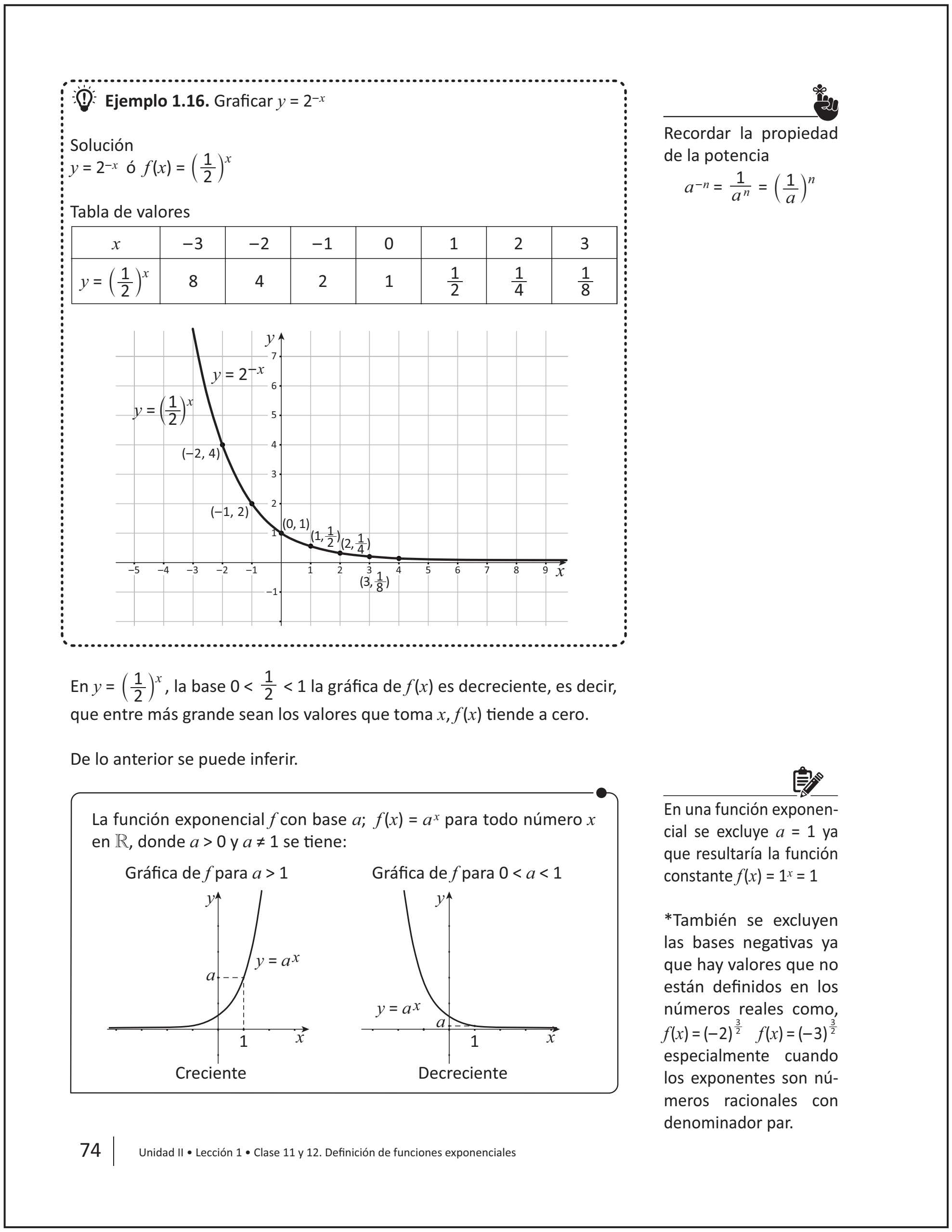
M: ¿De qué otra manera puede ser expresada 2^{-x}?

RP: Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

M: ¿Cómo son las bases de las dos funciones?

RP: Diferentes y el exponente igual

Concluye que la forma de la gráfica dependerá si la base es mayor que 1 o está entre 0 y 1.



Ejemplo 1.16. Graficar $y = 2^{-x}$

Solución

$y = 2^{-x}$ ó $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tabla de valores

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Recordar la propiedad de la potencia

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

En $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, la base $0 < \frac{1}{2} < 1$ la gráfica de $f(x)$ es decreciente, es decir, que entre más grande sean los valores que toma x, $f(x)$ tiende a cero.

De lo anterior se puede inferir.

La función exponencial f con base a; $f(x) = a^x$ para todo número x en $\mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$ se tiene:

Gráfica de f para $a > 1$

Gráfica de f para $0 < a < 1$

En una función exponencial se excluye $a = 1$ ya que resultaría la función constante $f(x) = 1^x = 1$

*También se excluyen las bases negativas ya que hay valores que no están definidos en los números reales como, $f(x) = (-2)^{\frac{3}{2}}$ $f(x) = (-3)^{\frac{3}{2}}$ especialmente cuando los exponentes son números racionales con denominador par.

74 | Unidad II • Lección 1 • Clase 11 y 12. Definición de funciones exponenciales

*Pedir que observen el cuadro de las gráficas y concluir cuando una gráfica es creciente o decreciente.

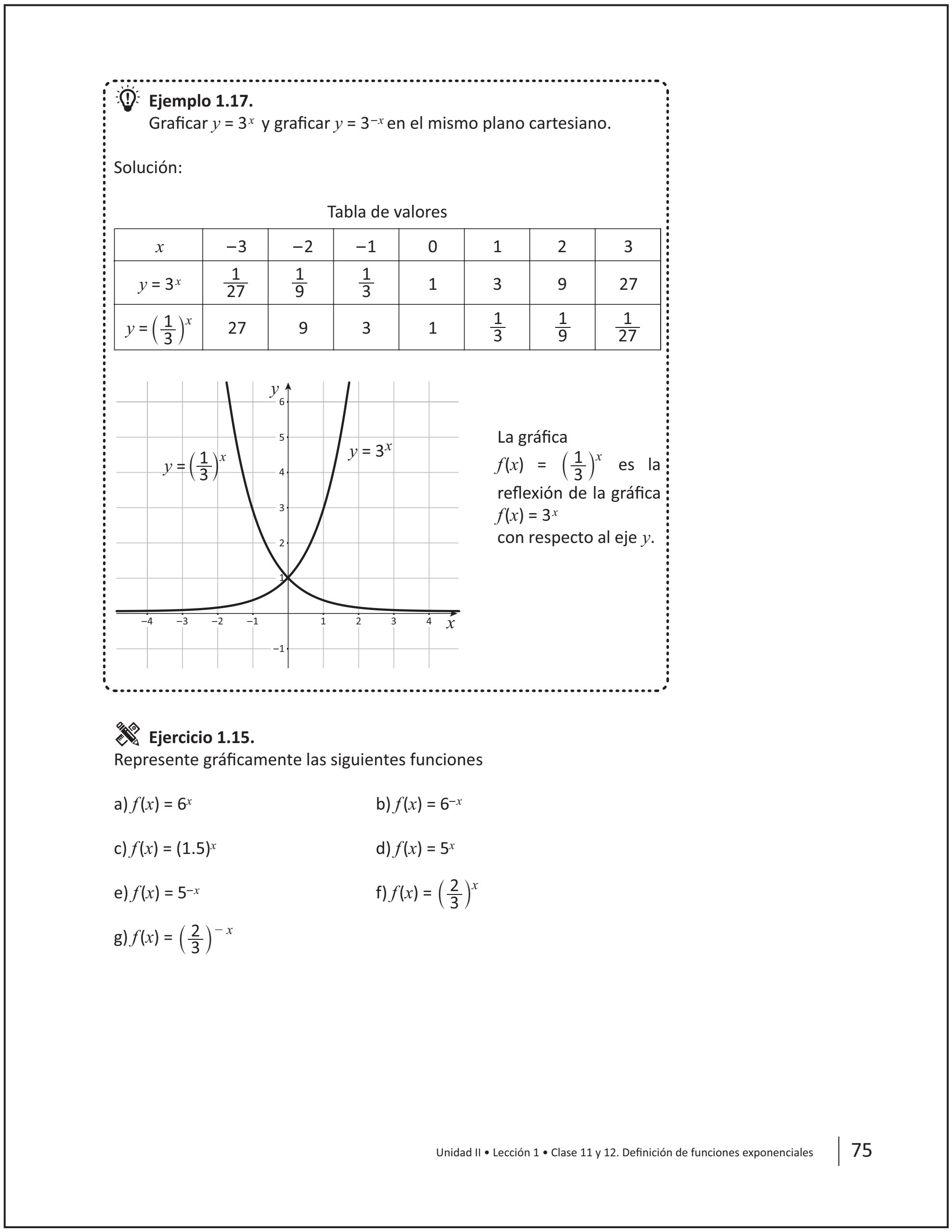
*Aclarar que las bases son positivas ya que para bases negativas hay valores que no están definidos en los reales.

[Hasta aquí Clase 11]

Clase 11 y 12

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Ejemplo 1.17.
Graficar $y = 3^x$ y graficar $y = 3^{-x}$ en el mismo plano cartesiano.

Solución:

Tabla de valores

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

La gráfica $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ es la reflexión de la gráfica $f(x) = 3^x$ con respecto al eje y.

Ejercicio 1.15.
Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = 6^x$
b) $f(x) = 6^{-x}$
c) $f(x) = (1.5)^x$
d) $f(x) = 5^x$
e) $f(x) = 5^{-x}$
f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
g) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

Unidad II • Lección 1 • Clase 11 y 12. Definición de funciones exponenciales | 75

[Desde aquí Clase 12]

[B]

Ejemplo 1.17

(20 min)

*Pedir a los estudiantes que grafiquen las funciones en un solo plano cartesiano.

* Hacer que se den cuenta que ambas pasan por el punto (0, 1). Y que la gráfica $y = 3^x$ es la reflexión de la gráfica $y = 3^{-x}$ con respecto al eje y.

M: ¿Qué tipo de gráfica es $y = 3^x$ y $y = 3^{-x}$?

RP: Creciente y decreciente respectivamente.

Ejercicio 1.15

(25 min)

*Permitir que presenten sus ideas en la pizarra y para facilitar la realización de las gráficas se puede trabajar con una lámina de papel bond cuadriculada y forrada con papel tapiz para reutilizarla como pizarra móvil.

Soluciones: (pag. 93)

Unidad II. Lección 1.

Clase 13 y 14

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Establecer las características de una función exponencial.

Evaluación: Ejercicio 1.16

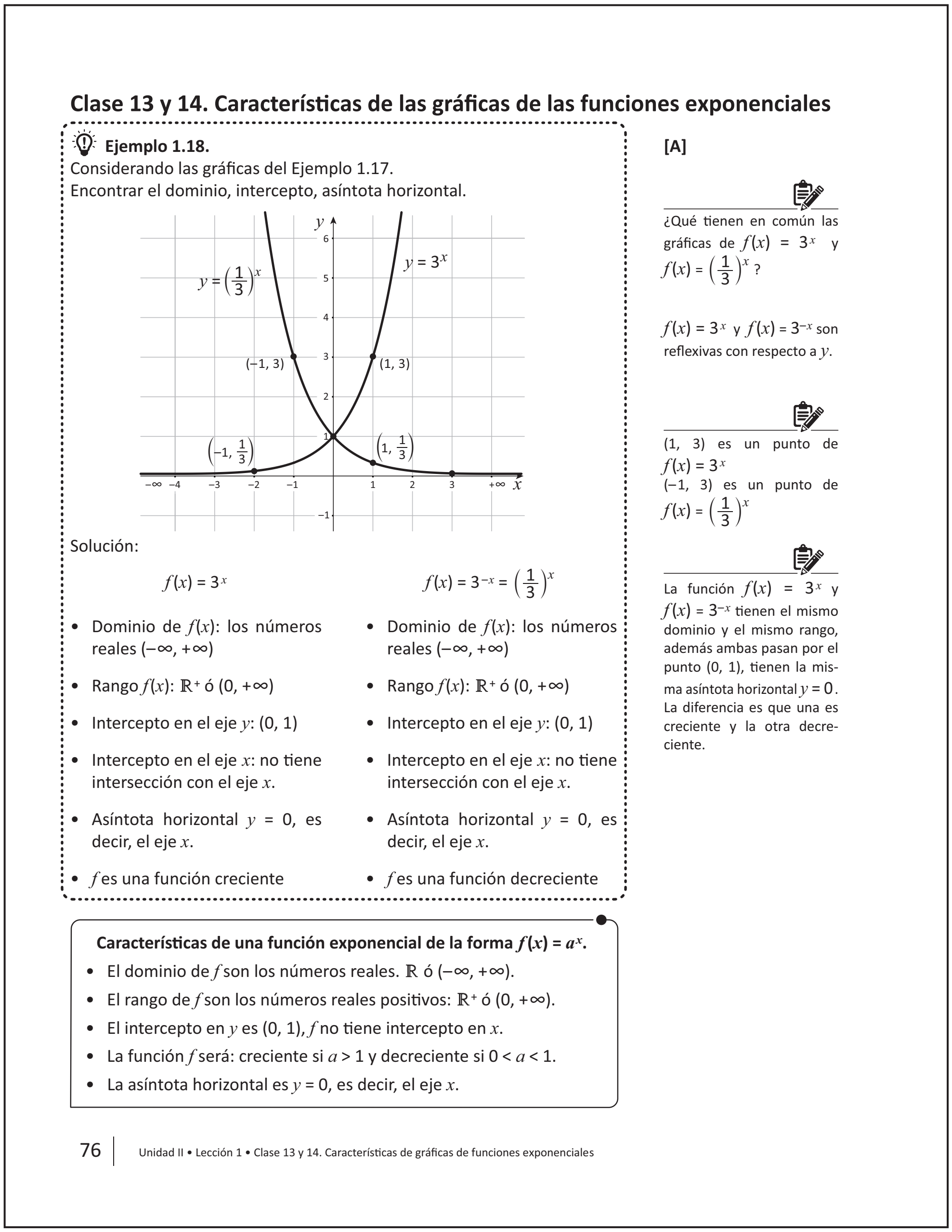
[A]

Ejemplo 1.18

(25 min)

*Dada las gráficas del Ejemplo 1.17 se deben analizar de tal manera que el estudiante encuentre las características de cada una de ellas.

M: ¿Cuál es el dominio de ambas gráficas?
RP: Los números reales
*Recordar a los estudiantes que el dominio son los valores que puede tomar la función en x
M: ¿Cuál es el Rango de ambas gráficas?
RP: Son los reales positivos
*Concluir que el rango son los valores que toma la función en y.
M: ¿Cuál es el intercepto en y?
RP: Ambas gráficas tienen (0, 1) como intercepto en y.
*Concluir que las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ tienen como intercepto (0, 1)
M: ¿Cuál es el intercepto en x?
RP: No tienen
*Concluir que las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ no tienen intercepto en x.
M: ¿Las gráficas tienen asíntotas?
RP: Sí la asíntota es horizontal $y = 0$.
M: ¿Cuándo una función exponencial será creciente o decreciente?
RP: Es creciente cuando la base es mayor que cero. Es decreciente cuando la base está entre 0 y 1.



Clase 13 y 14. Características de las gráficas de las funciones exponenciales

Ejemplo 1.18.
Considerando las gráficas del Ejemplo 1.17.
Encontrar el dominio, intercepto, asíntota horizontal.

Solución:

$f(x) = 3^x$

- Dominio de $f(x)$: los números reales (−∞, +∞)
- Rango $f(x)$: $\mathbb{R}^+$ ó (0, +∞)
- Intercepto en el eje y: (0, 1)
- Intercepto en el eje x: no tiene intersección con el eje x.
- Asíntota horizontal $y = 0$, es decir, el eje x.
- f es una función creciente

$f(x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

- Dominio de $f(x)$: los números reales (−∞, +∞)
- Rango $f(x)$: $\mathbb{R}^+$ ó (0, +∞)
- Intercepto en el eje y: (0, 1)
- Intercepto en el eje x: no tiene intersección con el eje x.
- Asíntota horizontal $y = 0$, es decir, el eje x.
- f es una función decreciente

Características de una función exponencial de la forma $f(x) = a^x$.

- El dominio de f son los números reales. $\mathbb{R}$ ó (−∞, +∞).
- El rango de f son los números reales positivos: $\mathbb{R}^+$ ó (0, +∞).
- El intercepto en y es (0, 1), f no tiene intercepto en x.
- La función f será: creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.
- La asíntota horizontal es $y = 0$, es decir, el eje x.

[A]

¿Qué tienen en común las gráficas de $f(x) = 3^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

$f(x) = 3^x$ y $f(x) = 3^{-x}$ son reflexivas con respecto a y.

(1, 3) es un punto de $f(x) = 3^x$
(−1, 3) es un punto de $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

La función $f(x) = 3^x$ y $f(x) = 3^{-x}$ tienen el mismo dominio y el mismo rango, además ambas pasan por el punto (0, 1), tienen la misma asíntota horizontal $y = 0$. La diferencia es que una es creciente y la otra decreciente.

76 | Unidad II • Lección 1 • Clase 13 y 14. Características de gráficas de funciones exponenciales

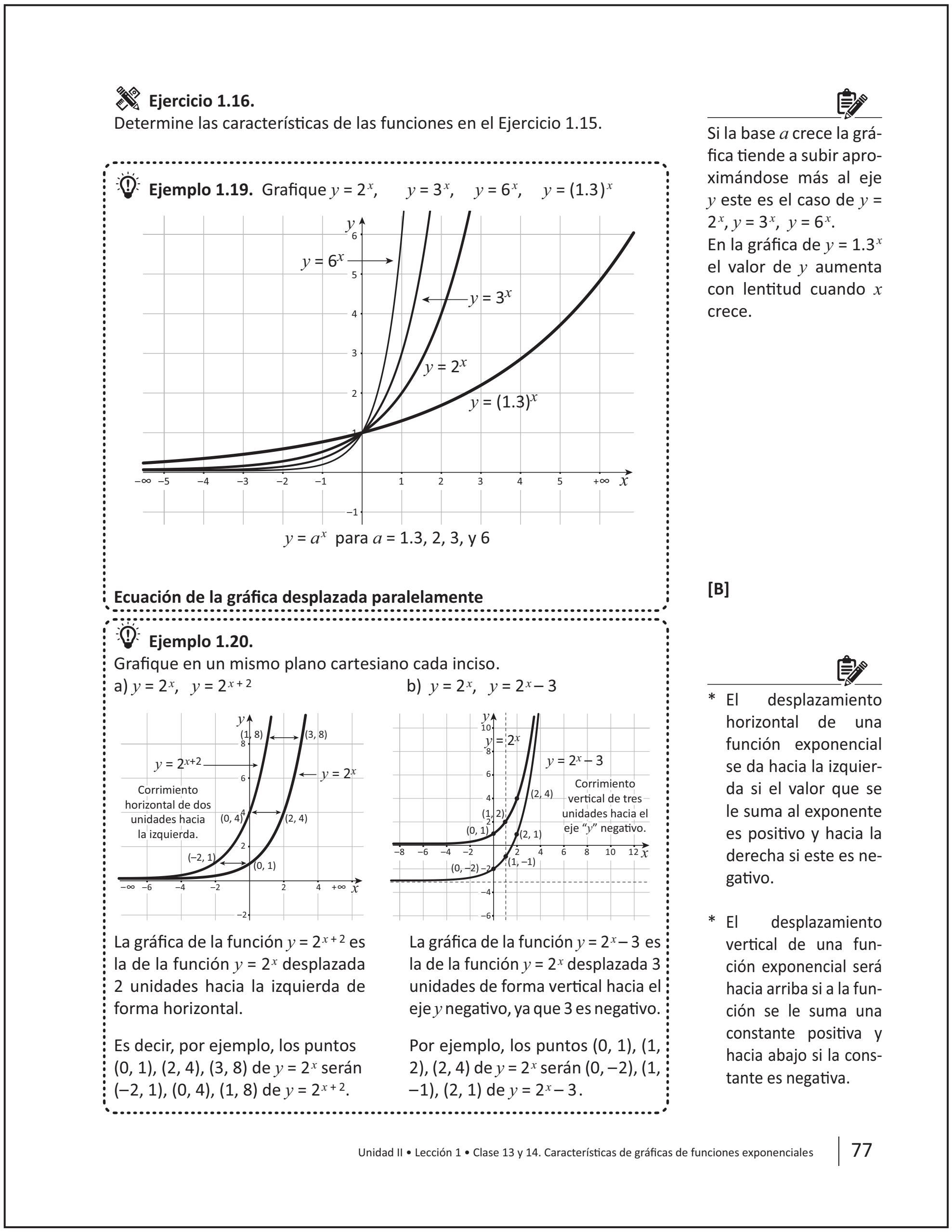
Escribir características de una función exponencial

Objetivo: **[B]** Determinar los desplazamientos en una función exponencial.

Evaluación: Ejercicio 1.17

Clase 13 y 14
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Ejercicio 1.16.
Determine las características de las funciones en el Ejercicio 1.15.

Ejemplo 1.19. Grafique $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 6^x$, $y = (1.3)^x$

$y = a^x$ para a = 1.3, 2, 3, y 6

Si la base a crece la gráfica tiende a subir aproximándose más al eje y este es el caso de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 6^x$.
En la gráfica de $y = 1.3^x$ el valor de y aumenta con lentitud cuando x crece.

Ecuación de la gráfica desplazada paralelamente

[B]

Ejemplo 1.20.
Grafique en un mismo plano cartesiano cada inciso.
a) $y = 2^x$, $y = 2^{x+2}$ b) $y = 2^x$, $y = 2^{x-3}$

La gráfica de la función $y = 2^{x+2}$ es la de la función $y = 2^x$ desplazada 2 unidades hacia la izquierda de forma horizontal.

Es decir, por ejemplo, los puntos (0, 1), (2, 4), (3, 8) de $y = 2^x$ serán (−2, 1), (0, 4), (1, 8) de $y = 2^{x+2}$.

La gráfica de la función $y = 2^{x}- 3$ es la de la función $y = 2^x$ desplazada 3 unidades de forma vertical hacia el eje y negativo, ya que 3 es negativo.

Por ejemplo, los puntos (0, 1), (1, 2), (2, 4) de $y = 2^x$ serán (0, −2), (1, −1), (2, 1) de $y = 2^{x}- 3$.

* El desplazamiento horizontal de una función exponencial se da hacia la izquierda si el valor que se le suma al exponente es positivo y hacia la derecha si este es negativo.

* El desplazamiento vertical de una función exponencial será hacia arriba si a la función se le suma una constante positiva y hacia abajo si la constante es negativa.

Unidad II • Lección 1 • Clase 13 y 14. Características de gráficas de funciones exponenciales 77

M: Esto significa que cada punto que pasa por $y = 2^x$ será trasladado dos unidades hacia la izquierda.
M: si (0, 1), (2, 4), (3, 8) son puntos de $y = 2^x$ ¿Qué puntos pasan por $y = 2^{x+2}$?
RP: Como se corren dos unidades hacia la izquierda la coordenada que afecta es la de x por tanto (0 – 2, 1), (2 – 2, 4), (3 – 2, 8) los puntos son:
(−2, 1), (0, 4), (1, 8).
*Hacer lo mismo en la gráfica del inciso b para que los estudiantes se den cuenta que el desplazamiento es vertical y que la coordenada afectada es y.

Ejercicio 1.16
(10 min) Soluciones
Dominio, rango, asíntotas, intercepto son las mismas para todas.
a) Dom. (−∞, +∞)
Rang. (0, +∞), int. y = 1, (0, 1), int. x = ∅
asint. Horizontal y = 0, función creciente.
b) Función decreciente.
c) Función creciente.
d) Función creciente.
e) Función decreciente
f) Función decreciente
g) Función creciente

Ejemplo 1.19
(10 min) Analizar las gráficas con respecto a su forma y sus diferencias.

[Hasta aquí Clase 13]

[Desde aquí Clase 14]

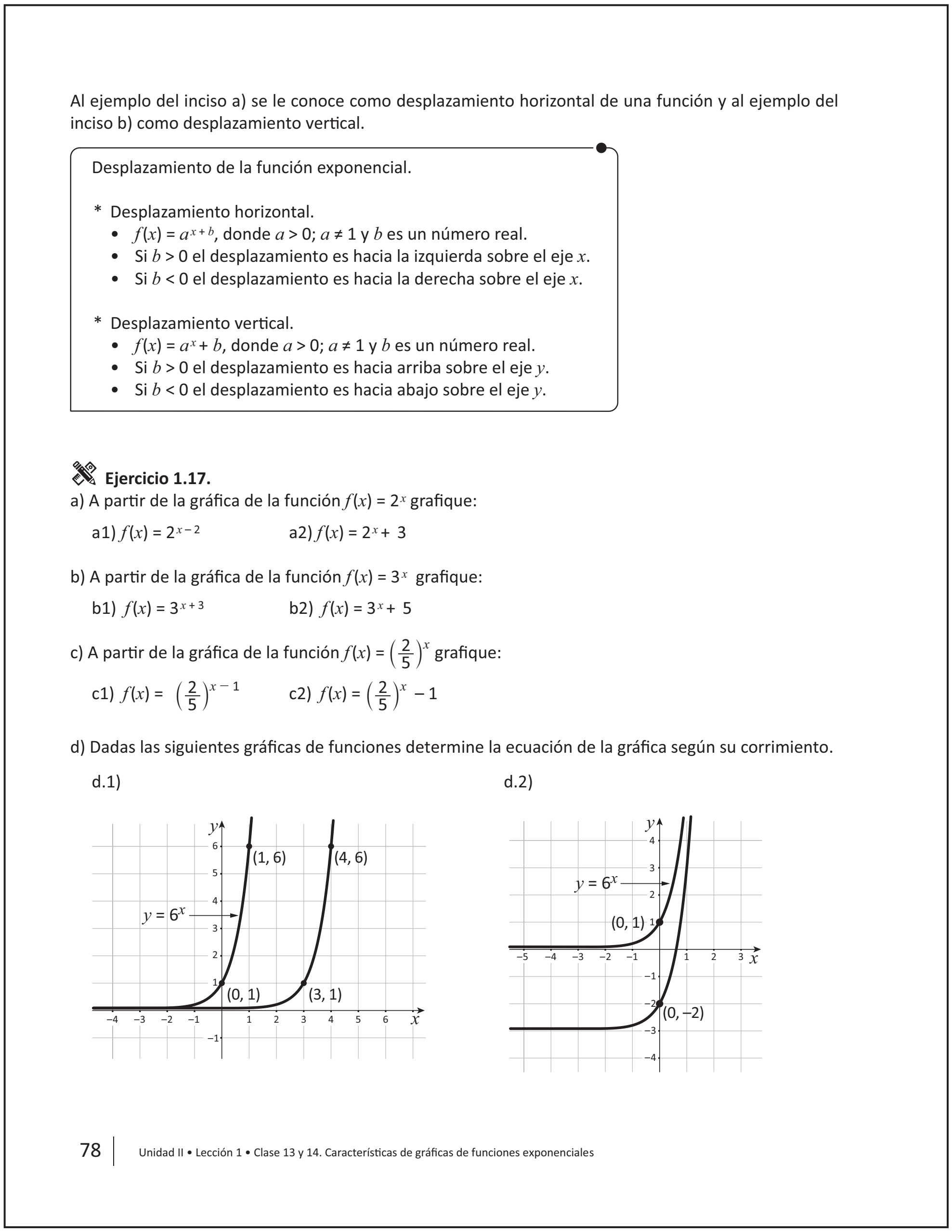
[B]

Ejemplo 1.20
(20 min)
*Pedir a los estudiantes que hagan una tabla de valores y que grafiquen las funciones del inciso a y b en un mismo plano cada inciso. El propósito es que puedan entender e identificar el desplazamiento paralelo.
M: En el inciso a) ¿cuántas unidades se desplaza $y = 2^x$ a la izquierda?
RP: Dos

Clase 13 y 14

(Continuación)
(Continúa en la siguiente página)

Concluir que cuando la función tiene la forma $y = a^{x+b}$ se trata de un desplazamiento horizontal y si tiene la forma $y = a^x + b$ el desplazamiento es vertical.



Al ejemplo del inciso a) se le conoce como desplazamiento horizontal de una función y al ejemplo del inciso b) como desplazamiento vertical.

Desplazamiento de la función exponencial.

* Desplazamiento horizontal.
- $f(x) = a^{x+b}$, donde $a > 0$; $a \neq 1$ y b es un número real.
- Si $b > 0$ el desplazamiento es hacia la izquierda sobre el eje x.
- Si $b < 0$ el desplazamiento es hacia la derecha sobre el eje x.

* Desplazamiento vertical.
- $f(x) = a^x + b$, donde $a > 0$; $a \neq 1$ y b es un número real.
- Si $b > 0$ el desplazamiento es hacia arriba sobre el eje y.
- Si $b < 0$ el desplazamiento es hacia abajo sobre el eje y.

Ejercicio 1.17.

a) A partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$ grafique:

a1) $f(x) = 2^{x-2}$ a2) $f(x) = 2^x + 3$

b) A partir de la gráfica de la función $f(x) = 3^x$ grafique:

b1) $f(x) = 3^{x+3}$ b2) $f(x) = 3^x + 5$

c) A partir de la gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ grafique:

c1) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$ c2) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$

d) Dadas las siguientes gráficas de funciones determine la ecuación de la gráfica según su corrimiento.

d.1)

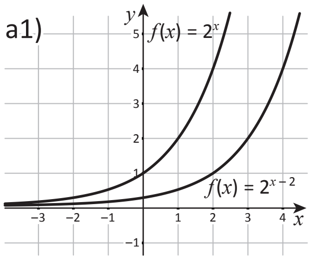
d.2)

78 | Unidad II • Lección 1 • Clase 13 y 14. Características de gráficas de funciones exponenciales

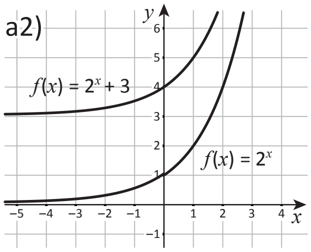
Ejercicio 1.17

(25 min) Soluciones

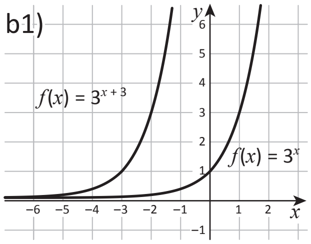
a1)



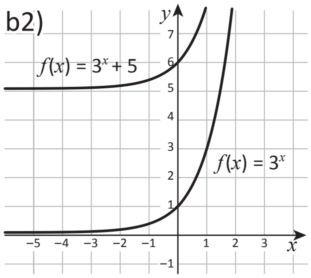
a2)



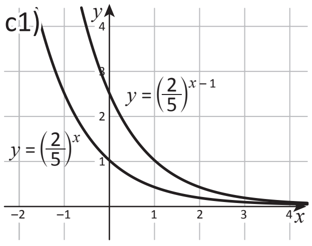
b1)



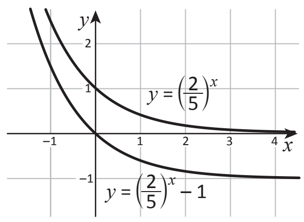
b2)



c1)



c2)



d1) $y = 6^{x-3}$ su corrimiento 3 unidades a la derecha de (0, 1) a (3, 1)

d2) $y = 6^x - 3$ su corrimiento 3 unidades hacia abajo de (0, 1) a (0, –2)

Objetivo: **[A]** Definir ecuaciones exponenciales.
[B] Resolver ecuaciones exponenciales sencillas.

Evaluación: Ejercicio 1.13

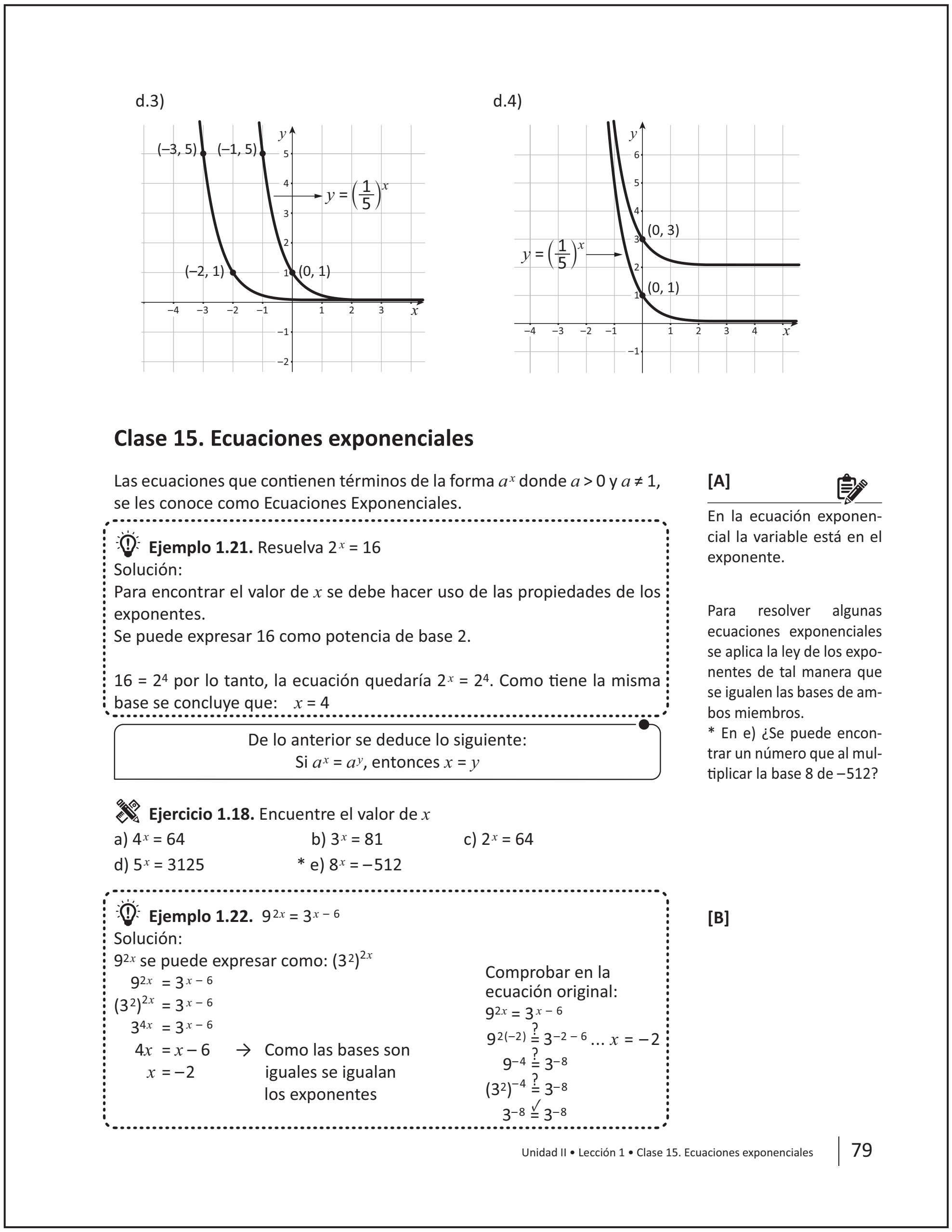
Unidad II. Lección 1.

Clase 13 y 14

(Continuación)

Clase 15

(Continúa en la siguiente página)



Clase 15. Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que contienen términos de la forma a^x donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se les conoce como Ecuaciones Exponenciales.

[A]

En la ecuación exponencial la variable está en el exponente.

Para resolver algunas ecuaciones exponenciales se aplica la ley de los exponentes de tal manera que se igualen las bases de ambos miembros.

* En e) ¿Se puede encontrar un número que al multiplicar la base 8 de −512?

Ejemplo 1.21. Resuelva $2^x = 16$

Solución:

Para encontrar el valor de x se debe hacer uso de las propiedades de los exponentes.

Se puede expresar 16 como potencia de base 2.

$16 = 2^4$ por lo tanto, la ecuación quedaría $2^x = 2^4$. Como tiene la misma base se concluye que: $x = 4$

De lo anterior se deduce lo siguiente:
Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$

Ejercicio 1.18. Encuentre el valor de x

a) $4^x = 64$ b) $3^x = 81$ c) $2^x = 64$

d) $5^x = 3125$ * e) $8^x = -512$

Ejemplo 1.22. $9^{2x} = 3^{x-6}$

[B]

Solución:

9^{2x} se puede expresar como: $(3^2)^{2x}$

$$9^{2x} = 3^{x-6}$$
$$(3^2)^{2x} = 3^{x-6}$$
$$3^{4x} = 3^{x-6}$$
$$4x = x - 6$$
$$x = -2$$

→ Como las bases son iguales se igualan los exponentes

Comprobar en la ecuación original:

$$9^{2x} = 3^{x-6}$$
$$9^{2(-2)} \overset{?}{=} 3^{-2-6} \ldots x = -2$$
$$9^{-4} \overset{?}{=} 3^{-8}$$
$$(3^2)^{-4} \overset{?}{=} 3^{-8}$$
$$3^{-8} \overset{\checkmark}{=} 3^{-8}$$

Unidad II • Lección 1 • Clase 15. Ecuaciones exponenciales | 79

d3) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$ su corrimiento 2 unidades a la izquierda de (0, 1) a (−2, 1)

d4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x} + 2$ su corrimiento 2 unidades hacia arriba de (0, 1) a (0, 3)

[Hasta aquí Clase 14]

[Desde aquí Clase 15]

[A] Ecuación exponencial (5 min)

M: ¿Qué es una ecuación exponencial?

RP: Es una ecuación que tiene términos exponenciales

M: ¿Es $2x^3 + 4x - 6 = 0$ una ecuación exponencial.

RP: No porque no tiene términos exponenciales es decir la variable no está como exponente.

Ejemplo 1.21 (10 min)

M: en $2^x = 16$ ¿Qué valor debe tomar x para que la igualdad se cumpla?

RP: 4 por que 2^4 es igual a 16

M: ¿Cómo queda expresada la ecuación si escribimos 16 como potencia?

RP: $2^x = 2^4$

M: ¿Qué pueden observar en los dos miembros de la ecuación?

RP: Tienen la misma base

M: Se puede concluir que si las bases son iguales los exponentes también son iguales por lo tanto $x = 4$.

*Concluir que si $a^x = a^y$ entonces $x = y$

Ejercicio 1.18. (7 min) Soluciones

a) 3 b) 4 c) 6 d) 5 *e) no se puede

[B]

Ejemplo 1.22. (10 min)

M: en el ejemplo planteado ¿Cómo podemos reescribirlo de tal manera que ambos miembros tengan la misma base?

RP: Expresar 9 como 3^2.

Unidad II. Lección 1.

Clase 15

(Continuación)

Clase 16

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Resolver ecuaciones exponenciales convirtiéndolas a ecuaciones de segundo grado.

Evaluación: Ejercicio 1.20

Ejercicio 1.19

(13 min) Soluciones

a) -3 b) 4 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{6}{5}$ f) $-\frac{4}{99}$ g) 2 h) 3

i) $\frac{6}{7}$ j) -2

[Hasta aquí Clase 15]

[Desde aquí Clase 16]

[A]

Ejemplo 1.22

(20 min)

M: ¿La ecuación dada es una ecuación exponencial? ¿Por qué?

RP: Sí porque la variable está en el exponente.

M: ¿Hay alguna característica en común entre los términos?

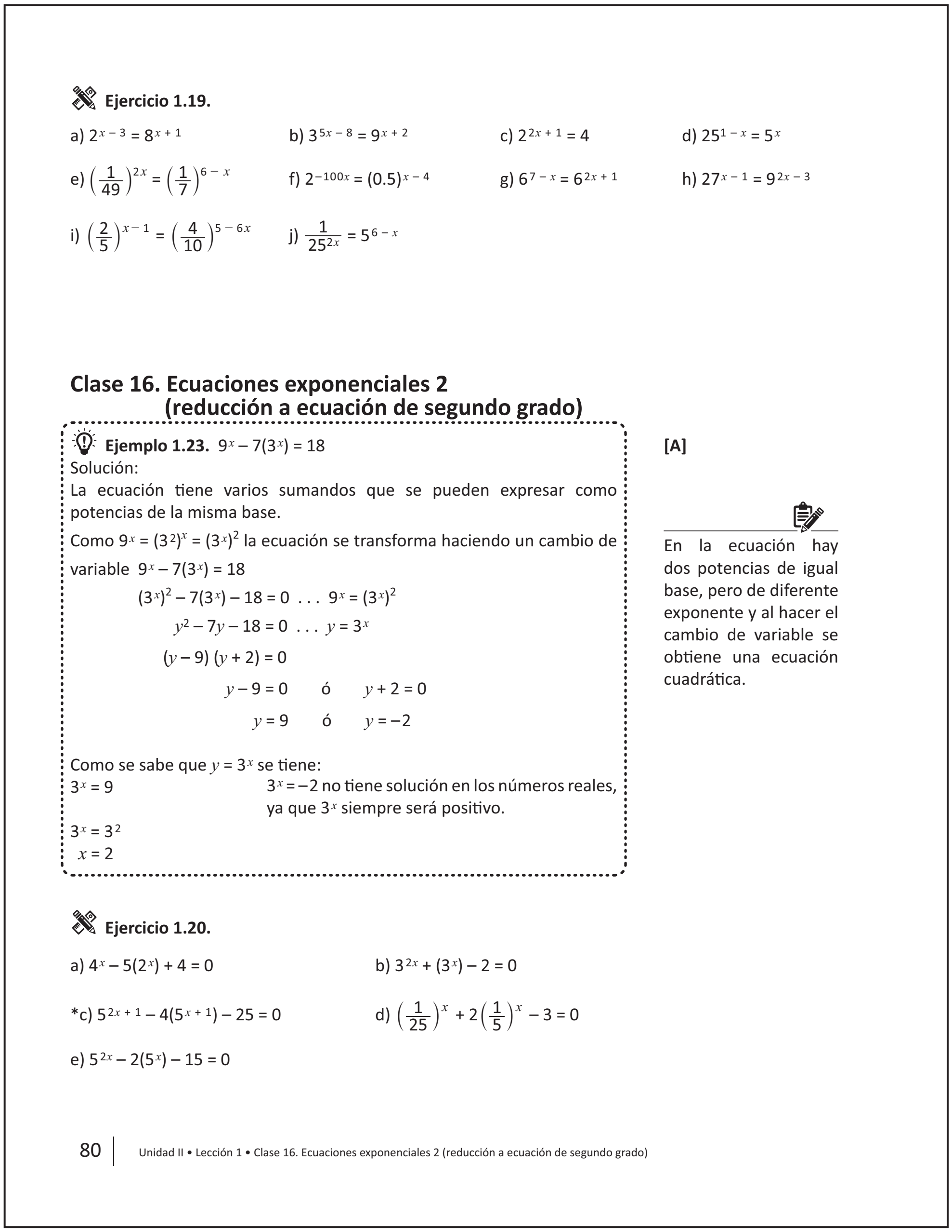
R: Se puede expresar 9 como 3^2

*Pedir a los estudiantes que reescriban la ecuación sustituyendo 9 por 3^2 y hacer que noten que la ecuación tiene la forma de una ecuación cuadrática.

M: Se hace un cambio de variable $y = 3^x$ ¿Qué tipo de ecuación resulta?

RP: Cuadrática.

*Pedir a los estudiantes que resuelvan la ecuación cuadrática resultante y que sustituyan los valores, luego que comprueben la solución.



Ejercicio 1.19.

a) $2^{x-3} = 8^{x+1}$
b) $3^{5x-8} = 9^{x+2}$
c) $2^{2x+1} = 4$
d) $25^{1-x} = 5^x$
e) $\left(\frac{1}{49}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{6-x}$
f) $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$
g) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$
h) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$
i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{10}\right)^{5-6x}$
j) $\frac{1}{25^{2x}} = 5^{6-x}$

Clase 16. Ecuaciones exponenciales 2 (reducción a ecuación de segundo grado)

Ejemplo 1.23. $9^x - 7(3^x) = 18$

Solución:

La ecuación tiene varios sumandos que se pueden expresar como potencias de la misma base.

Como $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$ la ecuación se transforma haciendo un cambio de variable $9^x - 7(3^x) = 18$

$$(3^x)^2 - 7(3^x) - 18 = 0 \ \ . . . \ \ 9^x = (3^x)^2$$
$$y^2 - 7y - 18 = 0 \ \ . . . \ \ y = 3^x$$
$$(y-9)\,(y+2) = 0$$
$$y - 9 = 0 \quad ó \quad y + 2 = 0$$
$$y = 9 \quad ó \quad y = -2$$

Como se sabe que $y = 3^x$ se tiene:

$3^x = 9$

$3^x = -2$ no tiene solución en los números reales, ya que 3^x siempre será positivo.

$3^x = 3^2$

$x = 2$

[A]

En la ecuación hay dos potencias de igual base, pero de diferente exponente y al hacer el cambio de variable se obtiene una ecuación cuadrática.

Ejercicio 1.20.

a) $4^x - 5(2^x) + 4 = 0$
b) $3^{2x} + (3^x) - 2 = 0$
*c) $5^{2x+1} - 4(5^{x+1}) - 25 = 0$
d) $\left(\frac{1}{25}\right)^x + 2\left(\frac{1}{5}\right)^x - 3 = 0$
e) $5^{2x} - 2(5^x) - 15 = 0$

80 | Unidad II • Lección 1 • Clase 16. Ecuaciones exponenciales 2 (reducción a ecuación de segundo grado)

M: ¿Se puede encontrar un valor para x que satisfaga $3^x = -2$?

RP: No porque la base es positiva.

M: Cómo $y = 9$ ¿Es solución de la ecuación dada?

RP: No, la solución es 2 ya que se debe sustituir $3^x = 9$ o $3^x = 3^2$

Ejercicio 1.20. (25 min)

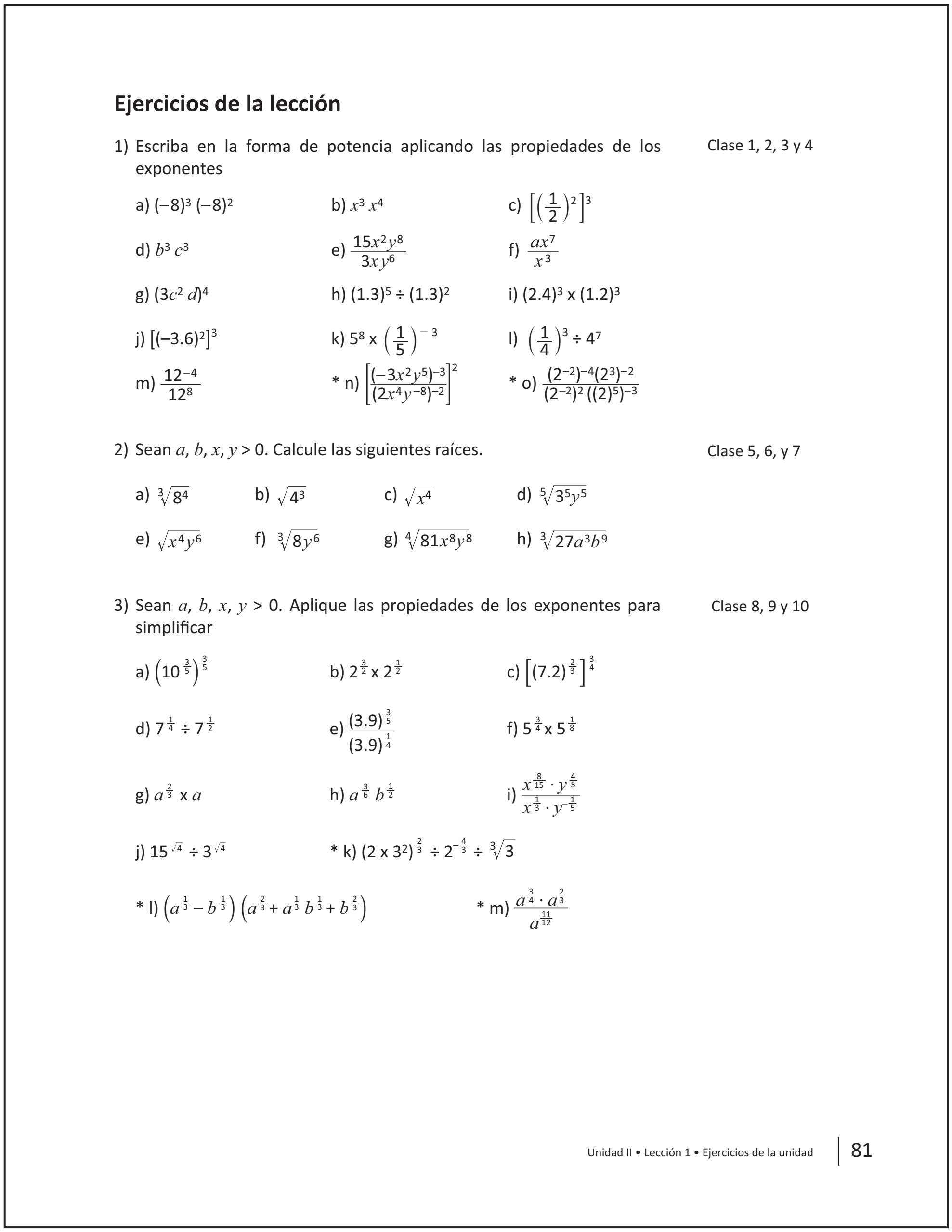
Soluciones

a) CS: {0, 2} b) CS: { 0 } c) CS: { 1 }
d) CS: { 0 } e) CS: { 1 }

Objetivo: Aplicar los conocimientos adquiridos acerca de las funciones exponenciales.

Unidad II. Lección 1.
Ejercicios de la lección

Evaluación: Ejercicios de la lección



Ejercicios de la lección

1) Escriba en la forma de potencia aplicando las propiedades de los exponentes — Clase 1, 2, 3 y 4

a) $(-8)^3\,(-8)^2$ b) $x^3\,x^4$ c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

d) $b^3\,c^3$ e) $\frac{15x^2y^8}{3xy^6}$ f) $\frac{ax^7}{x^3}$

g) $(3c^2\,d)^4$ h) $(1.3)^5 \div (1.3)^2$ i) $(2.4)^3 \text{ x } (1.2)^3$

j) $[(-3.6)^2]^3$ k) $5^8 \text{ x } \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ l) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \div 4^7$

m) $\frac{12^{-4}}{12^8}$ * n) $\left[\frac{(-3x^2y^5)^{-3}}{(2x^4y^{-8})^{-2}}\right]^2$ * o) $\frac{(2^{-2})^{-4}(2^3)^{-2}}{(2^{-2})^2\,((2)^5)^{-3}}$

2) Sean $a, b, x, y > 0$. Calcule las siguientes raíces. — Clase 5, 6, y 7

a) $\sqrt[3]{8^4}$ b) $\sqrt{4^3}$ c) $\sqrt{x^4}$ d) $\sqrt[5]{3^5y^5}$

e) $\sqrt{x^4y^6}$ f) $\sqrt[3]{8y^6}$ g) $\sqrt[4]{81x^8y^8}$ h) $\sqrt[3]{27a^3b^9}$

3) Sean $a, b, x, y > 0$. Aplique las propiedades de los exponentes para simplificar — Clase 8, 9 y 10

a) $\left(10^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{5}}$ b) $2^{\frac{3}{2}} \text{ x } 2^{\frac{1}{2}}$ c) $\left[(7.2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{4}}$

d) $7^{\frac{1}{4}} \div 7^{\frac{1}{2}}$ e) $\frac{(3.9)^{\frac{3}{5}}}{(3.9)^{\frac{1}{4}}}$ f) $5^{\frac{3}{4}} \text{ x } 5^{\frac{1}{8}}$

g) $a^{\frac{2}{3}} \text{ x } a$ h) $a^{\frac{3}{6}}\,b^{\frac{1}{2}}$ i) $\frac{x^{\frac{8}{15}} \cdot y^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{5}}}$

j) $15^{\sqrt{4}} \div 3^{\sqrt{4}}$ * k) $(2 \text{ x } 3^2)^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{4}{3}} \div \sqrt[3]{3}$

* l) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$ * m) $\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{11}{12}}}$

Unidad II • Lección 1 • Ejercicios de la unidad | 81

Soluciones:

1)

a) $(-8)^5$ b) x^7

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ d) $(bc)^3$

e) $5xy^2$ f) ax^4

g) $3^4c^8d^4$ h) $(1.3)^3$

i) $(2.88)^3$ j) $(-3.6)^6$

k) 5^{11} l) $\frac{1}{4^{10}}$

m) $\frac{1}{12^{12}}$

n) $\frac{2^4x^4}{(-3)^6y^{62}}$ o) 2^{21}

2)

a) 16 b) 8

c) x^2 d) $3y$

e) $x^2\,y^3$ f) $2y^2$

g) $3x^2\,y^2$ h) $3ab^3$

3)

a) $10^{\frac{9}{25}}$ b) 4

c) $\sqrt{7.2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$

e) $\sqrt[20]{(3.9)^7}$ f) $\sqrt[8]{5^7}$

g) $a\sqrt[3]{a^2}$ h) $\sqrt{ab}$

i) $y\sqrt[5]{x}$ j) 25

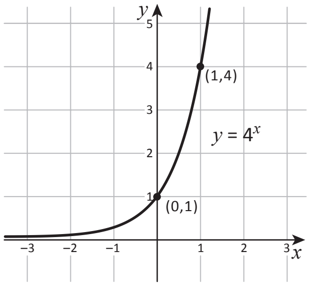
k) 12 l) $a-b$

m) $\sqrt{a}$

Ejercicios de la lección
(Continuación)

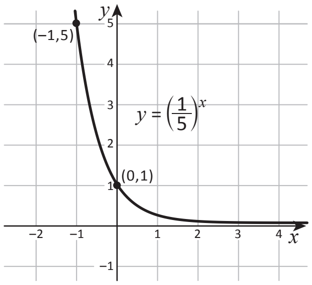
Soluciones:

4) a)



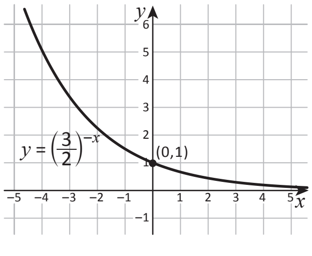
Dom. (−∞, +∞); Rang. (0, +∞); int. y = 1, (0, 1); int. x: no tiene asint. Horizontal y = 0, función creciente.

b)

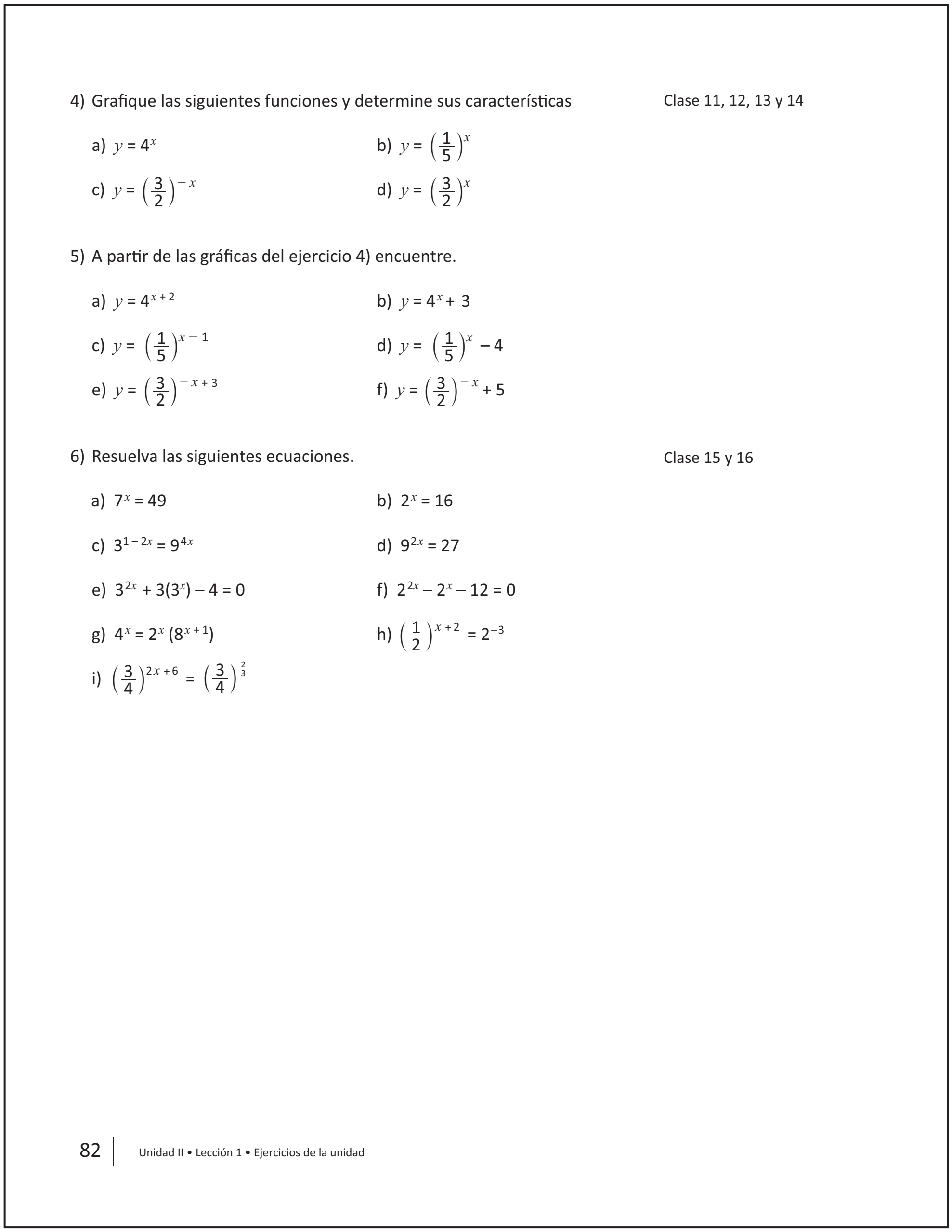


Dom. (−∞, +∞); Rang. (0, +∞) int. y = 1, (0, 1), int. x: no tiene asint. Horizontal y = 0, función decreciente.

c)



Dom. (−∞, +∞); Rang. (0, +∞) int. y = 1, (0, 1), int. x: no tiene asint. Horizontal y = 0, función decreciente.



4) Grafique las siguientes funciones y determine sus características

Clase 11, 12, 13 y 14

a) $y = 4^x$

b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

d) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

5) A partir de las gráficas del ejercicio 4) encuentre.

a) $y = 4^{x+2}$

b) $y = 4^x + 3$

c) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$

d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 4$

e) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x+3}$

f) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 5$

6) Resuelva las siguientes ecuaciones.

Clase 15 y 16

a) $7^x = 49$

b) $2^x = 16$

c) $3^{1-2x} = 9^{4x}$

d) $9^{2x} = 27$

e) $3^{2x} + 3(3^x) - 4 = 0$

f) $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$

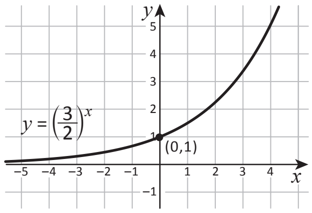
g) $4^x = 2^x\,(8^{x+1})$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 2^{-3}$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x+6} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

82 | Unidad II • Lección 1 • Ejercicios de la unidad

d)

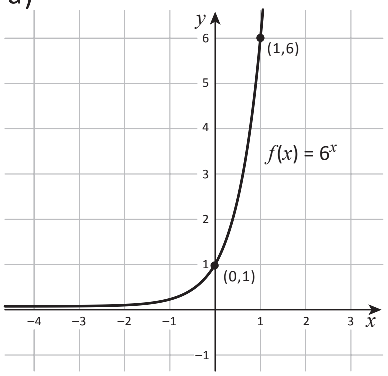


Dom. (−∞, +∞); Rang. (0, +∞); int. y = 1, (0, 1); int. x: no tiene asint. Horizontal y = 0, función creciente.

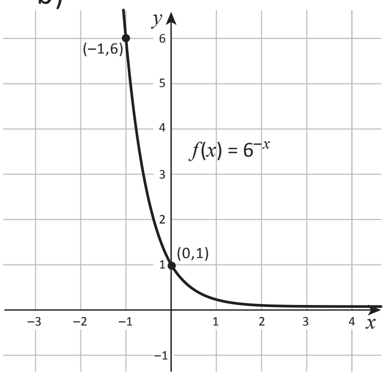
Incido 5) y 6), solución en la página 93 y 94.

Solución Ejercicio 1.15. Pág. 85

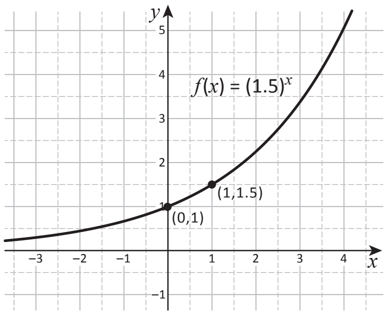
a)



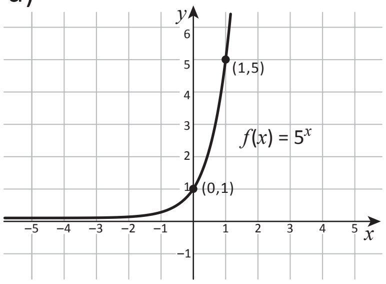
b)



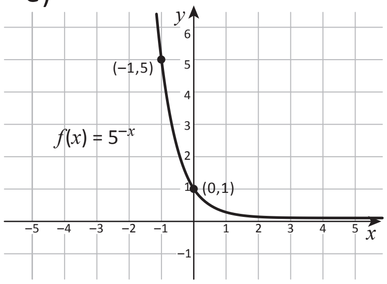
c)



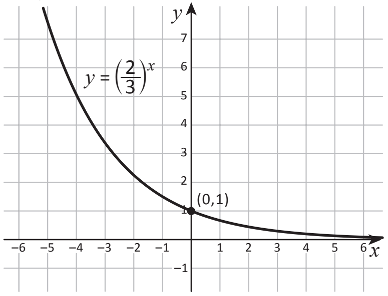
d)



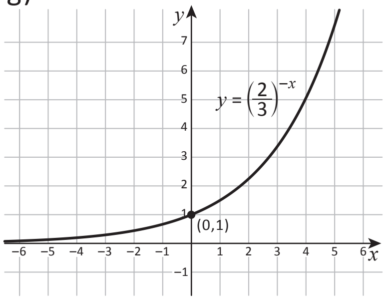
e)



f)



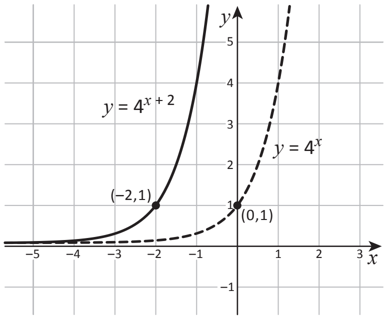
g)



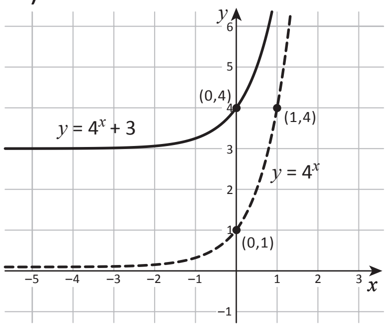
Solucionario Lección 1 - Ejercicios de la Lección

5) A partir de las gráficas del ejercicio 4) encuentre.

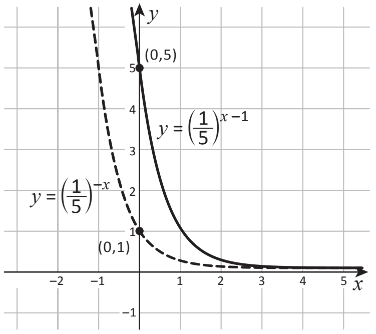
a)



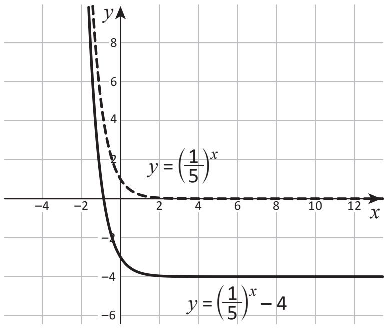
b)



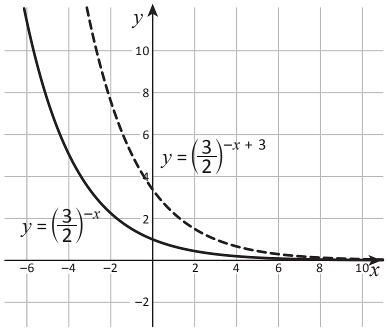
c)



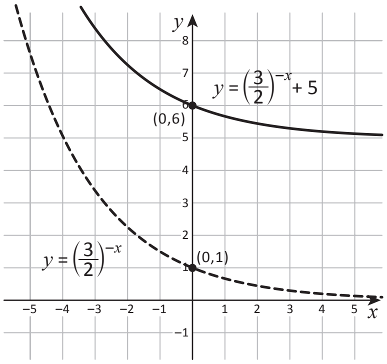
d)



e)



f)



6)

a) CS: { 2 }

b) CS: { 4 }

c) CS: $\left\{\frac{1}{10}\right\}$

d) CS: $\left\{\frac{3}{4}\right\}$

e) CS: { 0 }

f) CS: { 2 }

g) CS: $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

h) CS: { 1 }

i) CS: $\left\{-\frac{8}{3}\right\}$

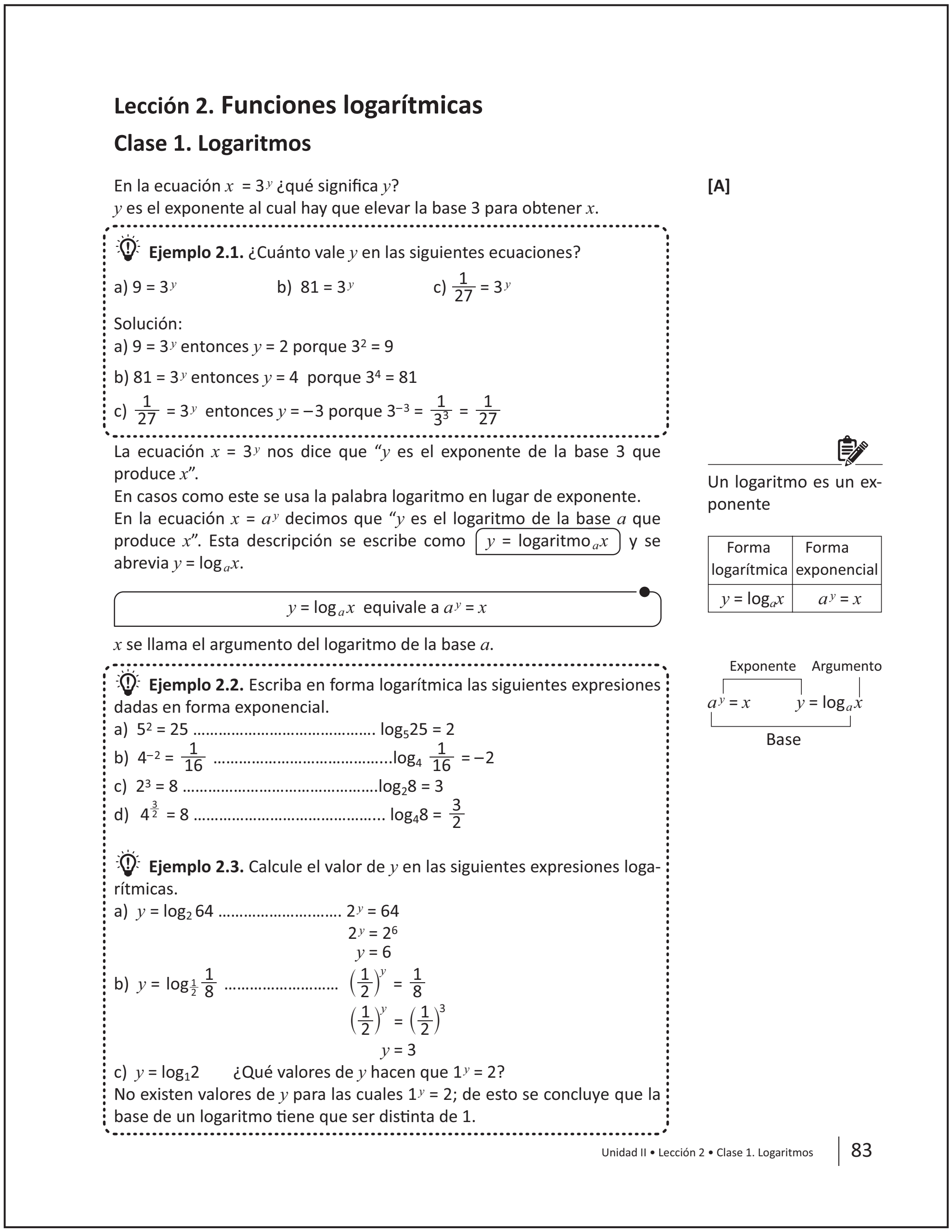
Objetivo: **[A]** Convertir expresiones de forma exponencial a la forma logarítmica y viceversa.

Evaluación: [A] Ejercicio 2.1 y 2.2

Unidad II. Lección 2.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)



Lección 2. Funciones logarítmicas

Clase 1. Logaritmos

En la ecuación $x = 3^y$ ¿qué significa y?
y es el exponente al cual hay que elevar la base 3 para obtener x.

[A]

Ejemplo 2.1. ¿Cuánto vale y en las siguientes ecuaciones?

a) $9 = 3^y$ b) $81 = 3^y$ c) $\frac{1}{27} = 3^y$

Solución:
a) $9 = 3^y$ entonces $y = 2$ porque $3^2 = 9$
b) $81 = 3^y$ entonces $y = 4$ porque $3^4 = 81$
c) $\frac{1}{27} = 3^y$ entonces $y = -3$ porque $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

La ecuación $x = 3^y$ nos dice que "y es el exponente de la base 3 que produce x".
En casos como este se usa la palabra logaritmo en lugar de exponente.
En la ecuación $x = a^y$ decimos que "y es el logaritmo de la base a que produce x". Esta descripción se escribe como $\boxed{y = \text{logaritmo}_a x}$ y se abrevia $y = \log_a x$.

$$y = \log_a x \text{ equivale a } a^y = x$$

x se llama el argumento del logaritmo de la base a.

Un logaritmo es un exponente

Forma logarítmica	Forma exponencial
$y = \log_a x$	$a^y = x$

$$a^y = x \qquad y = \log_a x$$

Ejemplo 2.2. Escriba en forma logarítmica las siguientes expresiones dadas en forma exponencial.
a) $5^2 = 25$ .... $\log_5 25 = 2$
b) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ .... $\log_4 \frac{1}{16} = -2$
c) $2^3 = 8$ .... $\log_2 8 = 3$
d) $4^{\frac{3}{2}} = 8$ .... $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

Ejemplo 2.3. Calcule el valor de y en las siguientes expresiones logarítmicas.
a) $y = \log_2 64$ .... $2^y = 64$
$2^y = 2^6$
$y = 6$
b) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ .... $\left(\frac{1}{2}\right)^y = \frac{1}{8}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^y = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
$y = 3$
c) $y = \log_1 2$ ¿Qué valores de y hacen que $1^y = 2$?
No existen valores de y para las cuales $1^y = 2$; de esto se concluye que la base de un logaritmo tiene que ser distinta de 1.

Unidad II • Lección 2 • Clase 1. Logaritmos 83

- Pensar en el significado de y en la expresión $x = 3^y$. [A]
  *Concluir que y es el exponente al que hay que elevar la base 3 para obtener x. (5 min)

Ejemplo 2.1.

* Hacer que se den cuenta que el valor de y en la expresión $9 = 3^y$ es 2 porque $3^2 = 9$.
* Hacer el análisis de los demás incisos de la misma forma que el anterior.
* Concluir que un logaritmo es un exponente.
* Hacer énfasis en que $y = \log_a x$ equivale a $a^y = x$.
  (8 min)

Ejemplos 2.2. y 2.3

* En el Ejemplo 2.3 concluir que lo que se está buscando es escribir las potencias con la misma base.
* Concluir que la base de un logaritmo debe ser positiva y distinta de 1.
* Definir un logaritmo.
  (13 min)

Clase 1
(Continuación)

Ejercicio 2.1
(10 min) Solución

Forma exponencial	Forma logarítmica
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$	$\log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} = 3$
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$
$5 = a^{-1}$	$\log_a 5 = -1$
$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$	$\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
$a^5 = 6$	$\log_a 6 = 5$
$2^7 = 128$	$\log_2 128 = 7$
$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$

Ejemplo 2.4
* Concluir con las propiedades:
$\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$
(5 min)

Ejercicio 2.2
(4 min) Solución

a) $4^y = 4$, $y = 1$,

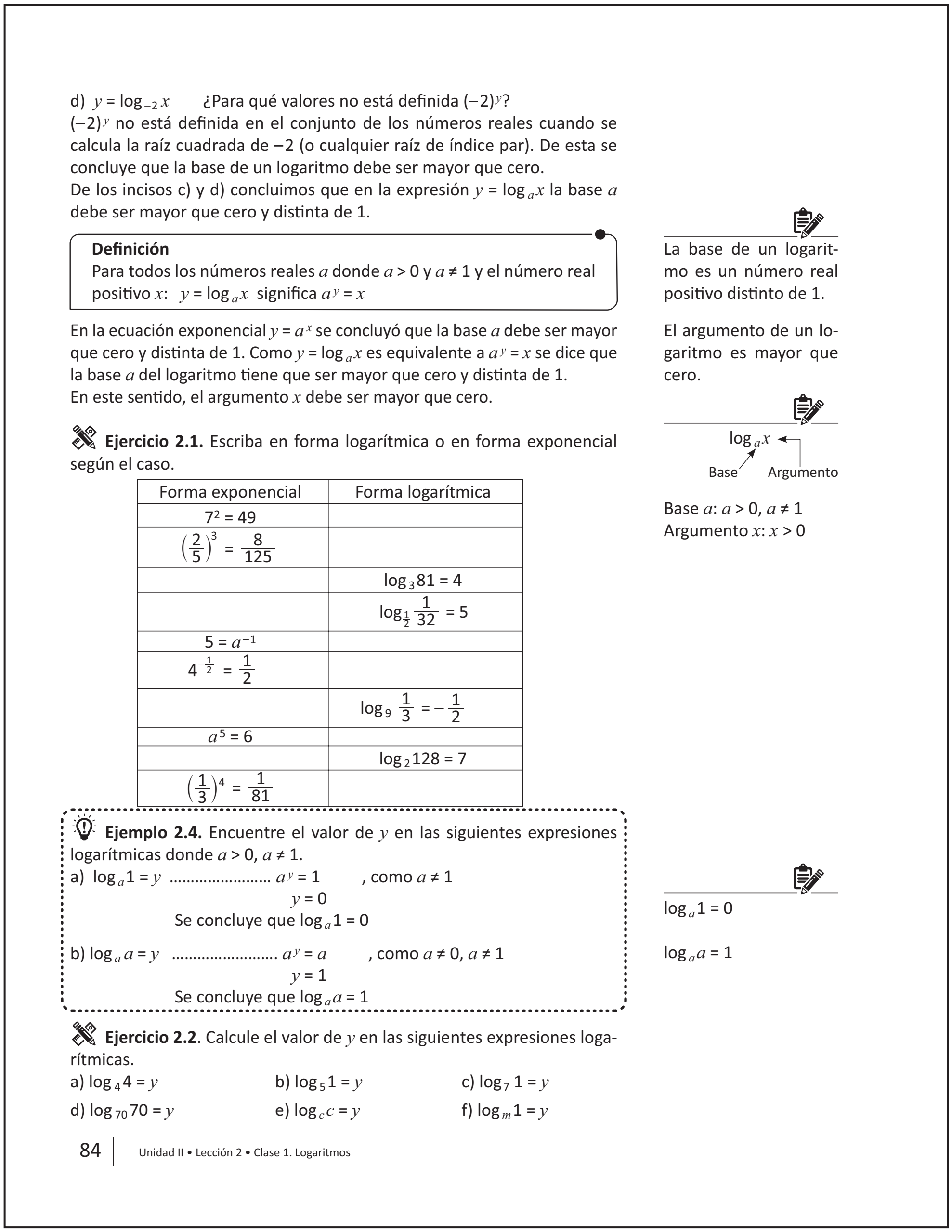
b) $5^y = 1$, $y = 0$,

c) $7^y = 1$, $y = 0$,

d) $70^y = 70$, $y = 1$,

e) $c^y = c$, $y = 1$,

f) $m^y = 1$, $y = 0$



d) $y = \log_{-2} x$ ¿Para qué valores no está definida $(-2)^y$?
$(-2)^y$ no está definida en el conjunto de los números reales cuando se calcula la raíz cuadrada de -2 (o cualquier raíz de índice par). De esta se concluye que la base de un logaritmo debe ser mayor que cero.
De los incisos c) y d) concluimos que en la expresión $y = \log_a x$ la base a debe ser mayor que cero y distinta de 1.

Definición
Para todos los números reales a donde $a > 0$ y $a \neq 1$ y el número real positivo x: $y = \log_a x$ significa $a^y = x$

La base de un logaritmo es un número real positivo distinto de 1.

En la ecuación exponencial $y = a^x$ se concluyó que la base a debe ser mayor que cero y distinta de 1. Como $y = \log_a x$ es equivalente a $a^y = x$ se dice que la base a del logaritmo tiene que ser mayor que cero y distinta de 1.
En este sentido, el argumento x debe ser mayor que cero.

El argumento de un logaritmo es mayor que cero.

$\log_a x$
Base
Argumento

Base a: $a > 0$, $a \neq 1$
Argumento x: $x > 0$

Ejercicio 2.1. Escriba en forma logarítmica o en forma exponencial según el caso.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$7^2 = 49$	
$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$	
	$\log_3 81 = 4$
	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$
$5 = a^{-1}$	
$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	
	$\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
$a^5 = 6$	
	$\log_2 128 = 7$
$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$	

Ejemplo 2.4. Encuentre el valor de y en las siguientes expresiones logarítmicas donde $a > 0$, $a \neq 1$.

a) $\log_a 1 = y$ .... $a^y = 1$, como $a \neq 1$
$y = 0$
Se concluye que $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a a = y$ .... $a^y = a$, como $a \neq 0$, $a \neq 1$
$y = 1$
Se concluye que $\log_a a = 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

Ejercicio 2.2. Calcule el valor de y en las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log_4 4 = y$
b) $\log_5 1 = y$
c) $\log_7 1 = y$
d) $\log_{70} 70 = y$
e) $\log_c c = y$
f) $\log_m 1 = y$

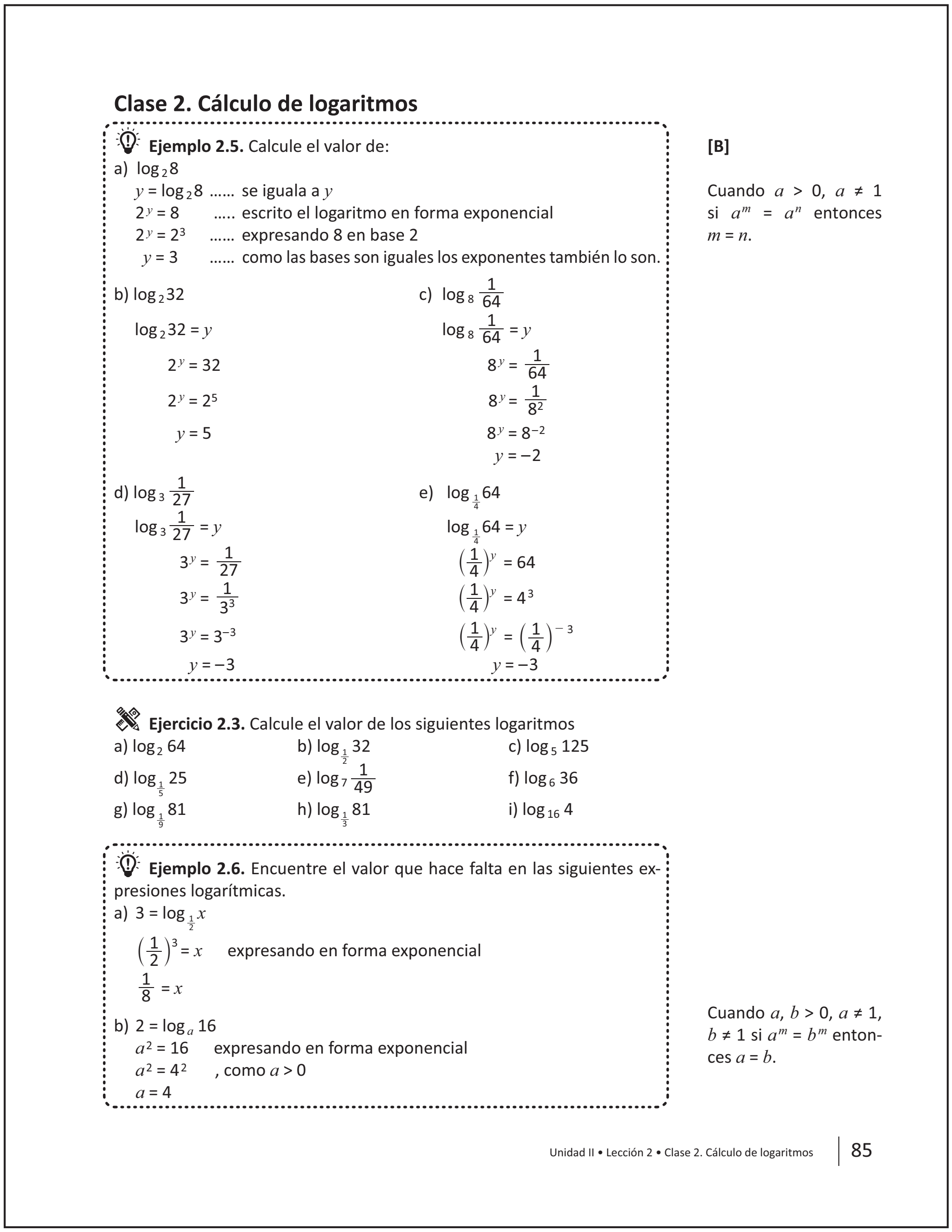
Unidad II. Lección 2.

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Calcular el valor de los logaritmos.
Encontrar el valor desconocido en las expresiones logarítmicas.

Evaluación: [B] Ejercicio 2.3 y 2.4



Clase 2. Cálculo de logaritmos

Ejemplo 2.5. Calcule el valor de:

a) $\log_2 8$

$y = \log_2 8$ …… se iguala a y

$2^y = 8$ ….. escrito el logaritmo en forma exponencial

$2^y = 2^3$ …… expresando 8 en base 2

$y = 3$ …… como las bases son iguales los exponentes también lo son.

b) $\log_2 32$

$$\log_2 32 = y$$
$$2^y = 32$$
$$2^y = 2^5$$
$$y = 5$$

c) $\log_8 \frac{1}{64}$

$$\log_8 \frac{1}{64} = y$$
$$8^y = \frac{1}{64}$$
$$8^y = \frac{1}{8^2}$$
$$8^y = 8^{-2}$$
$$y = -2$$

d) $\log_3 \frac{1}{27}$

$$\log_3 \frac{1}{27} = y$$
$$3^y = \frac{1}{27}$$
$$3^y = \frac{1}{3^3}$$
$$3^y = 3^{-3}$$
$$y = -3$$

e) $\log_{\frac{1}{4}} 64$

$$\log_{\frac{1}{4}} 64 = y$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^y = 64$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4^3$$
$$\left(\frac{1}{4}\right)^y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$
$$y = -3$$

[B]

Cuando $a > 0$, $a \neq 1$ si $a^m = a^n$ entonces $m = n$.

Ejercicio 2.3. Calcule el valor de los siguientes logaritmos

a) $\log_2 64$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ c) $\log_5 125$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25$ e) $\log_7 \frac{1}{49}$ f) $\log_6 36$

g) $\log_{\frac{1}{9}} 81$ h) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ i) $\log_{16} 4$

Ejemplo 2.6. Encuentre el valor que hace falta en las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $3 = \log_{\frac{1}{2}} x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$ expresando en forma exponencial

$\frac{1}{8} = x$

b) $2 = \log_a 16$

$a^2 = 16$ expresando en forma exponencial

$a^2 = 4^2$, como $a > 0$

$a = 4$

Cuando $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ si $a^m = b^m$ entonces $a = b$.

Unidad II • Lección 2 • Clase 2. Cálculo de logaritmos 85

Ejemplo 2.5.

*Concluir que el logaritmo se iguala a y, luego se pasa a la forma exponencial y por último se aplica la propiedad $a^m = a^n$ para encontrar el valor del logaritmo.

*Recordarle al estudiante que si las potencias son iguales y tienen la misma base entonces los exponentes son iguales.

(15 min)

Ejercicio 2.3

(10 min) Solución

a) $2^y = 64$, $y = 6$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 32$, $y = -5$

c) $5^y = 125$, $y = 3$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^y = 25$, $y = -2$

e) $7^y = \frac{1}{49}$, $y = -2$

f) $6^y = 36$, $y = 2$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^y = 81$, $y = -2$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^y = 81$, $y = -4$

i) $16^y = 4$, $y = \frac{1}{2}$

Ejemplo 2.6.

*Enfatizar que convierte de la forma logarítmica a la exponencial y se aplican las propiedades de los exponentes ($a^m = a^n$ y $a^m = b^m$). (10 min)

Unidad II. Lección 2.

Clase 2

(Continuación)

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[C]** Deducir las propiedades de los logaritmos mediante tablas.
Aplicar las propiedades de los logaritmos para reducir una expresión logarítmica a un solo logaritmo.

Evaluación: [C] Ejercicio 2.5

Ejercicio 2.4.

(10 min) Solución

a) $3^y = \dfrac{1}{243}$ $\quad y = -5$

b) $a^3 = 27,$ $\quad a = 3$

c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = x,$ $\quad x = \dfrac{1}{64}$

d) $a^{-5} = \dfrac{1}{32},$ $\quad a = 2$

e) $2^y = 128,$ $\quad y = 7$

f) $8^2 = x,$ $\quad x = 64$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^y = 64,$ $\quad y = -6$

h) $5^{-3} = x,$ $\quad x = \dfrac{1}{125}$

i) $a^2 = 16,$ $\quad a = 4$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

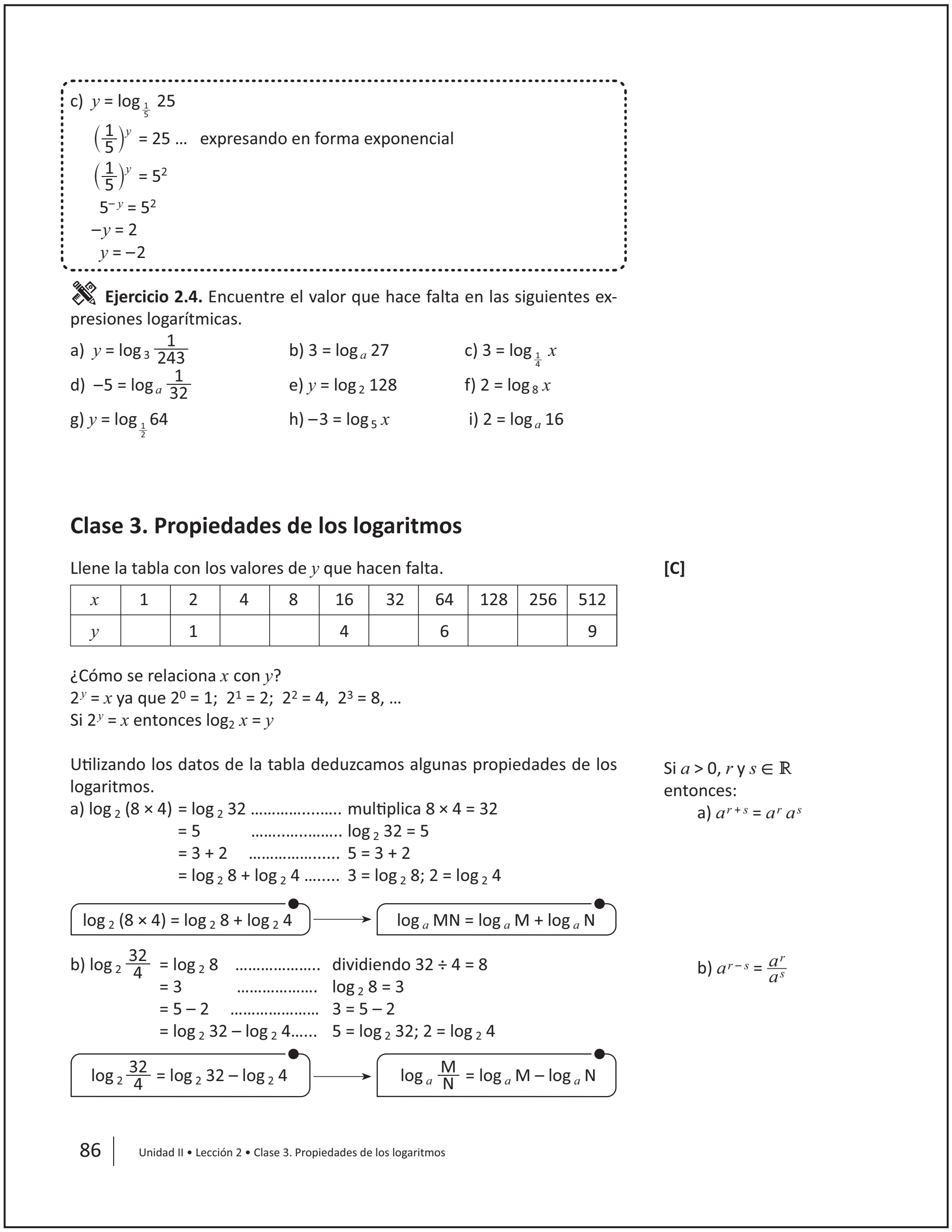
- Deducir las propiedades de los logaritmos.
  *Llenar la tabla con los valores que hacen falta para y.
  *Deducir que la expresión general que satisface a x es 2^y.
  *Utilizando los datos de la tabla, deducir en forma general las propiedades de los logaritmos:

a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

b) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

c) $\log_a x^n = n \log_a x$

(20 min)



c) $y = \log_{\frac{1}{5}} 25$

$\left(\frac{1}{5}\right)^y = 25$ … expresando en forma exponencial

$\left(\frac{1}{5}\right)^y = 5^2$

$5^{-y} = 5^2$

$-y = 2$

$y = -2$

Ejercicio 2.4. Encuentre el valor que hace falta en las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $y = \log_3 \frac{1}{243}$ b) $3 = \log_a 27$ c) $3 = \log_{\frac{1}{4}} x$

d) $-5 = \log_a \frac{1}{32}$ e) $y = \log_2 128$ f) $2 = \log_8 x$

g) $y = \log_{\frac{1}{2}} 64$ h) $-3 = \log_5 x$ i) $2 = \log_a 16$

Clase 3. Propiedades de los logaritmos

Llene la tabla con los valores de y que hacen falta. **[C]**

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
y		1			4		6			9

¿Cómo se relaciona x con y?
$2^y = x$ ya que $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, …
Si $2^y = x$ entonces $\log_2 x = y$

Utilizando los datos de la tabla deduzcamos algunas propiedades de los logaritmos.

a) $\log_2 (8 \times 4) = \log_2 32$ ………………… multiplica $8 \times 4 = 32$
$= 5$ ………………… $\log_2 32 = 5$
$= 3 + 2$ ………………… $5 = 3 + 2$
$= \log_2 8 + \log_2 4$ …….. $3 = \log_2 8$; $2 = \log_2 4$

$$\boxed{\log_2 (8 \times 4) = \log_2 8 + \log_2 4} \longrightarrow \boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$$

b) $\log_2 \frac{32}{4} = \log_2 8$ ………………… dividiendo $32 \div 4 = 8$
$= 3$ ………………… $\log_2 8 = 3$
$= 5 - 2$ ………………… $3 = 5 - 2$
$= \log_2 32 - \log_2 4$…… $5 = \log_2 32$; $2 = \log_2 4$

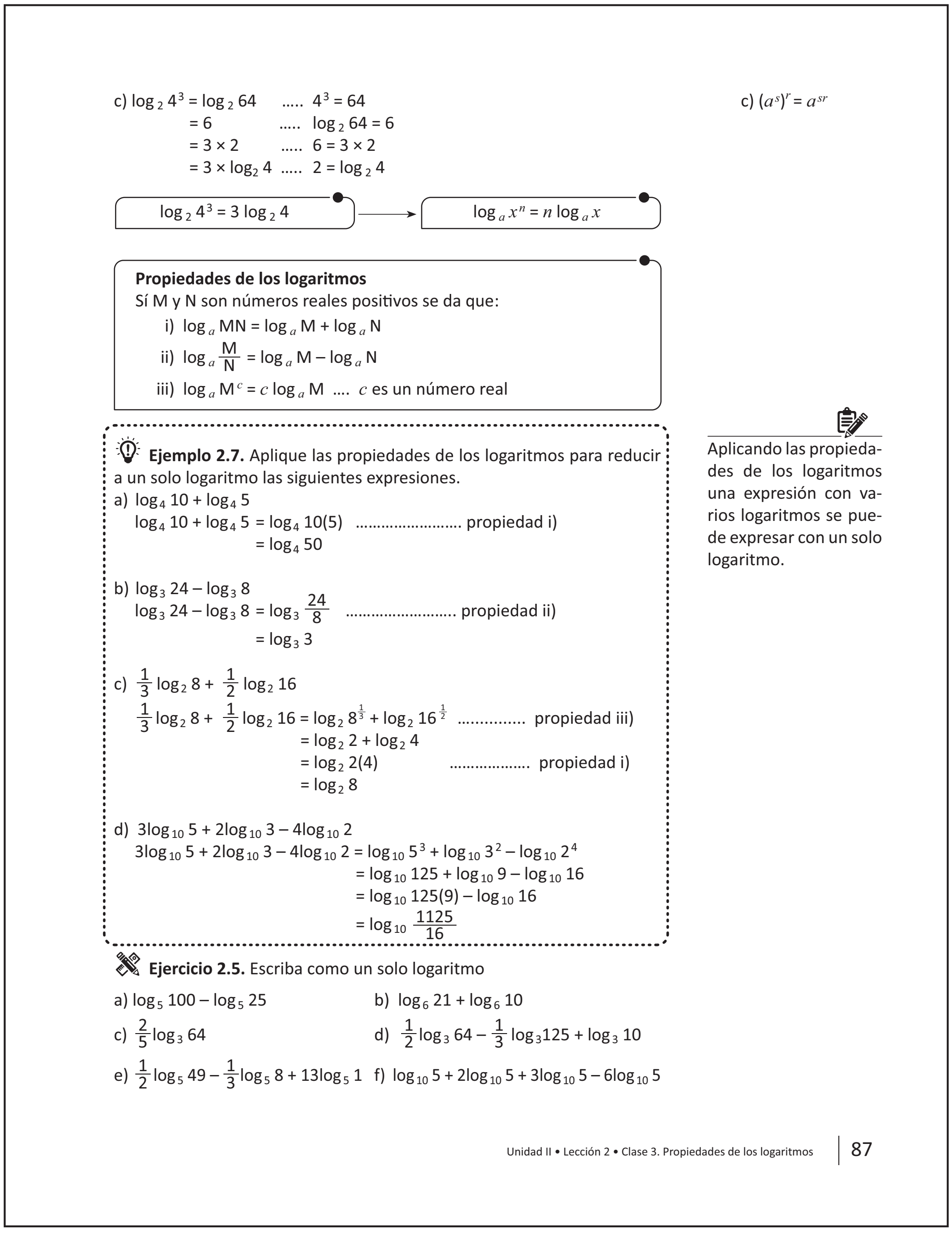
$$\boxed{\log_2 \frac{32}{4} = \log_2 32 - \log_2 4} \longrightarrow \boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

Si $a > 0$, r y $s \in \mathbb{R}$ entonces:
a) $a^{r+s} = a^r a^s$
b) $a^{r-s} = \dfrac{a^r}{a^s}$

86 | Unidad II • Lección 2 • Clase 3. Propiedades de los logaritmos

x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Clase 3
(Continuación)



c) $\log_2 4^3 = \log_2 64$ ..... $4^3 = 64$
$= 6$ ..... $\log_2 64 = 6$
$= 3 \times 2$ ..... $6 = 3 \times 2$
$= 3 \times \log_2 4$ ..... $2 = \log_2 4$

$\log_2 4^3 = 3 \log_2 4$ ⟶ $\log_a x^n = n \log_a x$

c) $(a^s)^r = a^{sr}$

Propiedades de los logaritmos
Sí M y N son números reales positivos se da que:
i) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
ii) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
iii) $\log_a M^c = c \log_a M$ .... c es un número real

Ejemplo 2.7. Aplique las propiedades de los logaritmos para reducir a un solo logaritmo las siguientes expresiones.

a) $\log_4 10 + \log_4 5$
$\log_4 10 + \log_4 5 = \log_4 10(5)$ .... propiedad i)
$= \log_4 50$

b) $\log_3 24 - \log_3 8$
$\log_3 24 - \log_3 8 = \log_3 \frac{24}{8}$ .... propiedad ii)
$= \log_3 3$

c) $\frac{1}{3} \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 16$
$\frac{1}{3} \log_2 8 + \frac{1}{2} \log_2 16 = \log_2 8^{\frac{1}{3}} + \log_2 16^{\frac{1}{2}}$ .... propiedad iii)
$= \log_2 2 + \log_2 4$
$= \log_2 2(4)$ .... propiedad i)
$= \log_2 8$

d) $3\log_{10} 5 + 2\log_{10} 3 - 4\log_{10} 2$
$3\log_{10} 5 + 2\log_{10} 3 - 4\log_{10} 2 = \log_{10} 5^3 + \log_{10} 3^2 - \log_{10} 2^4$
$= \log_{10} 125 + \log_{10} 9 - \log_{10} 16$
$= \log_{10} 125(9) - \log_{10} 16$
$= \log_{10} \frac{1125}{16}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos una expresión con varios logaritmos se puede expresar con un solo logaritmo.

Ejercicio 2.5. Escriba como un solo logaritmo

a) $\log_5 100 - \log_5 25$
b) $\log_6 21 + \log_6 10$
c) $\frac{2}{5}\log_3 64$
d) $\frac{1}{2}\log_3 64 - \frac{1}{3}\log_3 125 + \log_3 10$
e) $\frac{1}{2}\log_5 49 - \frac{1}{3}\log_5 8 + 13\log_5 1$
f) $\log_{10} 5 + 2\log_{10} 5 + 3\log_{10} 5 - 6\log_{10} 5$

Unidad II • Lección 2 • Clase 3. Propiedades de los logaritmos | 87

Ejemplo 2.7
*Hacer que identifiquen la propiedad a aplicar en cada expresión.
*Reducir las expresiones a un solo logaritmo.
(15 min)

Ejercicio 2.5
(10 min) Solución:

a) $\log_5 \frac{100}{25} = \log_5 4$

b) $\log_6 (21 \cdot 10) = \log_6 210$

c) $\log_3 (64)^{\frac{2}{5}} = \log_3 4\sqrt[5]{4}$

d) $\log_3 (64)^{\frac{1}{2}} - \log_3 (125)^{\frac{1}{3}} + \log_3 10$
$= \log_3 \left(\frac{64^{\frac{1}{2}}}{125^{\frac{1}{3}}}\right)(10)$
$= \log_3 16$

e) $\log_5 (49)^{\frac{1}{2}} - \log_5 (8)^{\frac{1}{3}} + \log_5 1^{13}$
$= \log_5 \left(\frac{49^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}}\right)(1)$
$= \log_5 \frac{7}{2}$

f) $\log_{10} 5 + \log_{10} (5)^2 + \log_{10} 5^3 - \log_{10} 5^6$
$= \log_{10} (5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \div 5^6)$
$= \log_{10} 1$
$= 0$

Unidad II. Lección 2.

Clase 4

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[D]** Calcular el valor de logaritmos comunes y naturales usando calculadora.
[E] Calcular logaritmos usando el cambio de base.

Evaluación: [D] y [E] Ejercicio 2.6 y 2.7

- Conocer los logaritmos comunes y los logaritmos naturales.
  *Llamar a los logaritmos de base 10 logaritmos comunes y a los de base e logaritmos naturales. [D]
  *Enfatizar en sus escrituras.
  (5 min)

- Encontrar el valor de los logaritmos comunes y los logaritmos naturales.

Ejemplo 2.8.

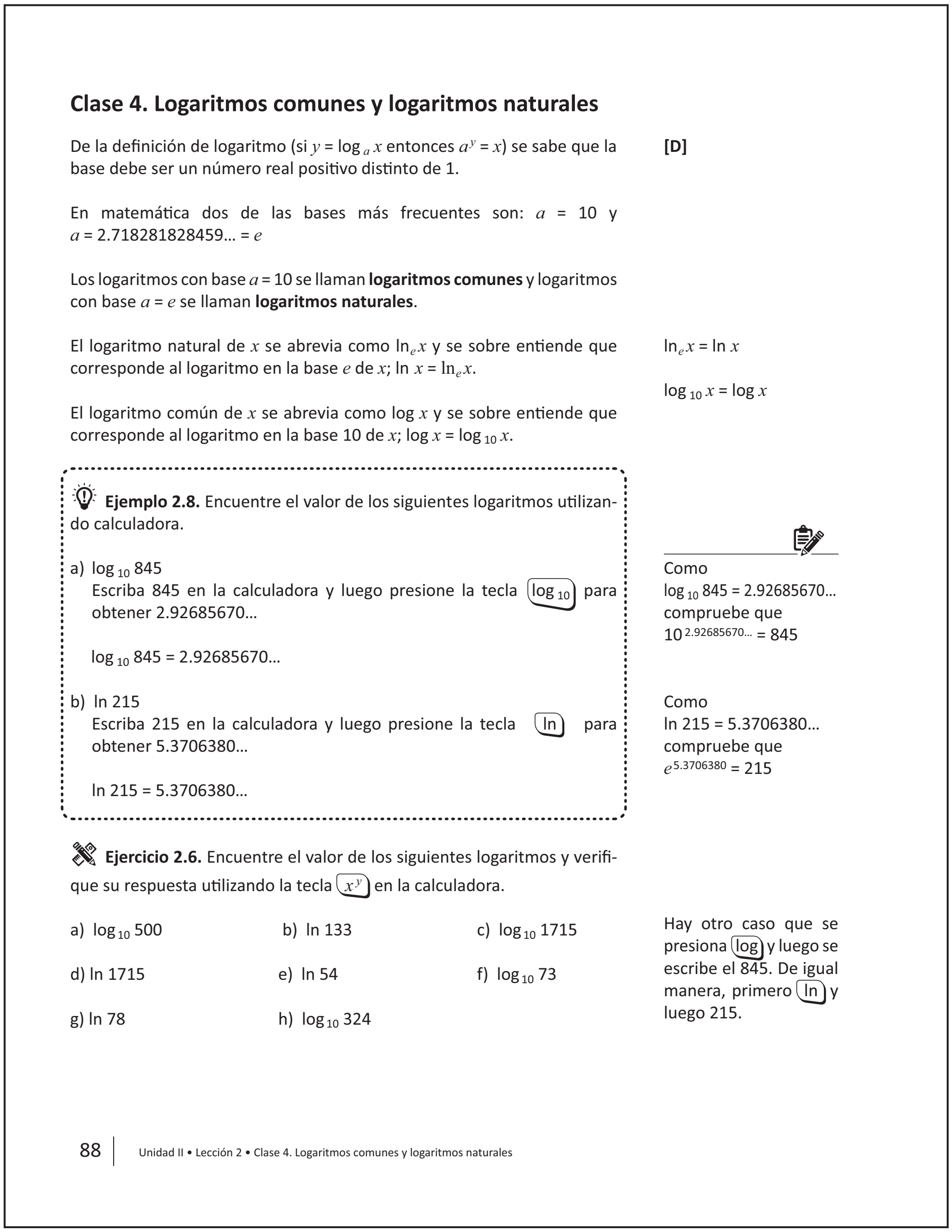
* Hacer uso de la calculadora.

* Comprobar los valores encontrados usando la tecla x^y casio ∧ de la calculadora.
(7 min)

Ejercicio 2.6.

(8 min) Solución

a) 2.6989…
b) 4.8903…
c) 3.2342…
d) 7.4471…
e) 3.9889…
f) 1.8633…
g) 4.3567…
h) 2.5105…



Clase 4. Logaritmos comunes y logaritmos naturales

De la definición de logaritmo (si $y = \log_a x$ entonces $a^y = x$) se sabe que la base debe ser un número real positivo distinto de 1.

[D]

En matemática dos de las bases más frecuentes son: a = 10 y a = 2.718281828459… = e

Los logaritmos con base a = 10 se llaman **logaritmos comunes** y logaritmos con base $a = e$ se llaman **logaritmos naturales**.

El logaritmo natural de x se abrevia como $\ln_e x$ y se sobre entiende que corresponde al logaritmo en la base e de x; $\ln x = \ln_e x$.

El logaritmo común de x se abrevia como $\log x$ y se sobre entiende que corresponde al logaritmo en la base 10 de x; $\log x = \log_{10} x$.

$\ln_e x = \ln x$

$\log_{10} x = \log x$

Ejemplo 2.8. Encuentre el valor de los siguientes logaritmos utilizando calculadora.

a) $\log_{10} 845$
Escriba 845 en la calculadora y luego presione la tecla $\log_{10}$ para obtener 2.92685670…

$\log_{10} 845 = 2.92685670…$

b) ln 215
Escriba 215 en la calculadora y luego presione la tecla ln para obtener 5.3706380…

ln 215 = 5.3706380…

Como $\log_{10} 845 = 2.92685670…$ compruebe que $10^{2.92685670…} = 845$

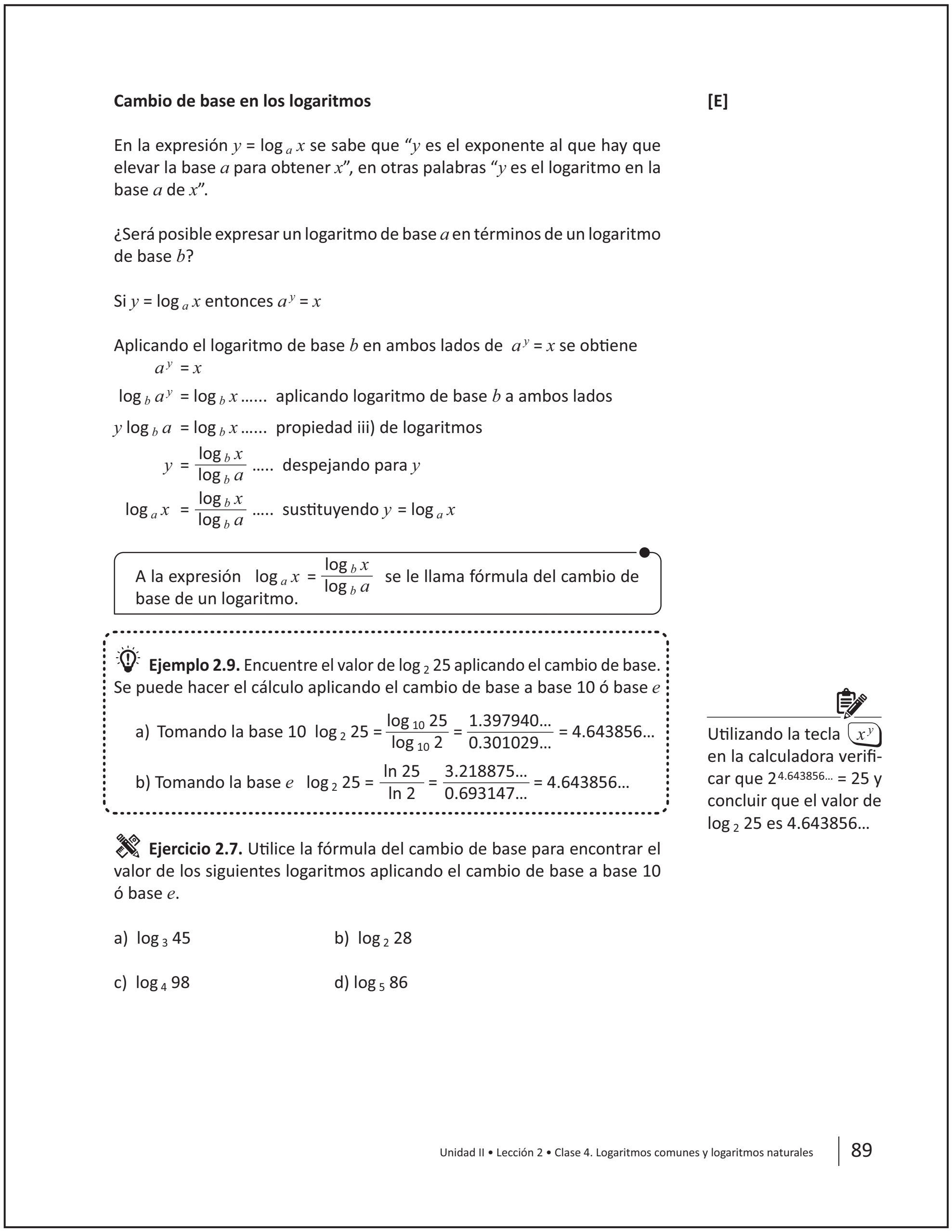
Como ln 215 = 5.3706380… compruebe que $e^{5.3706380} = 215$

Ejercicio 2.6. Encuentre el valor de los siguientes logaritmos y verifique su respuesta utilizando la tecla x^y en la calculadora.

a) $\log_{10} 500$
b) ln 133
c) $\log_{10} 1715$
d) ln 1715
e) ln 54
f) $\log_{10} 73$
g) ln 78
h) $\log_{10} 324$

Hay otro caso que se presiona log y luego se escribe el 845. De igual manera, primero ln y luego 215.

Clase 4
(Continuación)



Cambio de base en los logaritmos **[E]**

En la expresión $y = \log_a x$ se sabe que "y es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x", en otras palabras "y es el logaritmo en la base a de x".

¿Será posible expresar un logaritmo de base a en términos de un logaritmo de base b?

Si $y = \log_a x$ entonces $a^y = x$

Aplicando el logaritmo de base b en ambos lados de $a^y = x$ se obtiene

$$a^y = x$$

$$\log_b a^y = \log_b x \text{ ...... aplicando logaritmo de base } b \text{ a ambos lados}$$

$$y \log_b a = \log_b x \text{ ...... propiedad iii) de logaritmos}$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ ..... despejando para } y$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ ..... sustituyendo } y = \log_a x$$

A la expresión $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ se le llama fórmula del cambio de base de un logaritmo.

Ejemplo 2.9. Encuentre el valor de $\log_2 25$ aplicando el cambio de base. Se puede hacer el cálculo aplicando el cambio de base a base 10 ó base e

a) Tomando la base 10 $\log_2 25 = \dfrac{\log_{10} 25}{\log_{10} 2} = \dfrac{1.397940...}{0.301029...} = 4.643856...$

b) Tomando la base e $\log_2 25 = \dfrac{\ln 25}{\ln 2} = \dfrac{3.218875...}{0.693147...} = 4.643856...$

Utilizando la tecla $\boxed{x^y}$ en la calculadora verificar que $2^{4.643856...} = 25$ y concluir que el valor de $\log_2 25$ es 4.643856…

Ejercicio 2.7. Utilice la fórmula del cambio de base para encontrar el valor de los siguientes logaritmos aplicando el cambio de base a base 10 ó base e.

a) $\log_3 45$ b) $\log_2 28$

c) $\log_4 98$ d) $\log_5 86$

- Deducir el cambio de base en los logaritmos. [E]
  M: ¿Será posible expresar un logaritmo de base a en término de otro logaritmo de otra base?
  *Aplicando el logaritmo de base b a ambos lados de la expresión $a^y = x$ concluir que
  $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$
  *Llamar a esta fórmula "cambio de base de un logaritmo".
  (5 min)

Ejemplo 2.9

*Verificar los valores encontrados usando la tecla $\boxed{x^y}$ de la calculadora. (10 min)

Ejercicio 2.7.

(10 min) Solución

a) 3.4649...

b) 4.8073…

c) 3.3073…

d) 2.7676…

Unidad II. Lección 2.

Clase 5 y 6

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[F]** Definir una función logarítmica y conocer sus propiedades.
[G] Conocer la relación entre la función logarítmica y la función exponencial.

Evaluación: [G] Ejercicio 2.9 y 2.11

- Definir la función logarítmica. [F]
  *Recordar que la definición de logaritmo dice que la base debe ser un número positivo distinto de 1. Con base a esta definición de logaritmo definir la función logarítmica.
  (5 min)

Ejemplo 2.10

- Graficar las funciones logarítmicas
  $y = \log_2 x$;
  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

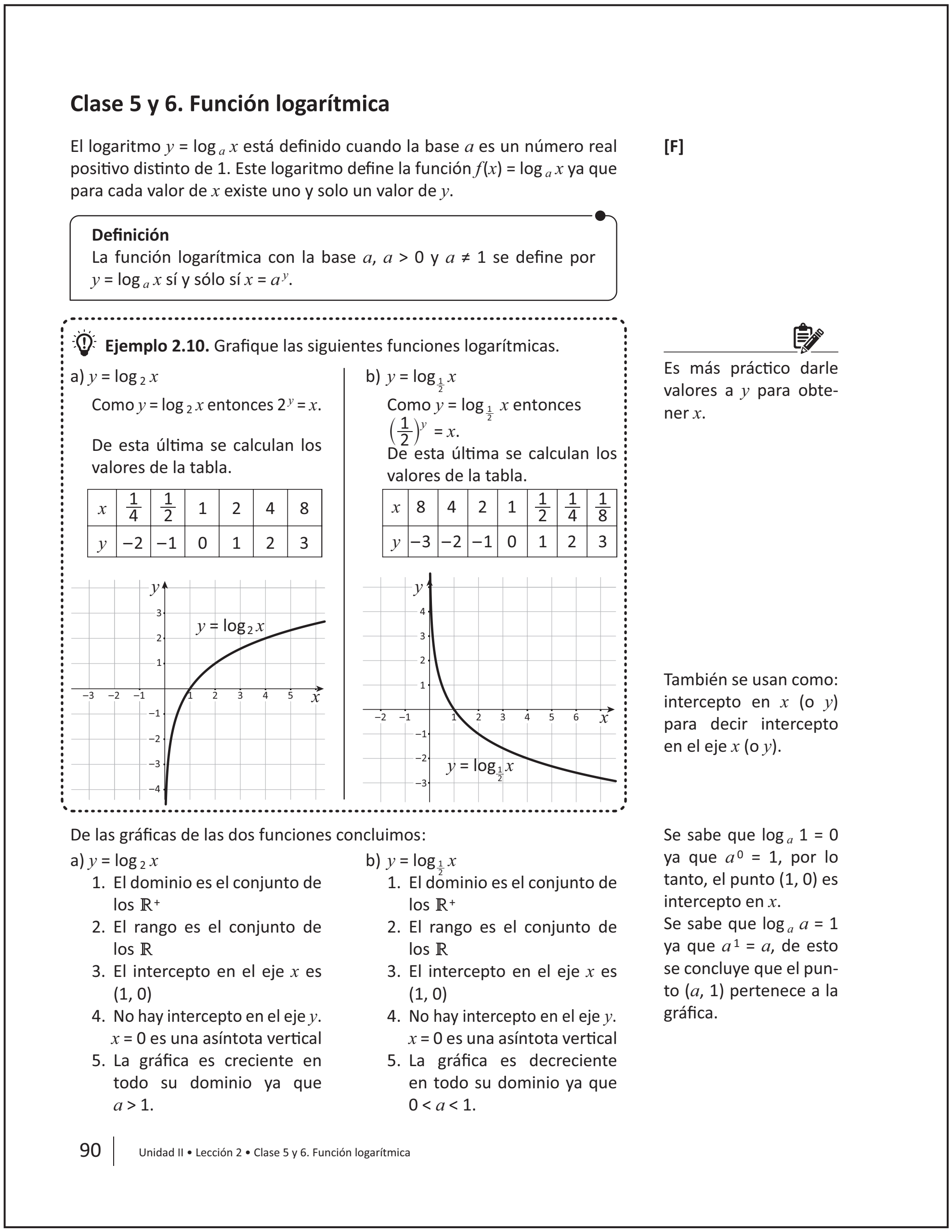
* En la tabla hacer ver que es más conveniente darle valores a y para encontrar x.

* Deducir el dominio, rango, interceptos en x y en y, y los intervalos de crecimiento.

* Concluir que la gráfica es creciente en todo su dominio cuando $a > 1$ y es decreciente cuando $0 < a < 1$.

* Deducir que el punto (1, 0) es el intercepto en x y que el punto (a, 1) donde a es la base pertenece a la gráfica.

(25 min)



Clase 5 y 6. Función logarítmica

El logaritmo $y = \log_a x$ está definido cuando la base a es un número real positivo distinto de 1. Este logaritmo define la función $f(x) = \log_a x$ ya que para cada valor de x existe uno y solo un valor de y.

[F]

Definición
La función logarítmica con la base a, $a > 0$ y $a \neq 1$ se define por $y = \log_a x$ sí y sólo sí $x = a^y$.

Ejemplo 2.10. Grafique las siguientes funciones logarítmicas.

a) $y = \log_2 x$

Como $y = \log_2 x$ entonces $2^y = x$.

De esta última se calculan los valores de la tabla.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−2	−1	0	1	2	3

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Como $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^y = x$.

De esta última se calculan los valores de la tabla.

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	−3	−2	−1	0	1	2	3

Es más práctico darle valores a y para obtener x.

De las gráficas de las dos funciones concluimos:

a) $y = \log_2 x$

1. El dominio es el conjunto de los $\mathbb{R}^+$
2. El rango es el conjunto de los $\mathbb{R}$
3. El intercepto en el eje x es (1, 0)
4. No hay intercepto en el eje y. $x = 0$ es una asíntota vertical
5. La gráfica es creciente en todo su dominio ya que $a > 1$.

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

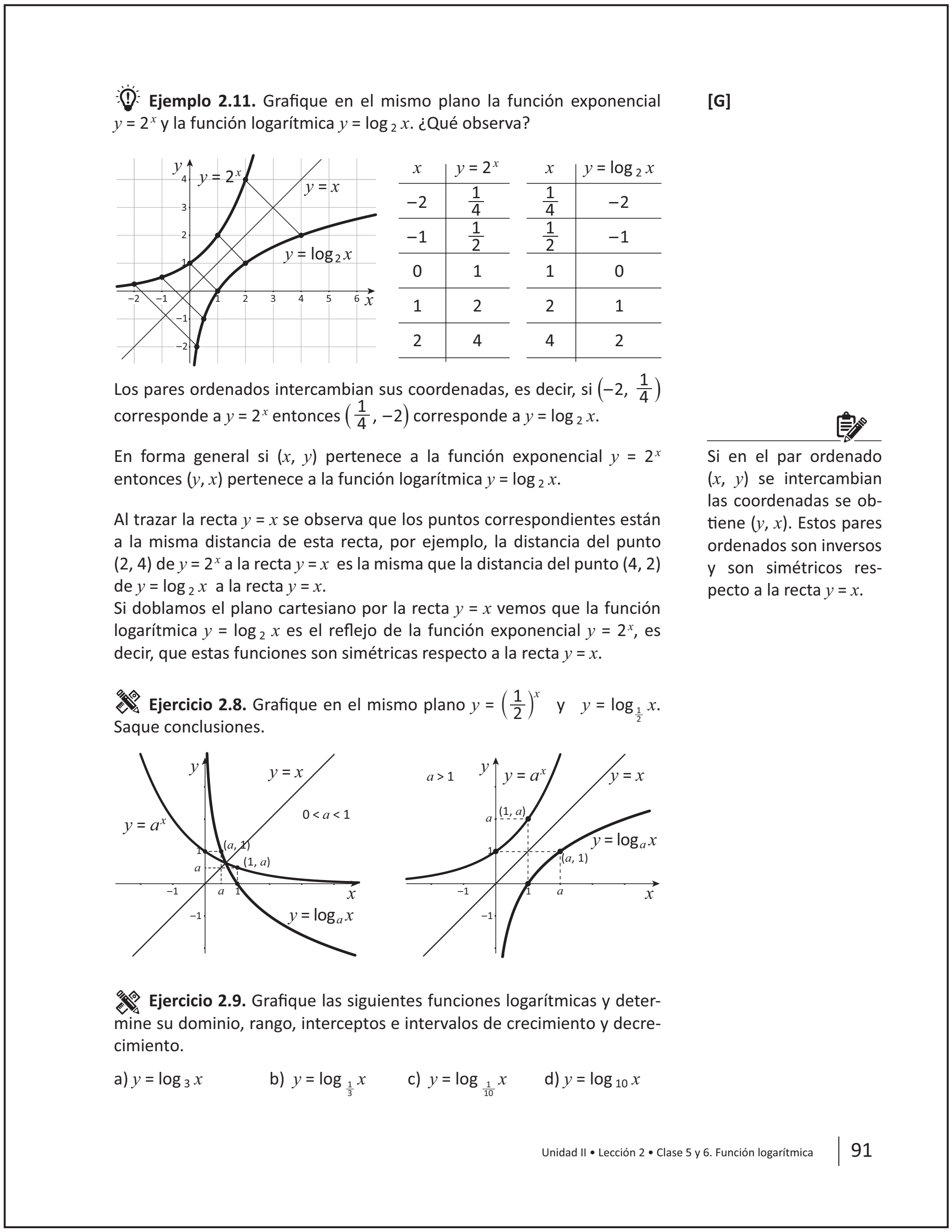
1. El dominio es el conjunto de los $\mathbb{R}^+$
2. El rango es el conjunto de los $\mathbb{R}$
3. El intercepto en el eje x es (1, 0)
4. No hay intercepto en el eje y. $x = 0$ es una asíntota vertical
5. La gráfica es decreciente en todo su dominio ya que $0 < a < 1$.

También se usan como: intercepto en x (o y) para decir intercepto en el eje x (o y).

Se sabe que $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$, por lo tanto, el punto (1, 0) es intercepto en x.
Se sabe que $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$, de esto se concluye que el punto (a, 1) pertenece a la gráfica.

90 | Unidad II • Lección 2 • Clase 5 y 6. Función logarítmica

Clase 5 y 6
(Continuación)



Ejemplo 2.11. Grafique en el mismo plano la función exponencial $y = 2^x$ y la función logarítmica $y = \log_2 x$. ¿Qué observa? **[G]**

x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

Los pares ordenados intercambian sus coordenadas, es decir, si $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ corresponde a $y = 2^x$ entonces $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ corresponde a $y = \log_2 x$.

En forma general si (x, y) pertenece a la función exponencial $y = 2^x$ entonces (y, x) pertenece a la función logarítmica $y = \log_2 x$.

Al trazar la recta $y = x$ se observa que los puntos correspondientes están a la misma distancia de esta recta, por ejemplo, la distancia del punto (2, 4) de $y = 2^x$ a la recta $y = x$ es la misma que la distancia del punto (4, 2) de $y = \log_2 x$ a la recta $y = x$.
Si doblamos el plano cartesiano por la recta $y = x$ vemos que la función logarítmica $y = \log_2 x$ es el reflejo de la función exponencial $y = 2^x$, es decir, que estas funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Si en el par ordenado (x, y) se intercambian las coordenadas se obtiene (y, x). Estos pares ordenados son inversos y son simétricos respecto a la recta $y = x$.

Ejercicio 2.8. Grafique en el mismo plano $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Saque conclusiones.

Ejercicio 2.9. Grafique las siguientes funciones logarítmicas y determine su dominio, rango, interceptos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ c) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ d) $y = \log_{10} x$

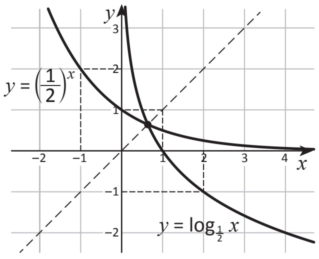
Ejemplo 2.11. [G]

- * Graficar en un mismo plano la función exponencial $y = 2^x$ y la función logarítmica $y = \log_2 x$.
- * Concluir que los pares ordenados cambian sus coordenadas, es decir, si (x, y) pertenece a la gráfica de la función exponencial entonces (y, x) pertenece a la función logarítmica.
- * Trazar la recta $y = x$, que se den cuenta que si se dobla por esa recta la gráfica de una función es el reflejo de la gráfica de la otra función.
- * Concluir que las gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$, es decir, que los puntos correspondientes están a la misma distancia de esta recta.

(15 min)

Ejercicio 2.8.

*Sacar conclusiones sobre los interceptos, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (5 min) Solución



Ejercicio 2.9. (10 min) Solución véase la página 108.

Clase 5 y 6

(Continuación)

Ejemplo 2.12.

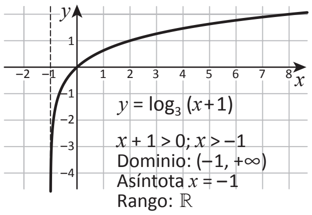
- * Al graficar las dos funciones darse cuenta que la gráfica de $y = \log_2 (x + 3)$ tiene un desplazamiento de 3 unidades a la izquierda en relación a la gráfica de $y = \log_2 x$.
- * Concluir con los desplazamientos a la izquierda o a la derecha de una función logarítmica.
- * Concluir sobre el argumento.
- * Concluir sobre el dominio.
- * Concluir sobre la asíntota vertical.

(7 min)

Ejercicio 2.10.

(10 min) Solución

a)



$y = \log_3 (x+1)$

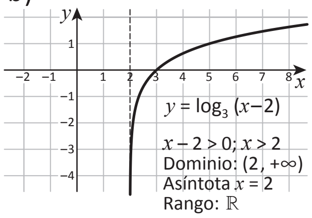
$x + 1 > 0; x > -1$

Dominio: $(-1, +\infty)$

Asíntota $x = -1$

Rango: $\mathbb{R}$

b)



$y = \log_3 (x-2)$

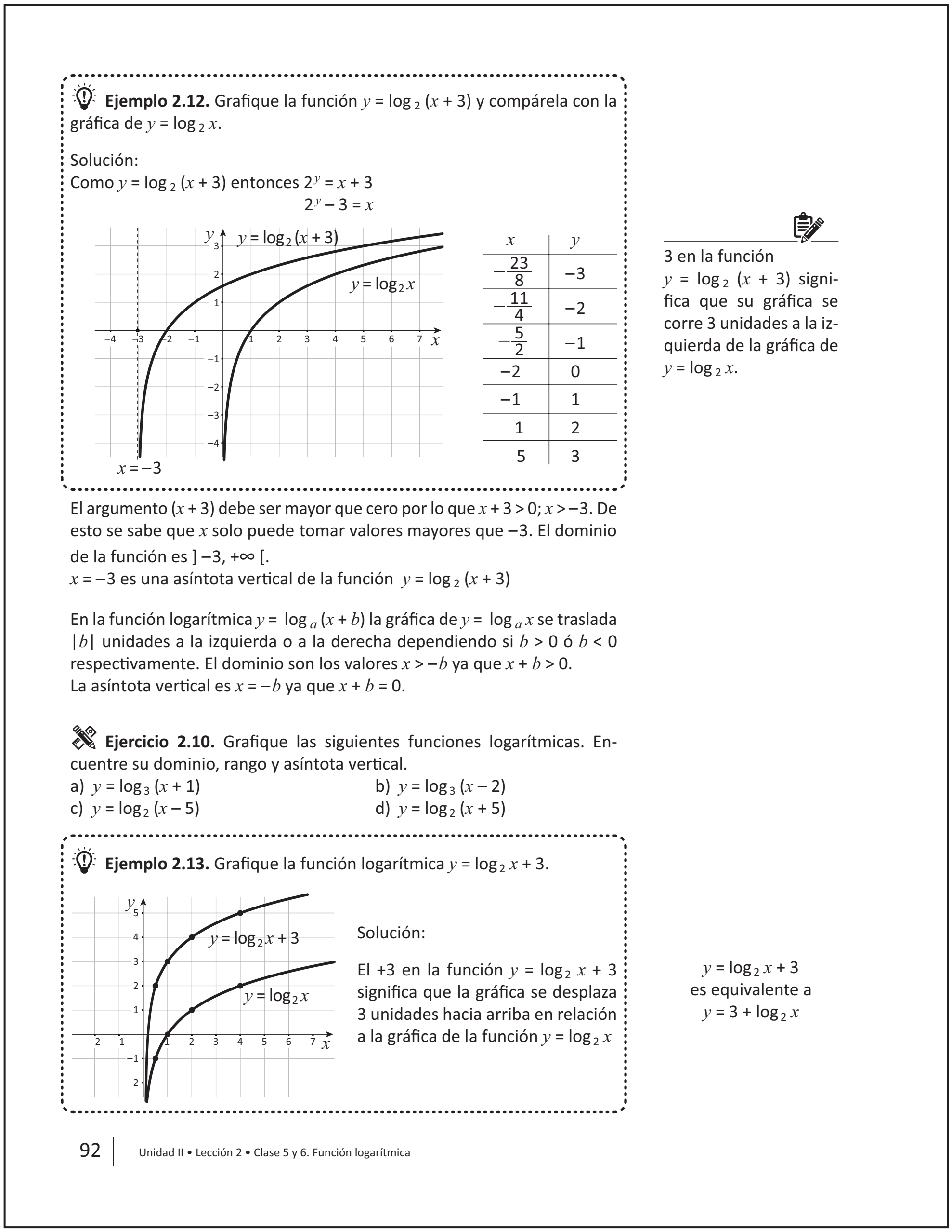
$x - 2 > 0; x > 2$

Dominio: $(2, +\infty)$

Asíntota $x = 2$

Rango: $\mathbb{R}$

Incisos c) y d) ver solución en página 108



Ejemplo 2.12. Grafique la función $y = \log_2 (x + 3)$ y compárela con la gráfica de $y = \log_2 x$.

Solución:

Como $y = \log_2 (x + 3)$ entonces $2^y = x + 3$

$2^y - 3 = x$

x	y
$-\frac{23}{8}$	-3
$-\frac{11}{4}$	-2
$-\frac{5}{2}$	-1
-2	0
-1	1
1	2
5	3

3 en la función $y = \log_2 (x + 3)$ significa que su gráfica se corre 3 unidades a la izquierda de la gráfica de $y = \log_2 x$.

El argumento $(x + 3)$ debe ser mayor que cero por lo que $x + 3 > 0$; $x > -3$. De esto se sabe que x solo puede tomar valores mayores que -3. El dominio de la función es $]-3, +\infty[$.

$x = -3$ es una asíntota vertical de la función $y = \log_2 (x + 3)$

En la función logarítmica $y = \log_a (x + b)$ la gráfica de $y = \log_a x$ se traslada $|b|$ unidades a la izquierda o a la derecha dependiendo si $b > 0$ ó $b < 0$ respectivamente. El dominio son los valores $x > -b$ ya que $x + b > 0$.
La asíntota vertical es $x = -b$ ya que $x + b = 0$.

Ejercicio 2.10. Grafique las siguientes funciones logarítmicas. Encuentre su dominio, rango y asíntota vertical.

a) $y = \log_3 (x + 1)$
b) $y = \log_3 (x - 2)$
c) $y = \log_2 (x - 5)$
d) $y = \log_2 (x + 5)$

Ejemplo 2.13. Grafique la función logarítmica $y = \log_2 x + 3$.

Solución:

El +3 en la función $y = \log_2 x + 3$ significa que la gráfica se desplaza 3 unidades hacia arriba en relación a la gráfica de la función $y = \log_2 x$

$y = \log_2 x + 3$ es equivalente a $y = 3 + \log_2 x$

92 | Unidad II • Lección 2 • Clase 5 y 6. Función logarítmica

Ejemplo 2.13.

- * Concluir con los desplazamientos hacia arriba y hacia abajo de una función logarítmica.

(5 min)

Objetivo: **[H]** Definir una ecuación logarítmica.
Resolver ecuaciones logarítmicas.

Evaluación: [H] Ejercicio 2.14, 2.15 y 2.16

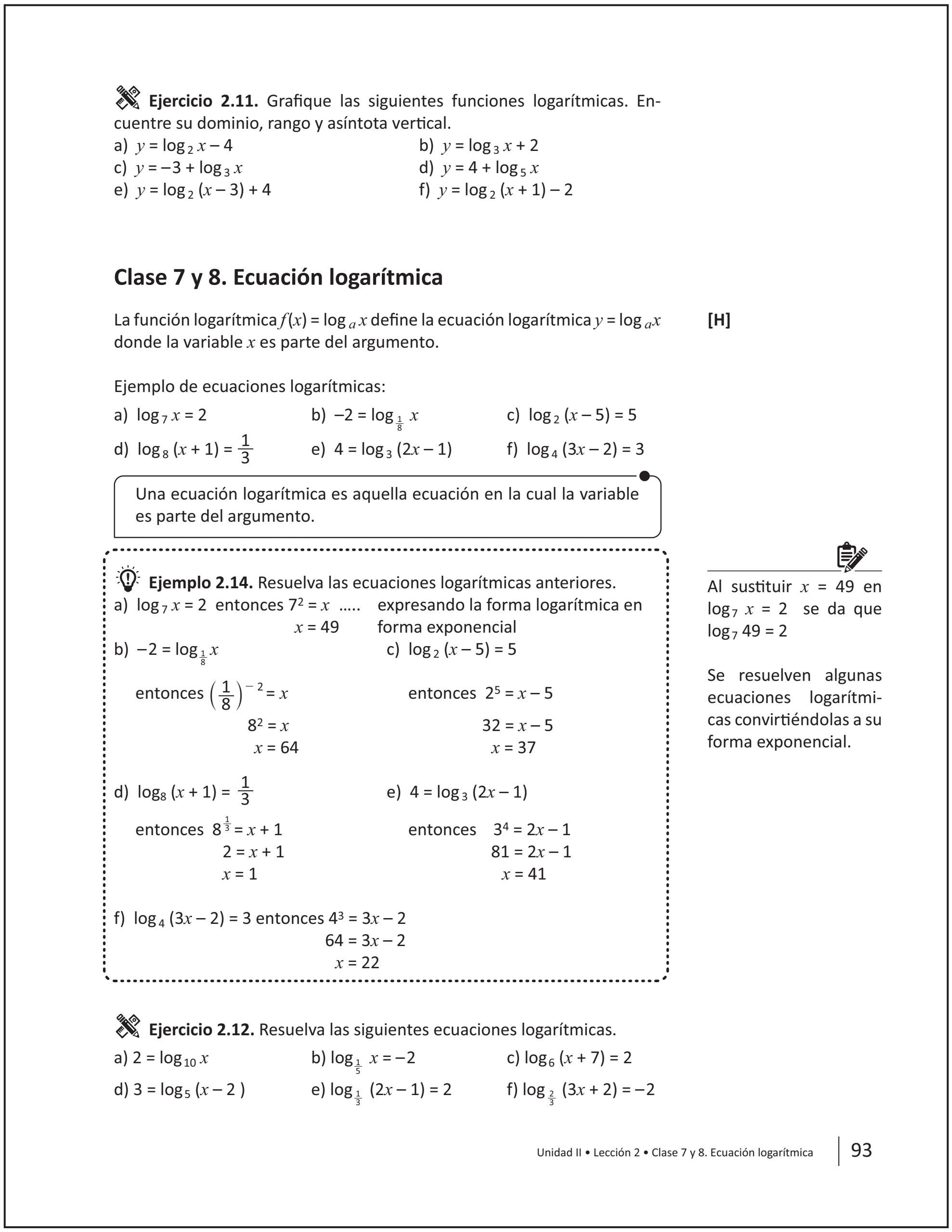
Unidad II. Lección 2.

Clase 5 y 6

(Continuación)

Clase 7 y 8

(Continúa en la siguiente página)



Ejercicio 2.11. Grafique las siguientes funciones logarítmicas. Encuentre su dominio, rango y asíntota vertical.

a) $y = \log_2 x - 4$
b) $y = \log_3 x + 2$
c) $y = -3 + \log_3 x$
d) $y = 4 + \log_5 x$
e) $y = \log_2 (x - 3) + 4$
f) $y = \log_2 (x + 1) - 2$

Clase 7 y 8. Ecuación logarítmica

La función logarítmica $f(x) = \log_a x$ define la ecuación logarítmica $y = \log_a x$ donde la variable x es parte del argumento. **[H]**

Ejemplo de ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_7 x = 2$
b) $-2 = \log_{\frac{1}{8}} x$
c) $\log_2 (x - 5) = 5$
d) $\log_8 (x + 1) = \frac{1}{3}$
e) $4 = \log_3 (2x - 1)$
f) $\log_4 (3x - 2) = 3$

Una ecuación logarítmica es aquella ecuación en la cual la variable es parte del argumento.

Ejemplo 2.14. Resuelva las ecuaciones logarítmicas anteriores.

a) $\log_7 x = 2$ entonces $7^2 = x$ ..... expresando la forma logarítmica en forma exponencial
$x = 49$

b) $-2 = \log_{\frac{1}{8}} x$

entonces $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = x$
$8^2 = x$
$x = 64$

c) $\log_2 (x - 5) = 5$

entonces $2^5 = x - 5$
$32 = x - 5$
$x = 37$

d) $\log_8 (x + 1) = \frac{1}{3}$

entonces $8^{\frac{1}{3}} = x + 1$
$2 = x + 1$
$x = 1$

e) $4 = \log_3 (2x - 1)$

entonces $3^4 = 2x - 1$
$81 = 2x - 1$
$x = 41$

f) $\log_4 (3x - 2) = 3$ entonces $4^3 = 3x - 2$
$64 = 3x - 2$
$x = 22$

Al sustituir $x = 49$ en $\log_7 x = 2$ se da que $\log_7 49 = 2$

Se resuelven algunas ecuaciones logarítmicas convirtiéndolas a su forma exponencial.

Ejercicio 2.12. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $2 = \log_{10} x$
b) $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$
c) $\log_6 (x + 7) = 2$
d) $3 = \log_5 (x - 2\ )$
e) $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) = 2$
f) $\log_{\frac{2}{3}} (3x + 2) = -2$

Unidad II • Lección 2 • Clase 7 y 8. Ecuación logarítmica | 93

Ejercicio 2.11

(8 min) Soluciones véase la página 109

[Hasta aquí Clase 5 y 6]

[Desde aquí Clase 7 y 8]

Definir una ecuación logarítmica. [H]

*Que se den cuenta que en una ecuación logarítmica la variable es parte del argumento. (5 min)

Ejemplo 2.14.

*Concluir que para resolver este tipo de ecuaciones logarítmicas se convierten a la forma exponencial y se aplican las propiedades de los exponentes. (15 min)

Ejercicio 2.12.

(10 min) Solución:

a) $x = 100$
b) $x = 25$
c) $x = 29$
d) $x = 127$
e) $x = \frac{5}{9}$
f) $x = \frac{1}{12}$

Clase 7 y 8

(Continuación)

Ejemplo 2.15.

*Que se den cuenta que en algunas ecuaciones logarítmicas hay que probar si los valores encontrados son parte del conjunto solución.

*Que se den cuenta que el argumento debe ser mayor que cero y que esta condición debe tomarse en cuenta para determinar si los valores encontrados son parte del conjunto solución. (5 min)

Ejercicio 2.13.

(10 min) Solución

a) x = 0, 3

b) x = −5, 3

Ejemplo 2.16.

*Concluir que en la solución de este tipo de ecuaciones logarítmicas se aplica las propiedades de los logaritmos. (5 min)

Ejercicio 2.14

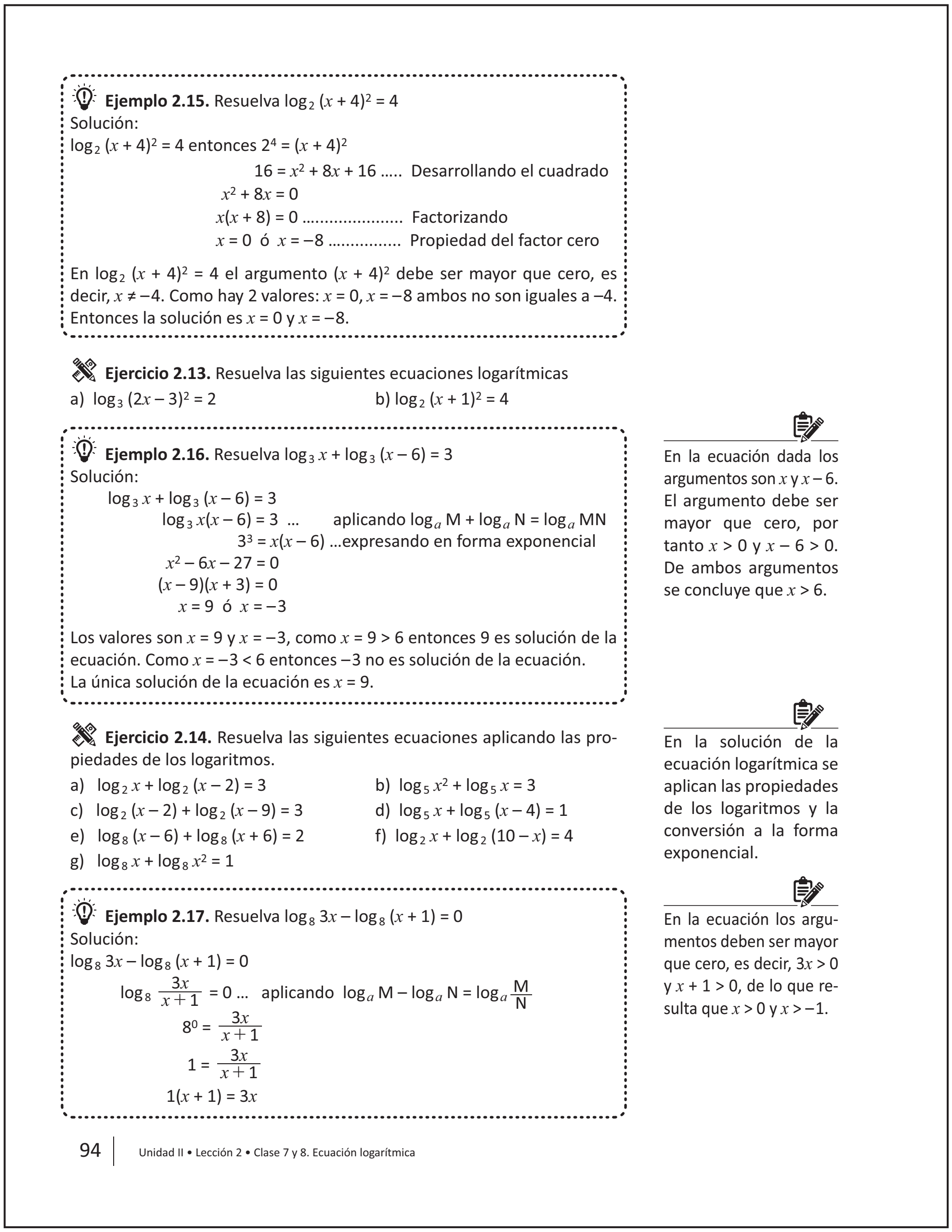
(10 min) Solución

a) 4 b) 5

c) 10 d) 5

e) 10 f) 2 y 8

g) 2



Ejemplo 2.15. Resuelva $\log_2 (x + 4)^2 = 4$

Solución:

$\log_2 (x + 4)^2 = 4$ entonces $2^4 = (x + 4)^2$

$16 = x^2 + 8x + 16$ ….. Desarrollando el cuadrado

$x^2 + 8x = 0$

$x(x + 8) = 0$ …………………. Factorizando

$x = 0$ ó $x = -8$ …………… Propiedad del factor cero

En $\log_2 (x + 4)^2 = 4$ el argumento $(x + 4)^2$ debe ser mayor que cero, es decir, $x \neq -4$. Como hay 2 valores: $x = 0$, $x = -8$ ambos no son iguales a –4. Entonces la solución es $x = 0$ y $x = -8$.

Ejercicio 2.13. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log_3 (2x - 3)^2 = 2$ b) $\log_2 (x + 1)^2 = 4$

Ejemplo 2.16. Resuelva $\log_3 x + \log_3 (x - 6) = 3$

Solución:

$\log_3 x + \log_3 (x - 6) = 3$

$\log_3 x(x - 6) = 3$ … aplicando $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

$3^3 = x(x - 6)$ …expresando en forma exponencial

$x^2 - 6x - 27 = 0$

$(x - 9)(x + 3) = 0$

$x = 9$ ó $x = -3$

Los valores son $x = 9$ y $x = -3$, como $x = 9 > 6$ entonces 9 es solución de la ecuación. Como $x = -3 < 6$ entonces −3 no es solución de la ecuación. La única solución de la ecuación es $x = 9$.

En la ecuación dada los argumentos son x y $x - 6$. El argumento debe ser mayor que cero, por tanto $x > 0$ y $x - 6 > 0$. De ambos argumentos se concluye que $x > 6$.

Ejercicio 2.14. Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando las propiedades de los logaritmos.

a) $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$ b) $\log_5 x^2 + \log_5 x = 3$

c) $\log_2 (x - 2) + \log_2 (x - 9) = 3$ d) $\log_5 x + \log_5 (x - 4) = 1$

e) $\log_8 (x - 6) + \log_8 (x + 6) = 2$ f) $\log_2 x + \log_2 (10 - x) = 4$

g) $\log_8 x + \log_8 x^2 = 1$

En la solución de la ecuación logarítmica se aplican las propiedades de los logaritmos y la conversión a la forma exponencial.

Ejemplo 2.17. Resuelva $\log_8 3x - \log_8 (x + 1) = 0$

Solución:

$\log_8 3x - \log_8 (x + 1) = 0$

$\log_8 \frac{3x}{x+1} = 0$ … aplicando $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

$8^0 = \frac{3x}{x+1}$

$1 = \frac{3x}{x+1}$

$1(x + 1) = 3x$

En la ecuación los argumentos deben ser mayor que cero, es decir, $3x > 0$ y $x + 1 > 0$, de lo que resulta que $x > 0$ y $x > -1$.

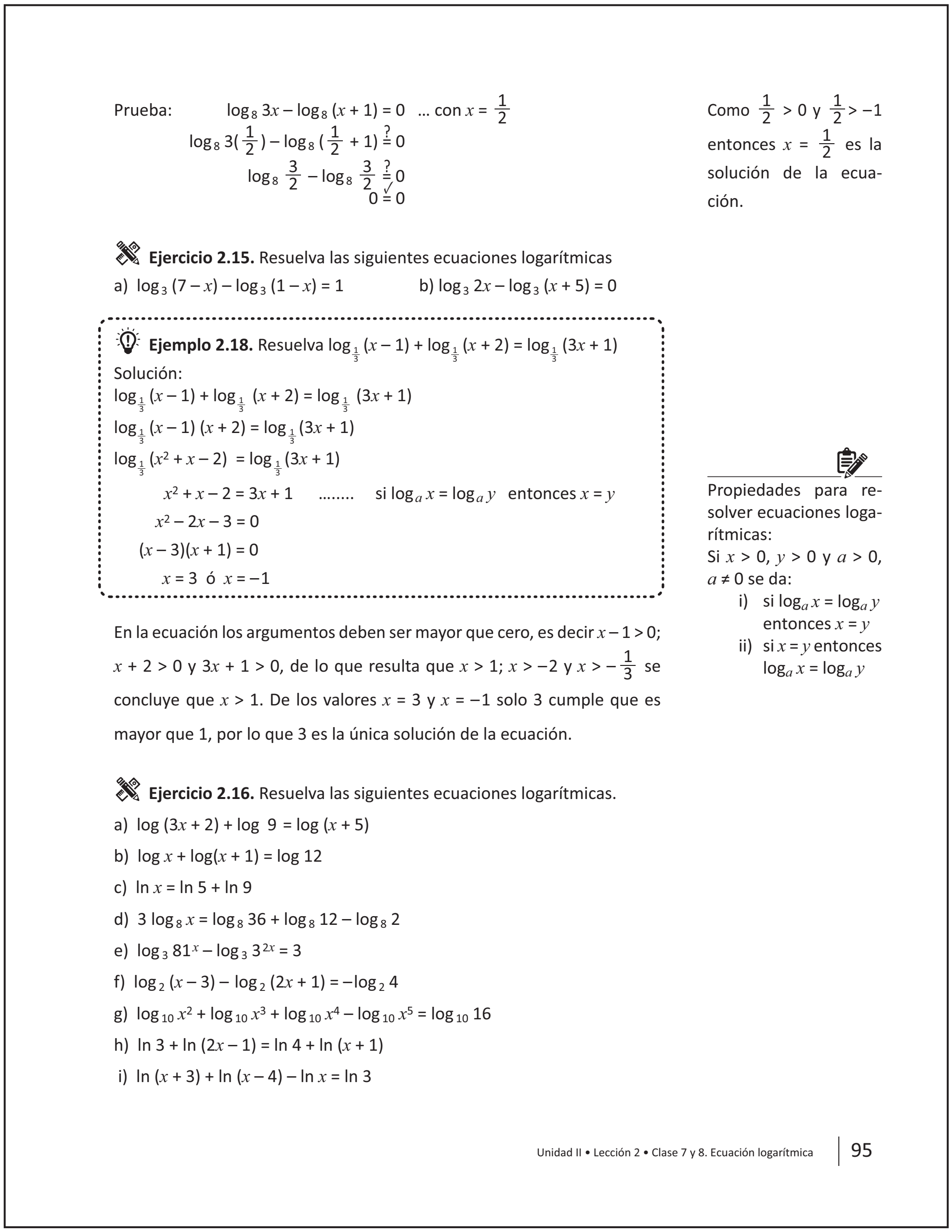
94 | Unidad II • Lección 2 • Clase 7 y 8. Ecuación logarítmica

Ejemplo 2.17.

*Concluir que en la solución de este tipo de ecuaciones logarítmicas se aplican las propiedades de los logaritmos. (5 min)

Clase 7 y 8

(Continuación)



Prueba: $\log_8 3x - \log_8 (x + 1) = 0$ … con $x = \frac{1}{2}$

$$\log_8 3\left(\frac{1}{2}\right) - \log_8 \left(\frac{1}{2} + 1\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\log_8 \frac{3}{2} - \log_8 \frac{3}{2} \overset{?}{=} 0$$

$$0 \overset{\checkmark}{=} 0$$

Como $\frac{1}{2} > 0$ y $\frac{1}{2} > -1$ entonces $x = \frac{1}{2}$ es la solución de la ecuación.

Ejercicio 2.15. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log_3 (7 - x) - \log_3 (1 - x) = 1$

b) $\log_3 2x - \log_3 (x + 5) = 0$

Ejemplo 2.18. Resuelva $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{3}} (x + 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x + 1)$

Solución:

$\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{3}} (x + 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x + 1)$

$\log_{\frac{1}{3}} (x - 1)(x + 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x + 1)$

$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + x - 2) = \log_{\frac{1}{3}} (3x + 1)$

$x^2 + x - 2 = 3x + 1$ …….. si $\log_a x = \log_a y$ entonces $x = y$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3$ ó $x = -1$

En la ecuación los argumentos deben ser mayor que cero, es decir $x - 1 > 0$; $x + 2 > 0$ y $3x + 1 > 0$, de lo que resulta que $x > 1$; $x > -2$ y $x > -\frac{1}{3}$ se concluye que $x > 1$. De los valores $x = 3$ y $x = -1$ solo 3 cumple que es mayor que 1, por lo que 3 es la única solución de la ecuación.

Propiedades para resolver ecuaciones logarítmicas:

Si $x > 0$, $y > 0$ y $a > 0$, $a \neq 0$ se da:

i) si $\log_a x = \log_a y$ entonces $x = y$

ii) si $x = y$ entonces $\log_a x = \log_a y$

Ejercicio 2.16. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log (3x + 2) + \log 9 = \log (x + 5)$

b) $\log x + \log(x + 1) = \log 12$

c) $\ln x = \ln 5 + \ln 9$

d) $3 \log_8 x = \log_8 36 + \log_8 12 - \log_8 2$

e) $\log_3 81^x - \log_3 3^{2x} = 3$

f) $\log_2 (x - 3) - \log_2 (2x + 1) = -\log_2 4$

g) $\log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 + \log_{10} x^4 - \log_{10} x^5 = \log_{10} 16$

h) $\ln 3 + \ln (2x - 1) = \ln 4 + \ln (x + 1)$

i) $\ln (x + 3) + \ln (x - 4) - \ln x = \ln 3$

Ejercicio 2.15

(10 min) Solución

a) $x = -2$

b) $x = 5$

Ejemplo 2.18.

*Concluir que en la solución de este tipo de ecuaciones logarítmicas se aplica las propiedades de los logaritmos. (5 min)

Ejercicio 2.16

(15 min) Solución:

a) $-\frac{1}{2}$

b) 3

c) 45

d) 6

e) $\frac{3}{2}$

f) $\frac{13}{2}$

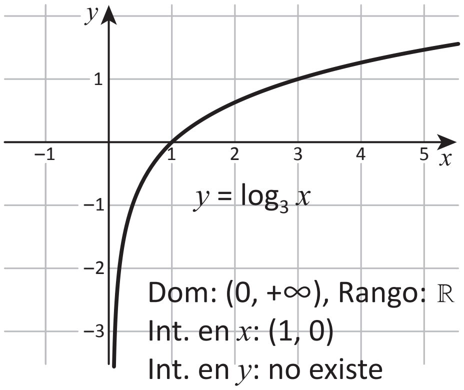
g) 2

h) $\frac{7}{2}$

i) 6

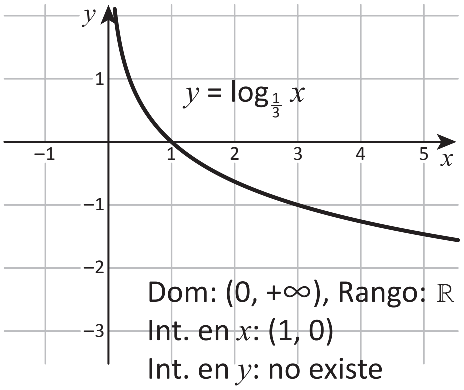
Solución Ejercicio 2.9. Pág. 103

a)



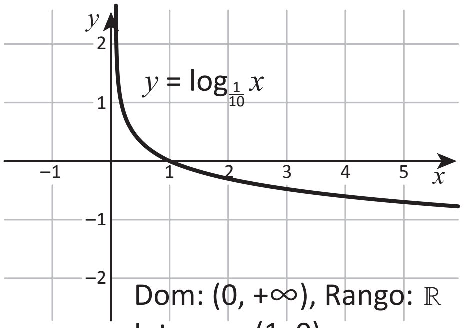
Dom: (0, +∞), Rango: $\mathbb{R}$
Int. en x: (1, 0)
Int. en y: no existe
Intérvalos:
Crecimiento (0, +∞)

b)



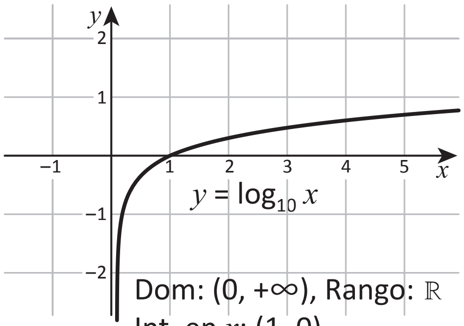
Dom: (0, +∞), Rango: $\mathbb{R}$
Int. en x: (1, 0)
Int. en y: no existe
Intérvalos:
Decrecimiento (0, +∞)

c)



Dom: (0, +∞), Rango: $\mathbb{R}$
Int. en x: (1, 0)
Int. en y: no existe
Intérvalos:
Decrecimiento (0, +∞)

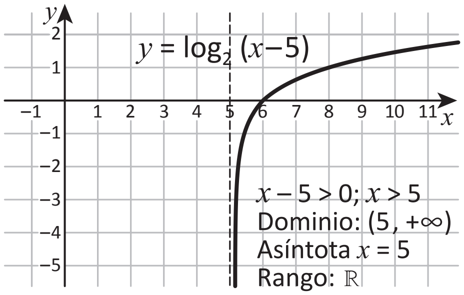
d)



Dom: (0, +∞), Rango: $\mathbb{R}$
Int. en x: (1, 0)
Int. en y: no existe
Intérvalos:
Crecimiento (0, +∞)

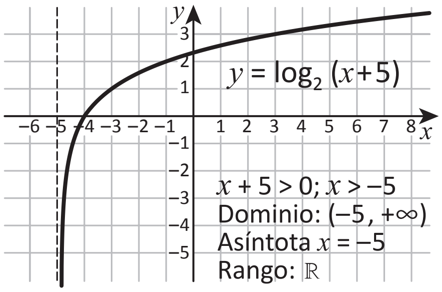
Solución Ejercicio 2.10. Pág. 104

c)



$x - 5 > 0$; $x > 5$
Dominio: (5, +∞)
Asíntota $x = 5$
Rango: $\mathbb{R}$

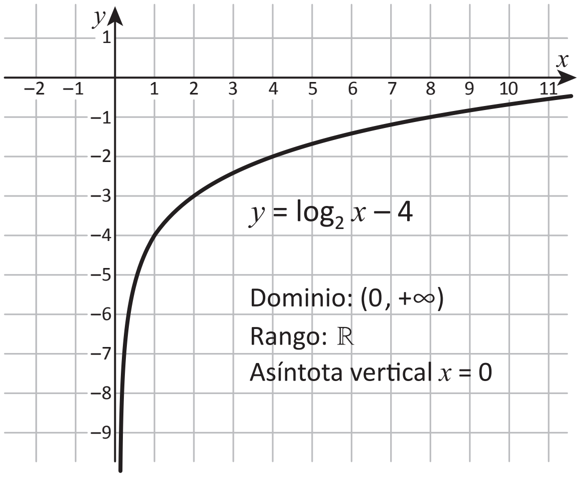
d)



$x + 5 > 0$; $x > -5$
Dominio: (−5, +∞)
Asíntota $x = -5$
Rango: $\mathbb{R}$

Solución Ejercicio 2.11. Pág. 105

a)



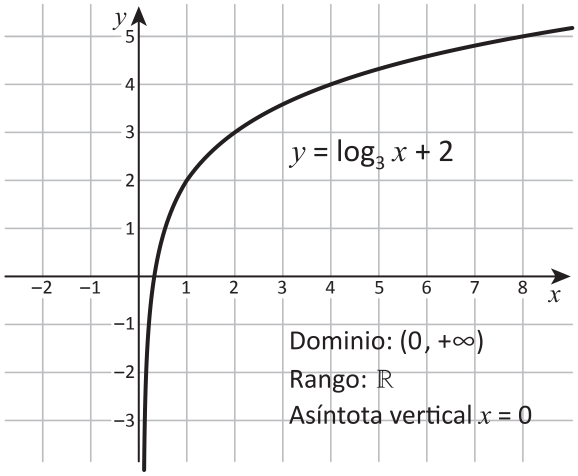
$y = \log_2 x - 4$

Dominio: $(0, +\infty)$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntota vertical $x = 0$

b)



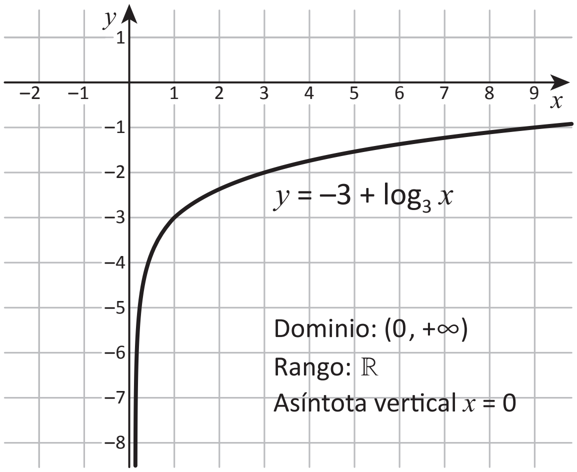
$y = \log_3 x + 2$

Dominio: $(0, +\infty)$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntota vertical $x = 0$

c)



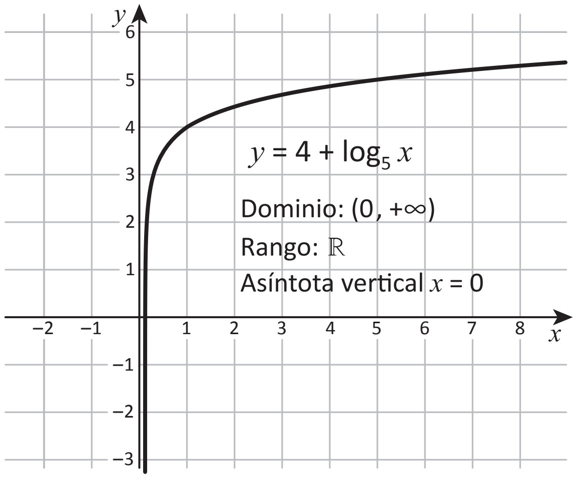
$y = -3 + \log_3 x$

Dominio: $(0, +\infty)$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntota vertical $x = 0$

d)



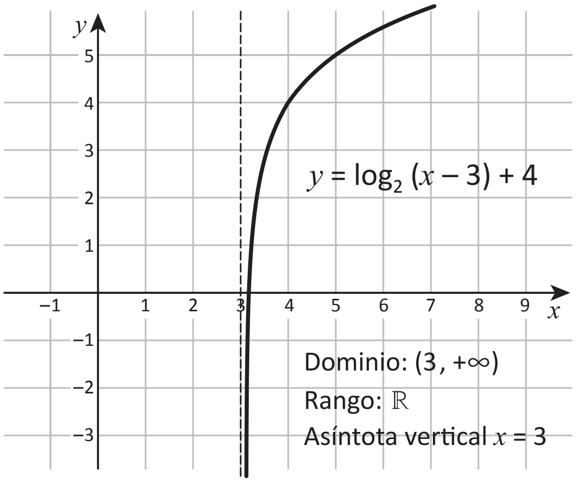
$y = 4 + \log_5 x$

Dominio: $(0, +\infty)$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntota vertical $x = 0$

e)



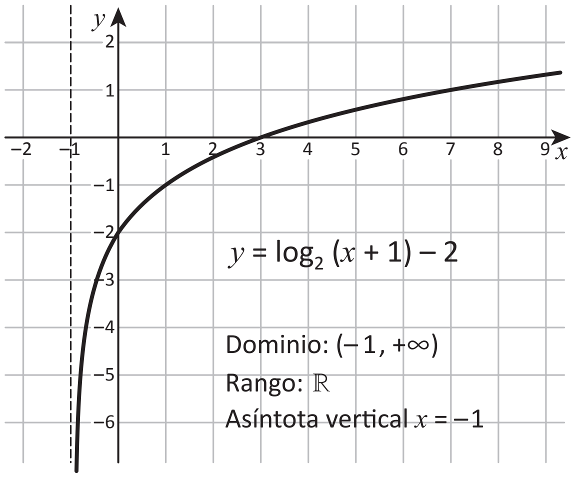
$y = \log_2 (x - 3) + 4$

Dominio: $(3, +\infty)$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntota vertical $x = 3$

f)



$y = \log_2 (x + 1) - 2$

Dominio: $(-1, +\infty)$

Rango: $\mathbb{R}$

Asíntota vertical $x = -1$

Unidad II. Lección 3.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender que el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central.

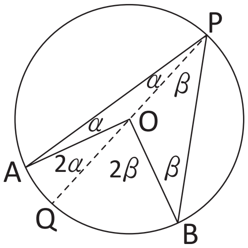
Evaluación: Ejercicio 3.1

Definición del ángulo central e inscrito.
(4 min)

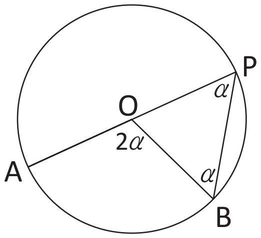
Teorema 3.1. (20 min)

El punto de la demostración es trazar el diámetro que pasa por el punto P.

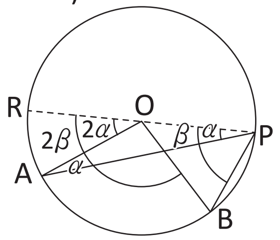
En la pizarra se dibuja así:
Caso a)

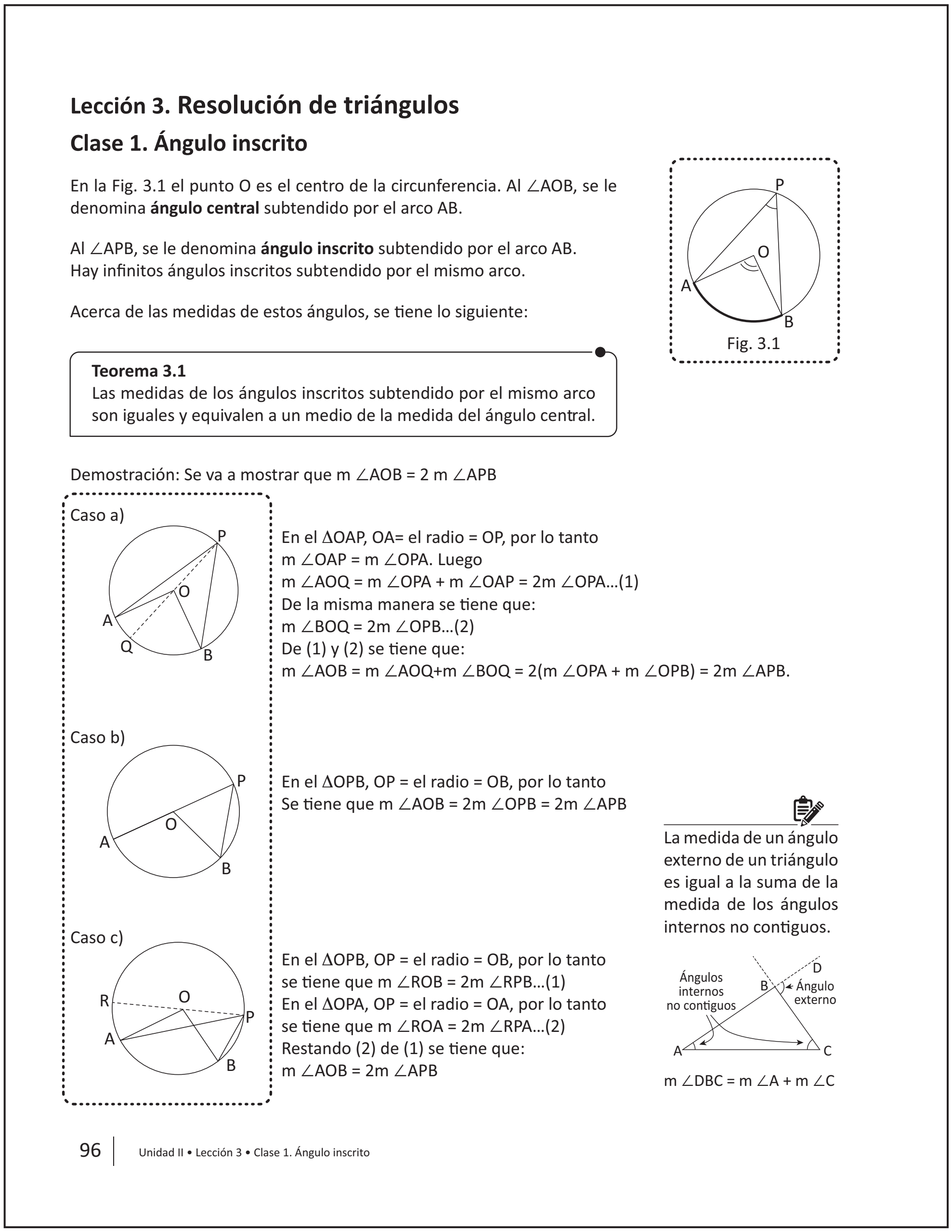


En lugar de escribir muchas igualdades.
Caso b)



Caso c)





Lección 3. Resolución de triángulos

Clase 1. Ángulo inscrito

En la Fig. 3.1 el punto O es el centro de la circunferencia. Al ∠AOB, se le denomina **ángulo central** subtendido por el arco AB.

Al ∠APB, se le denomina **ángulo inscrito** subtendido por el arco AB.
Hay infinitos ángulos inscritos subtendido por el mismo arco.

Acerca de las medidas de estos ángulos, se tiene lo siguiente:

Fig. 3.1

Teorema 3.1
Las medidas de los ángulos inscritos subtendido por el mismo arco son iguales y equivalen a un medio de la medida del ángulo central.

Demostración: Se va a mostrar que m ∠AOB = 2 m ∠APB

Caso a)

En el ΔOAP, OA= el radio = OP, por lo tanto
m ∠OAP = m ∠OPA. Luego
m ∠AOQ = m ∠OPA + m ∠OAP = 2m ∠OPA…(1)
De la misma manera se tiene que:
m ∠BOQ = 2m ∠OPB…(2)
De (1) y (2) se tiene que:
m ∠AOB = m ∠AOQ+m ∠BOQ = 2(m ∠OPA + m ∠OPB) = 2m ∠APB.

Caso b)

En el ΔOPB, OP = el radio = OB, por lo tanto
Se tiene que m ∠AOB = 2m ∠OPB = 2m ∠APB

Caso c)

En el ΔOPB, OP = el radio = OB, por lo tanto
se tiene que m ∠ROB = 2m ∠RPB…(1)
En el ΔOPA, OP = el radio = OA, por lo tanto
se tiene que m ∠ROA = 2m ∠RPA…(2)
Restando (2) de (1) se tiene que:
m ∠AOB = 2m ∠APB

La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de la medida de los ángulos internos no contiguos.

m ∠DBC = m ∠A + m ∠C

Unidad II. Lección 3.

Clase 1

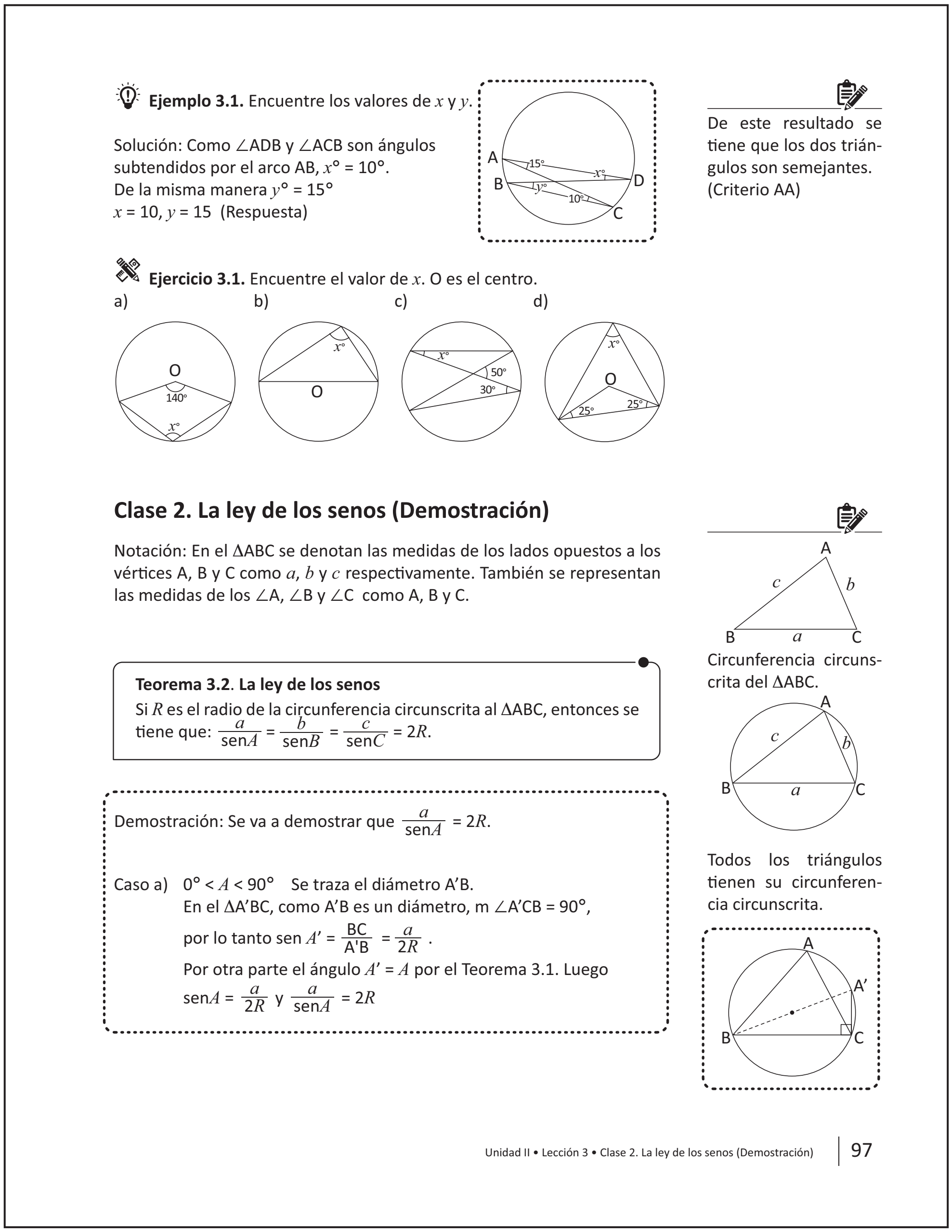
(Continuación)

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la demostración de la ley de los senos.

Evaluación: Ser capaz de reproducir la demostración.



Ejemplo 3.1. Encuentre los valores de x y y.

Solución: Como ∠ADB y ∠ACB son ángulos subtendidos por el arco AB, $x° = 10°$.
De la misma manera $y° = 15°$
$x = 10$, $y = 15$ (Respuesta)

De este resultado se tiene que los dos triángulos son semejantes. (Criterio AA)

Ejercicio 3.1. Encuentre el valor de x. O es el centro.

a) b) c) d)

Clase 2. La ley de los senos (Demostración)

Notación: En el ΔABC se denotan las medidas de los lados opuestos a los vértices A, B y C como a, b y c respectivamente. También se representan las medidas de los ∠A, ∠B y ∠C como A, B y C.

Circunferencia circunscrita del ΔABC.

Teorema 3.2. **La ley de los senos**
Si R es el radio de la circunferencia circunscrita al ΔABC, entonces se tiene que: $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$.

Demostración: Se va a demostrar que $\frac{a}{\text{sen}A} = 2R$.

Caso a) $0° < A < 90°$ Se traza el diámetro A'B.
En el ΔA'BC, como A'B es un diámetro, m ∠A'CB = 90°,
por lo tanto sen $A' = \frac{\text{BC}}{\text{A'B}} = \frac{a}{2R}$.
Por otra parte el ángulo $A' = A$ por el Teorema 3.1. Luego
sen$A = \frac{a}{2R}$ y $\frac{a}{\text{sen}A} = 2R$

Todos los triángulos tienen su circunferencia circunscrita.

Unidad II • Lección 3 • Clase 2. La ley de los senos (Demostración) | 97

Ejemplo 3.1
(8 min)

Ejercicio 3.1
(13 min) Solución

a) $x = \frac{1}{2}(360 - 140) = 110$

b) $x = \frac{1}{2} \times 180 = 90$
El ángulo central es un ángulo llano.

c) $x = 50 - 30 = 20$

d) $x = \frac{1}{2}\{180 - (25 + 25)\}$
$= 65$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Notación (5 min)

Teorema 3.2. Declaración (5 min)

El aprendizaje de la circunferencia circunscrita será en Mat III Unidad I. En este momento basta con captar la idea intuitivamente.

Demostración
(35 min)

Unidad II. Lección 3.

Clase 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Aplicar la ley de los senos para encontrar la medida de un lado.

Evaluación: Ejercicio 3.2

Demostración
Caso b) y c)

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 3.2
(10 min)
El punto es hacer parejas del ángulo y su lado opuesto.

Ejercicio 3.2
(35 min) Solución

a) $R = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\text{sen}A}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \div \frac{1}{2} = 3$

$b = 2R\text{ sen }B$

$= 2\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

b) $R = \frac{1}{2}\,\frac{b}{\text{sen}B}$

$= \frac{1}{2} \times 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2\sqrt{2}$

$c = 2R\text{ sen}C$

$= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\sqrt{6}$

c) $R = \frac{1}{2}\,\frac{c}{\text{sen}C}$

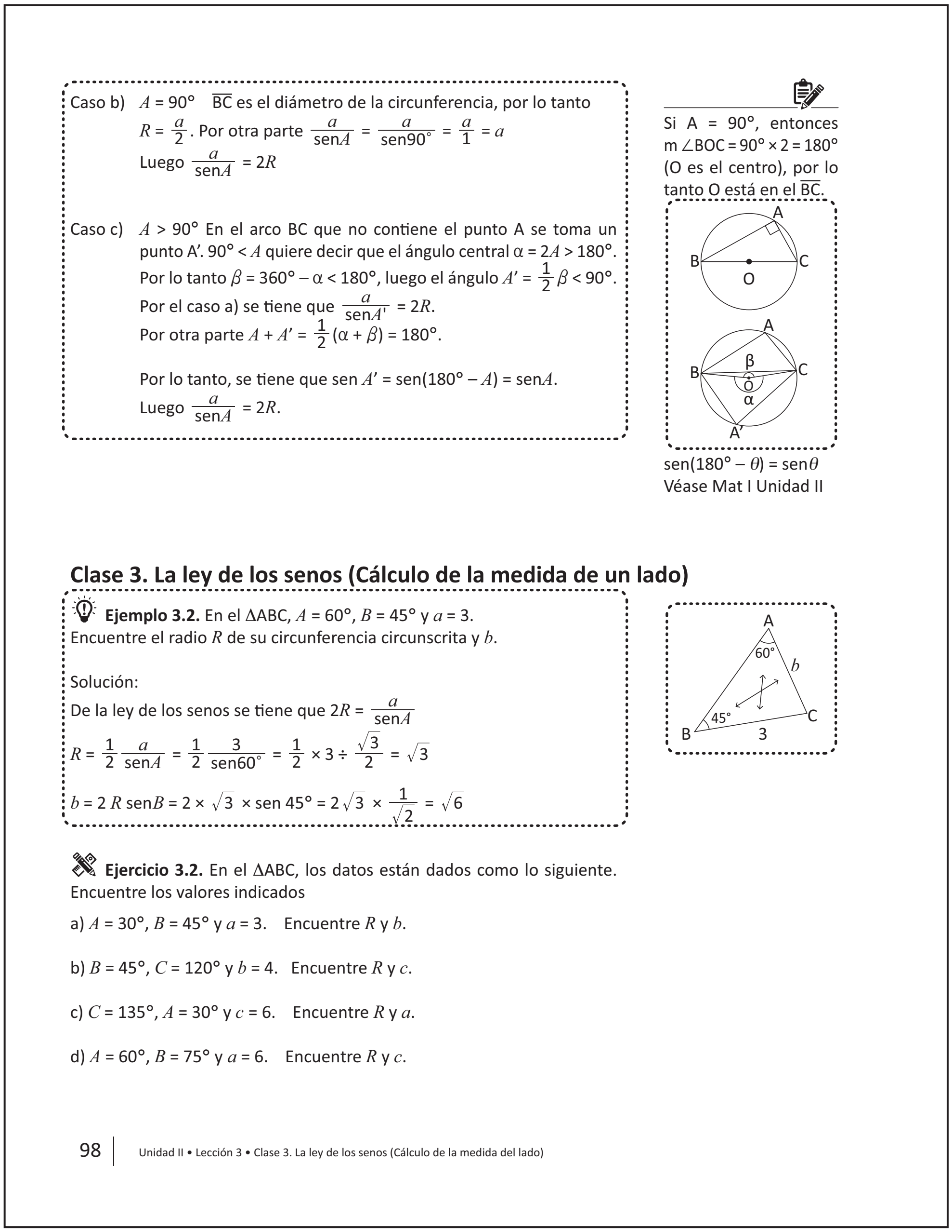
$= \frac{1}{2} \times 6 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 3\sqrt{2}$

$a = 2R\text{ sen}A$

$= 2 \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$

$= 3\sqrt{2}$



Caso b) $A = 90°$ $\overline{\text{BC}}$ es el diámetro de la circunferencia, por lo tanto
$R = \frac{a}{2}$. Por otra parte $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{a}{\text{sen}90^\circ} = \frac{a}{1} = a$
Luego $\frac{a}{\text{sen}A} = 2R$

Caso c) $A > 90°$ En el arco BC que no contiene el punto A se toma un punto A'. $90° < A$ quiere decir que el ángulo central $\alpha = 2A > 180°$. Por lo tanto $\beta = 360° - \alpha < 180°$, luego el ángulo $A' = \frac{1}{2}\beta < 90°$.
Por el caso a) se tiene que $\frac{a}{\text{sen}A'} = 2R$.
Por otra parte $A + A' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180°$.

Por lo tanto, se tiene que sen $A' = \text{sen}(180° - A) = \text{sen}A$.
Luego $\frac{a}{\text{sen}A} = 2R$.

Si A = 90°, entonces m $\angle$BOC = 90° × 2 = 180° (O es el centro), por lo tanto O está en el $\overline{\text{BC}}$.

$\text{sen}(180° - \theta) = \text{sen}\theta$
Véase Mat I Unidad II

Clase 3. La ley de los senos (Cálculo de la medida de un lado)

Ejemplo 3.2. En el ΔABC, $A = 60°$, $B = 45°$ y $a = 3$.
Encuentre el radio R de su circunferencia circunscrita y b.

Solución:
De la ley de los senos se tiene que $2R = \frac{a}{\text{sen}A}$

$R = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{\text{sen}60^\circ} = \frac{1}{2} \times 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$b = 2\,R\,\text{sen}B = 2 \times \sqrt{3} \times \text{sen }45° = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

Ejercicio 3.2. En el ΔABC, los datos están dados como lo siguiente. Encuentre los valores indicados

a) $A = 30°$, $B = 45°$ y $a = 3$. Encuentre R y b.

b) $B = 45°$, $C = 120°$ y $b = 4$. Encuentre R y c.

c) $C = 135°$, $A = 30°$ y $c = 6$. Encuentre R y a.

d) $A = 60°$, $B = 75°$ y $a = 6$. Encuentre R y c.

98 | Unidad II • Lección 3 • Clase 3. La ley de los senos (Cálculo de la medida del lado)

d) $R = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{1}{2} \times 6 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$C = 180° - (A + B) = 45°$

$c = 2R\text{ sen}C = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$

Unidad II. Lección 3.

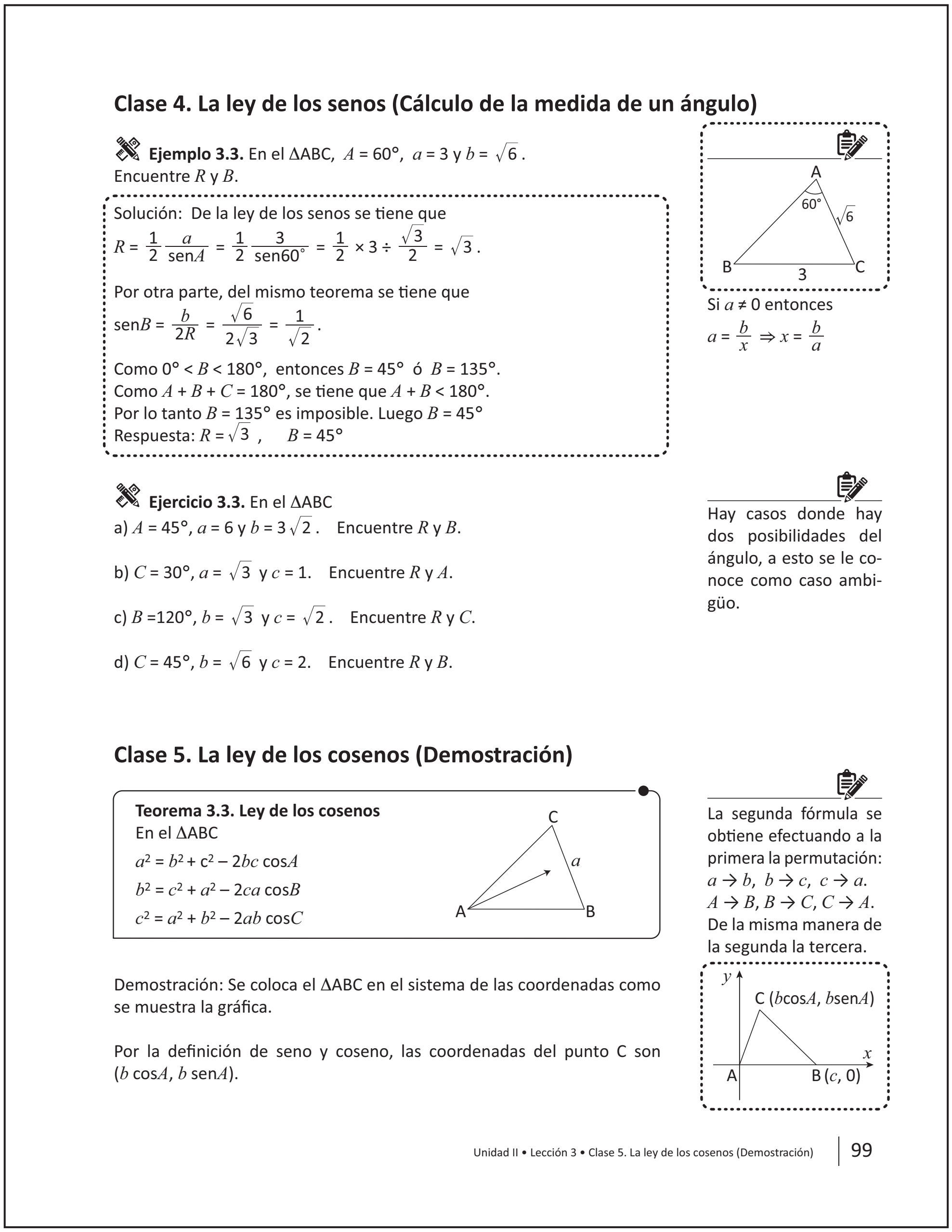
Clase 4

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Aplicar la ley de los senos para encontrar la medida de un ángulo.
Evaluación: Ejercicio 3.3

Objetivo: Entender la demostración de la ley de los cosenos.
Evaluación: Ser capaz de reproducir la demostración.



Clase 4. La ley de los senos (Cálculo de la medida de un ángulo)

Ejemplo 3.3. En el ΔABC, $A = 60°$, $a = 3$ y $b = \sqrt{6}$.
Encuentre R y B.

Solución: De la ley de los senos se tiene que

$$R = \frac{1}{2}\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{1}{2}\frac{3}{\text{sen}60^\circ} = \frac{1}{2} \times 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Por otra parte, del mismo teorema se tiene que

$$\text{sen}B = \frac{b}{2R} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como $0° < B < 180°$, entonces $B = 45°$ ó $B = 135°$.
Como $A + B + C = 180°$, se tiene que $A + B < 180°$.
Por lo tanto $B = 135°$ es imposible. Luego $B = 45°$
Respuesta: $R = \sqrt{3}$, $B = 45°$

Si $a \neq 0$ entonces
$a = \frac{b}{x} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

Ejercicio 3.3. En el ΔABC
a) $A = 45°$, $a = 6$ y $b = 3\sqrt{2}$. Encuentre R y B.
b) $C = 30°$, $a = \sqrt{3}$ y $c = 1$. Encuentre R y A.
c) $B = 120°$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{2}$. Encuentre R y C.
d) $C = 45°$, $b = \sqrt{6}$ y $c = 2$. Encuentre R y B.

Hay casos donde hay dos posibilidades del ángulo, a esto se le conoce como caso ambigüo.

Clase 5. La ley de los cosenos (Demostración)

Teorema 3.3. Ley de los cosenos
En el ΔABC
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

La segunda fórmula se obtiene efectuando a la primera la permutación:
$a \rightarrow b,\ b \rightarrow c,\ c \rightarrow a.$
$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ C \rightarrow A.$
De la misma manera de la segunda la tercera.

Demostración: Se coloca el ΔABC en el sistema de las coordenadas como se muestra la gráfica.

Por la definición de seno y coseno, las coordenadas del punto C son $(b\cos A,\ b\,\text{sen}A)$.

Unidad II • Lección 3 • Clase 5. La ley de los cosenos (Demostración) | 99

Ejemplo 3.3

(10 min) Cuando se conoce el valor de seno, hay dos probabilidades en cuanto a la medida del ángulo.
Hay casos donde se abandona una, por el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos es 180°.

Ejercicio 3.3

(35 min)

a) $R = \frac{1}{2}\frac{a}{\text{sen}A}$
$= \frac{1}{2} \times 6 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$
$\text{sen}B = \frac{b}{2R} = 3\sqrt{2} \div 6\sqrt{2}$
$= \frac{1}{2}$
Como $0° < B < 180° - A = 135°$,
$B = 30°$

b) $R = \frac{1}{2}\frac{c}{\text{sen}C}$
$= \frac{1}{2} \times 1 \div \frac{1}{2} = 1$
$\text{sen}A = \frac{a}{2R} = \sqrt{3} \div 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Como $0° < A < 180° - C = 150°$,
$A = 60°, 120°$

c) $R = \frac{1}{2}\frac{b}{\text{sen}B}$
$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$
$\text{sen}C = \frac{c}{2R} = \sqrt{2} \div 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Como $0° < C < 180° - B = 60°$
$C = 45°$

d) $R = \frac{1}{2}\frac{c}{\text{sen}C}$
$= \frac{1}{2} \times 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
$\text{sen}B = \frac{b}{2R} = \sqrt{6} \div 2\sqrt{2}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$
Como $0° < B < 180° - C = 135°$,
$C = 60°, 120°$

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

Teorema 3.3
Declaración (5 min)
Demostración (35 min)

El punto es utilizar la definición y la relación de seno y coseno y la fórmula de la distancia.

Hay otra manera utilizando la altura, sin embargo, es un poco complicada porque hay que distinguir los ángulos agudo, recto y obtuso.

Unidad II. Lección 3.

Clase 5

(Continuación)

Clase 6

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Aplicar la ley de los cosenos para encontrar la medida de un lado.

Evaluación: Ejercicio 3.4

En la demostración del texto la fórmula de la distancia absorbe esta clasificación.

Nota (5 min) Hay una secuencia de deducción:

Teorema de Pitágoras
Relación entre seno y coseno
Fórmula de distancia
Ley de los cosenos

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

Ejemplo 3.4

(8 min)

Ejercicio 3.4

(37 min) Solución

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$= 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
$= 37$
$a = \sqrt{37}$

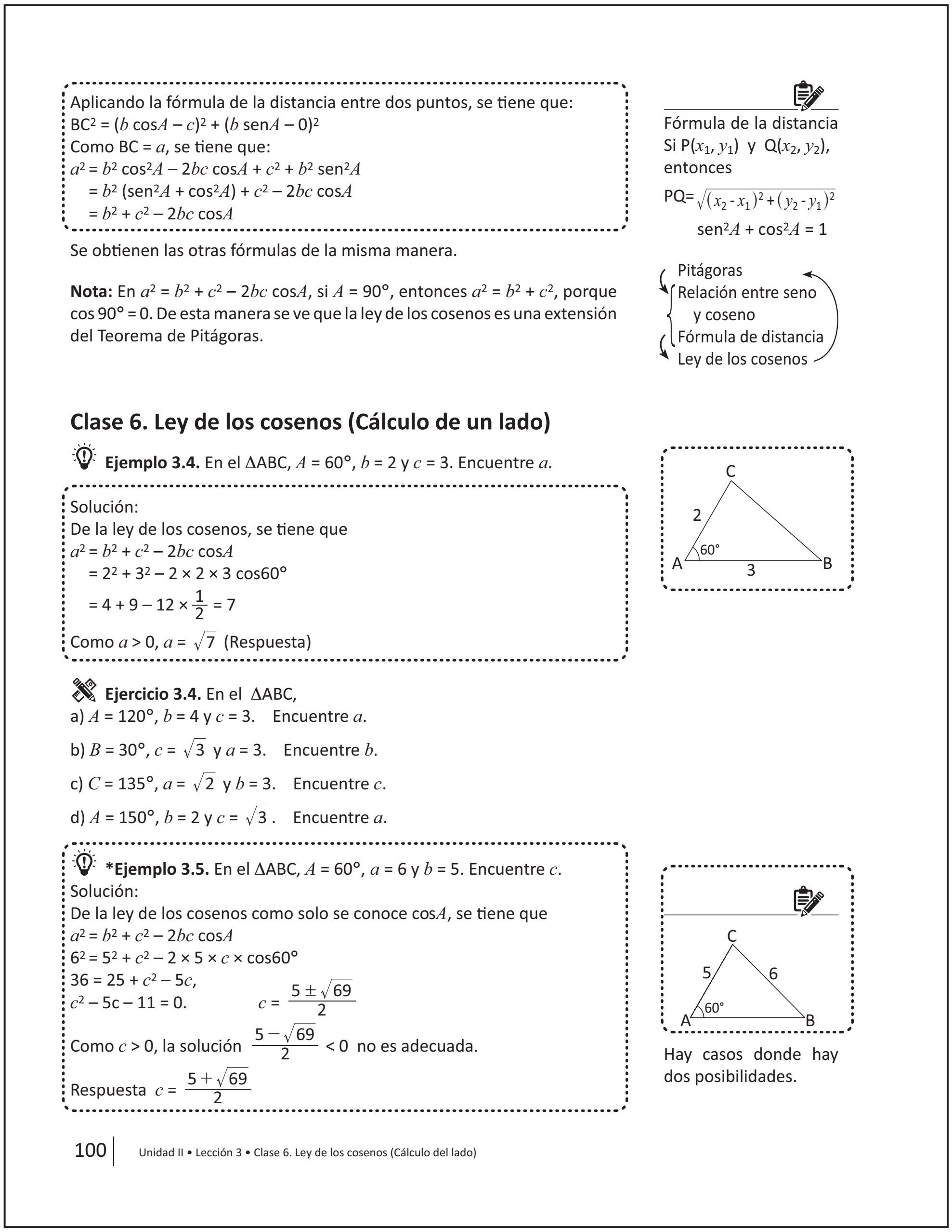
b) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
$= \sqrt{3}^{\,2} + 3^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= 3$
$b = \sqrt{3}$

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
$= \sqrt{2}^{\,2} + 3^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$= 17$
$c = \sqrt{17}$

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$= 2^2 + \sqrt{3}^{\,2} - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 13$
$a = \sqrt{13}$

*Ejemplo 3.5

En este ejemplo una de las soluciones de la ecuación de segundo grado es negativa, por lo tanto, la positiva corresponde a la respuesta. Hay casos donde las soluciones son positivas y ambas corresponden a la respuesta.



Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, se tiene que:
$BC^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\,\mathrm{sen}A - 0)^2$
Como BC = a, se tiene que:
$a^2 = b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\,\mathrm{sen}^2 A$
$= b^2(\mathrm{sen}^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$
$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Se obtienen las otras fórmulas de la misma manera.

Nota: En $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, si $A = 90°$, entonces $a^2 = b^2 + c^2$, porque cos 90° = 0. De esta manera se ve que la ley de los cosenos es una extensión del Teorema de Pitágoras.

Fórmula de la distancia
Si P(x_1, y_1) y Q(x_2, y_2), entonces
$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$\mathrm{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Pitágoras
Relación entre seno y coseno
Fórmula de distancia
Ley de los cosenos

Clase 6. Ley de los cosenos (Cálculo de un lado)

Ejemplo 3.4. En el ΔABC, $A = 60°$, $b = 2$ y $c = 3$. Encuentre a.

Solución:
De la ley de los cosenos, se tiene que
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3\cos 60°$
$= 4 + 9 - 12 \times \frac{1}{2} = 7$
Como $a > 0$, $a = \sqrt{7}$ (Respuesta)

Ejercicio 3.4. En el ΔABC,

a) $A = 120°$, $b = 4$ y $c = 3$. Encuentre a.

b) $B = 30°$, $c = \sqrt{3}$ y $a = 3$. Encuentre b.

c) $C = 135°$, $a = \sqrt{2}$ y $b = 3$. Encuentre c.

d) $A = 150°$, $b = 2$ y $c = \sqrt{3}$. Encuentre a.

***Ejemplo 3.5.** En el ΔABC, $A = 60°$, $a = 6$ y $b = 5$. Encuentre c.
Solución:
De la ley de los cosenos como solo se conoce cos$A$, se tiene que
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$6^2 = 5^2 + c^2 - 2 \times 5 \times c \times \cos 60°$
$36 = 25 + c^2 - 5c$,
$c^2 - 5c - 11 = 0$. $c = \frac{5 \pm \sqrt{69}}{2}$
Como $c > 0$, la solución $\frac{5 - \sqrt{69}}{2} < 0$ no es adecuada.
Respuesta $c = \frac{5 + \sqrt{69}}{2}$

Hay casos donde hay dos posibilidades.

100 | Unidad II • Lección 3 • Clase 6. Ley de los cosenos (Cálculo del lado)

Unidad II. Lección 3.

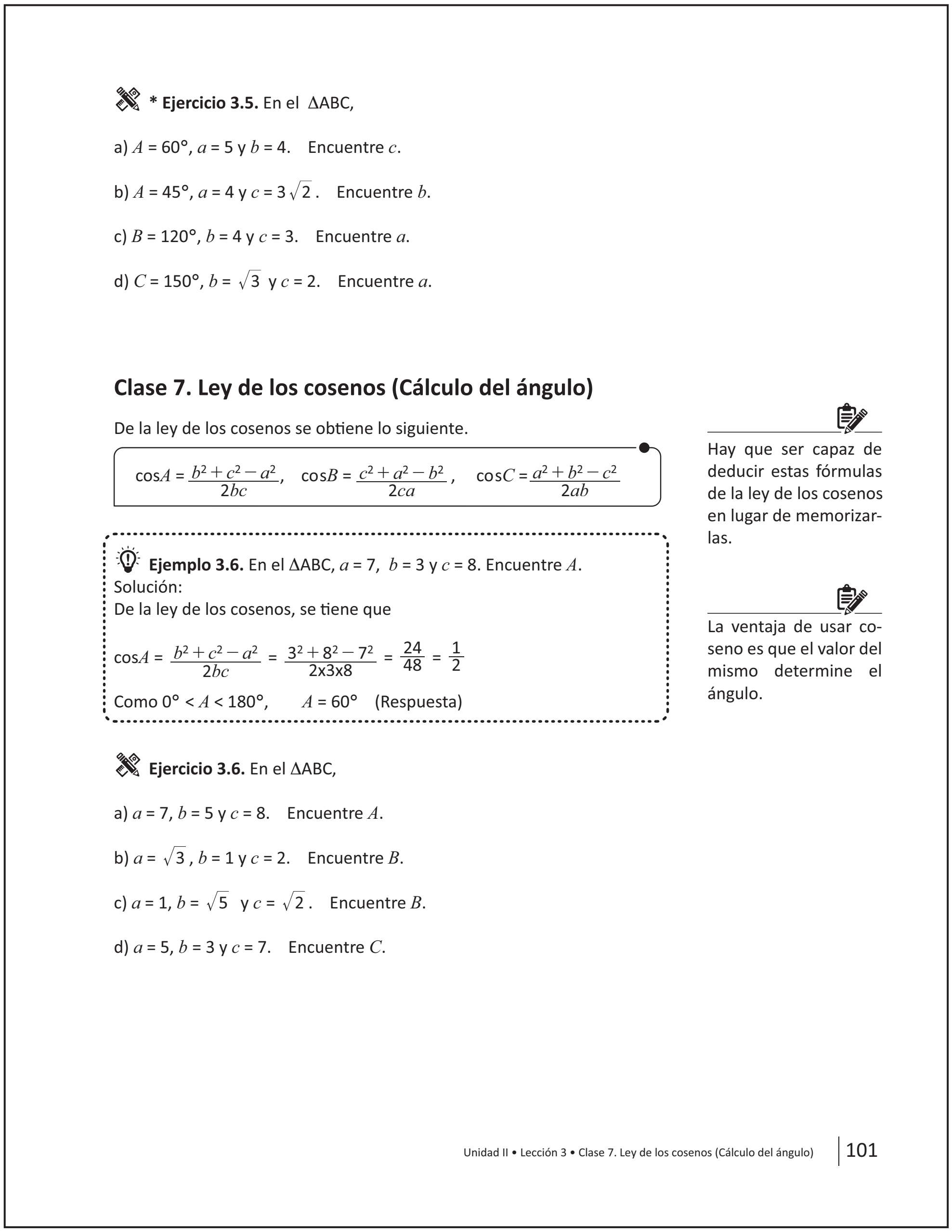
Clase 6

(Continuación)

Clase 7

Objetivo: Aplicar la ley de los cosenos para encontrar la medida de un ángulo.

Evaluación: Ejercicio 3.6



*** Ejercicio 3.5.** En el ΔABC,

a) A = 60°, a = 5 y b = 4. Encuentre c.

b) A = 45°, a = 4 y $c = 3\sqrt{2}$. Encuentre b.

c) B = 120°, b = 4 y c = 3. Encuentre a.

d) C = 150°, $b = \sqrt{3}$ y c = 2. Encuentre a.

Clase 7. Ley de los cosenos (Cálculo del ángulo)

De la ley de los cosenos se obtiene lo siguiente.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Hay que ser capaz de deducir estas fórmulas de la ley de los cosenos en lugar de memorizarlas.

Ejemplo 3.6. En el ΔABC, a = 7, b = 3 y c = 8. Encuentre A.
Solución:
De la ley de los cosenos, se tiene que

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3^2+8^2-7^2}{2\text{x}3\text{x}8} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

Como 0° < A < 180°, A = 60° (Respuesta)

La ventaja de usar coseno es que el valor del mismo determine el ángulo.

Ejercicio 3.6. En el ΔABC,

a) a = 7, b = 5 y c = 8. Encuentre A.

b) $a = \sqrt{3}$, b = 1 y c = 2. Encuentre B.

c) a = 1, $b = \sqrt{5}$ y $c = \sqrt{2}$. Encuentre B.

d) a = 5, b = 3 y c = 7. Encuentre C.

*Ejercicio 3.5

Solución:

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$5^2 = 4^2 + c^2 - 2\times 4\times c\times\frac{1}{2}$$

$$c^2 - 4c - 9 = 0,\ c = 2 + \sqrt{13}$$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$4^2 = b^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2\times b \times 3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b^2 - 6b + 2 = 0,\ b = 3 \pm\sqrt{7}$$

c) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$$4^2 = 3^2 + a^2 - 2\times 3\times a\times(-\frac{1}{2})$$

$$a^2 + 3a - 7 = 0,$$

$$a = \frac{-3+\sqrt{37}}{2}$$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$2^2 = a^2 + \sqrt{3}\ ^2 - 2\times a\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$a^2 + 3a - 1 = 0,$$

$$a = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Las fórmulas (5 min)
La ventaja de esta fórmula es que al valor de coseno le corresponde un único ángulo.

Ejemplo 3.6

(10 min)

Ejercicio 3.6

(30 min) Solución

a) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{5^2+8^2-7^2}{2\text{x}5\text{x}8}$$

$$= \frac{1}{2},\quad A = 60°$$

b) $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{2^2+\sqrt{3}^2-1^2}{2\text{x}2\text{x}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, B = 30°

c) $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{\sqrt{2}^2+1^2-\sqrt{5}^2}{2\text{x}\sqrt{2}\text{x}1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, B = 135°

d) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5^2+3^2-7^2}{2\text{x}5\text{x}3} = -\frac{1}{2}$, C = 120°

Unidad II. Lección 3.
Clase 8

Objetivo: Aplicar la ley de los cosenos y discriminar el tipo de ángulo.

Evaluación: Ejercicio 3.7

Las fórmulas (10 min)
Se sabe de la ley de los senos que, en el triángulo, el lado opuesto al ángulo mayor es más largo (véase problema de la unidad B1). Por lo tanto para saber si el triángulo es un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo, basta examinar el ángulo opuesto al lado mayor.

Ejemplo 3.7
(5 min)

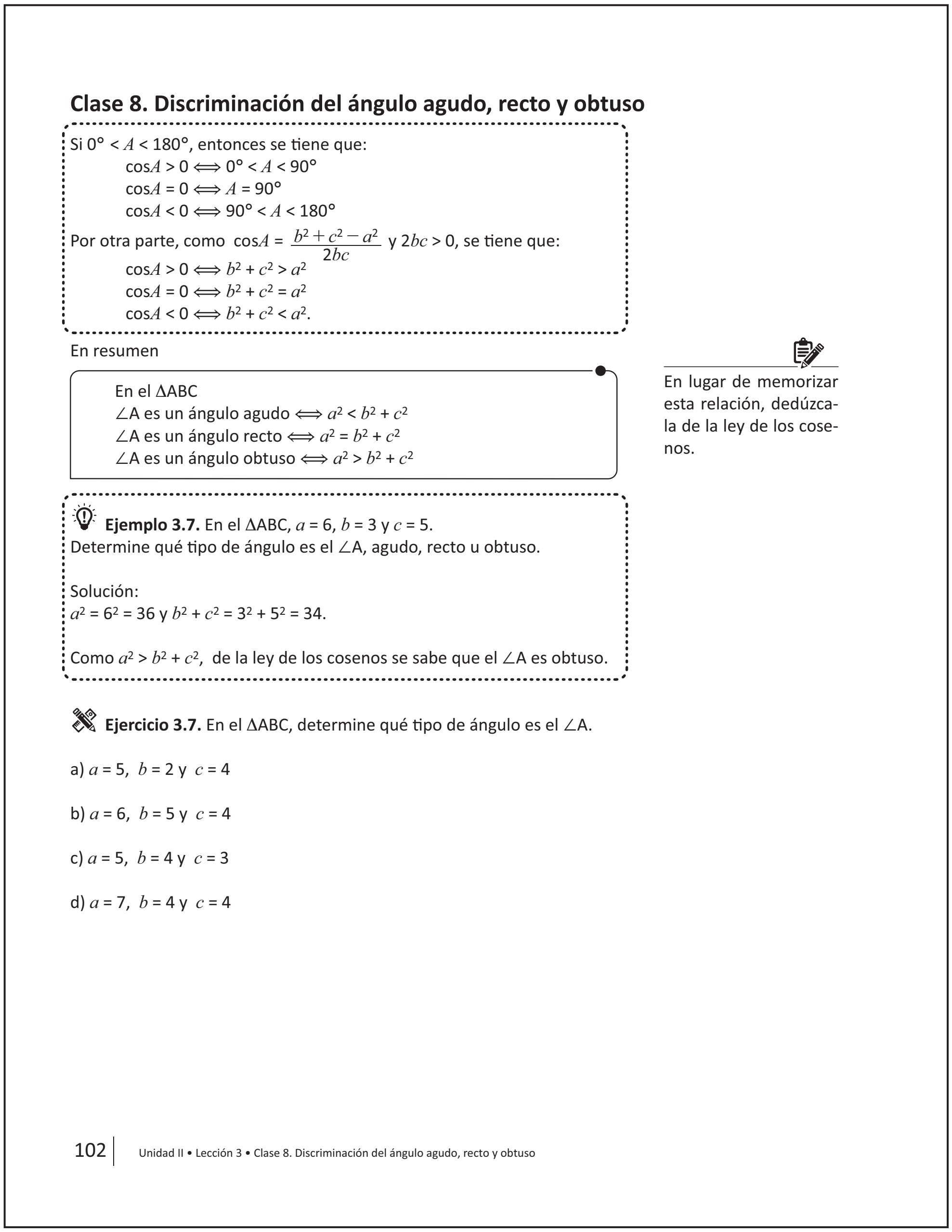
Ejercicio 3.7
(30 min) Solución

a) $a^2 > b^2 + c^2$ obtuso

b) $a^2 < b^2 + c^2$ agudo

c) $a^2 = b^2 + c^2$ recto

d) $a^2 > b^2 + c^2$ obtuso



Clase 8. Discriminación del ángulo agudo, recto y obtuso

Si $0° < A < 180°$, entonces se tiene que:

$\cos A > 0 \iff 0° < A < 90°$
$\cos A = 0 \iff A = 90°$
$\cos A < 0 \iff 90° < A < 180°$

Por otra parte, como $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ y $2bc > 0$, se tiene que:

$\cos A > 0 \iff b^2 + c^2 > a^2$
$\cos A = 0 \iff b^2 + c^2 = a^2$
$\cos A < 0 \iff b^2 + c^2 < a^2$.

En resumen

En el ΔABC
∠A es un ángulo agudo $\iff a^2 < b^2 + c^2$
∠A es un ángulo recto $\iff a^2 = b^2 + c^2$
∠A es un ángulo obtuso $\iff a^2 > b^2 + c^2$

En lugar de memorizar esta relación, dedúzcala de la ley de los cosenos.

Ejemplo 3.7. En el ΔABC, $a = 6$, $b = 3$ y $c = 5$.
Determine qué tipo de ángulo es el ∠A, agudo, recto u obtuso.

Solución:
$a^2 = 6^2 = 36$ y $b^2 + c^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Como $a^2 > b^2 + c^2$, de la ley de los cosenos se sabe que el ∠A es obtuso.

Ejercicio 3.7. En el ΔABC, determine qué tipo de ángulo es el ∠A.

a) $a = 5$, $b = 2$ y $c = 4$

b) $a = 6$, $b = 5$ y $c = 4$

c) $a = 5$, $b = 4$ y $c = 3$

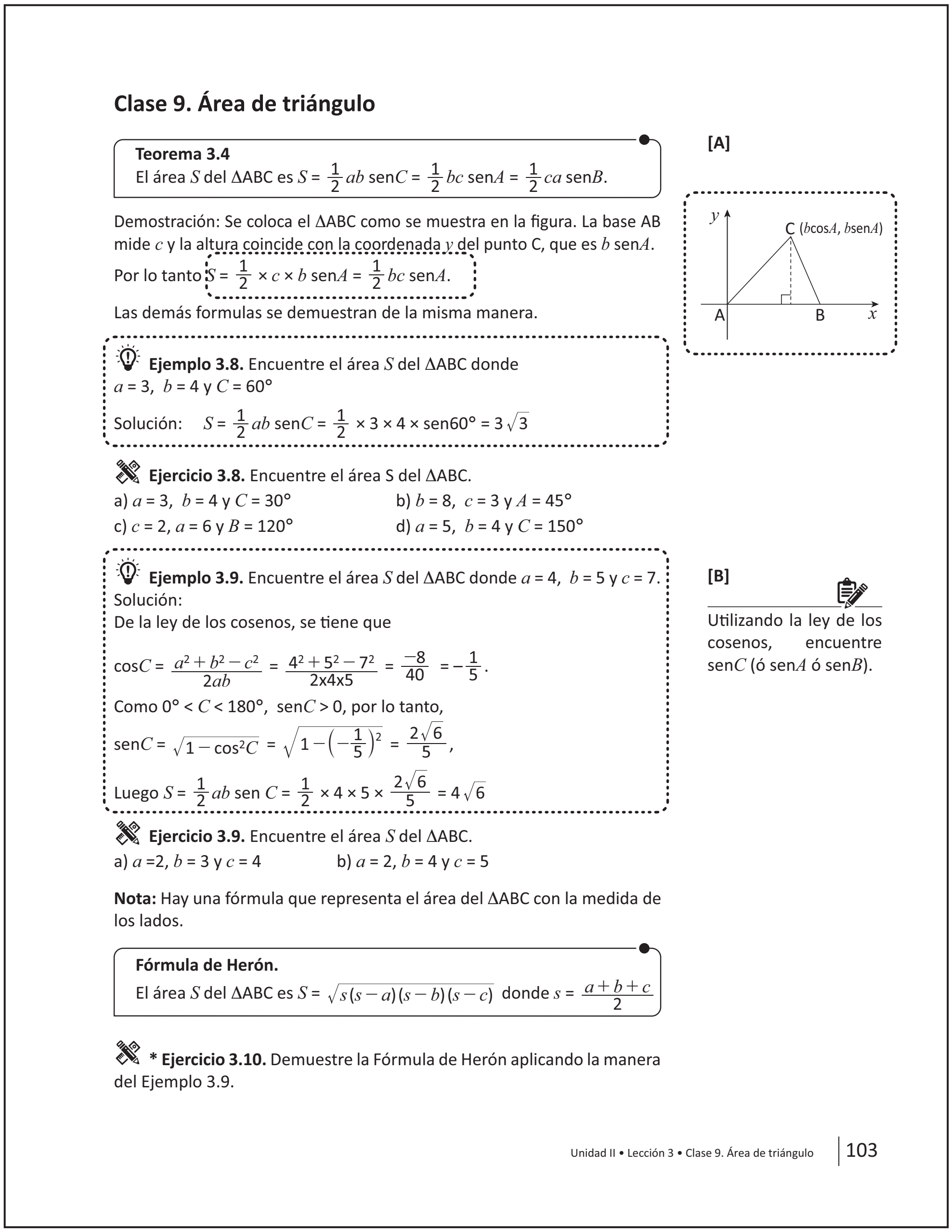
d) $a = 7$, $b = 4$ y $c = 4$

102 | Unidad II • Lección 3 • Clase 8. Discriminación del ángulo agudo, recto y obtuso

Objetivo: **[A]** Entender la fórmula del área del triángulo con seno.
[B] Encontrar el área del triángulo utilizando la medida de los lados.

Unidad II. Lección 3.
Clase 9

Evaluación: [A] Ejercicio 3.8 [B] Ejercicio 3.9



Clase 9. Área de triángulo

Teorema 3.4
El área S del ΔABC es $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} B$.

[A]

Demostración: Se coloca el ΔABC como se muestra en la figura. La base AB mide c y la altura coincide con la coordenada y del punto C, que es $b \operatorname{sen} A$.

Por lo tanto $\boxed{S = \frac{1}{2} \times c \times b \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.}$

Las demás formulas se demuestran de la misma manera.

Ejemplo 3.8. Encuentre el área S del ΔABC donde $a = 3$, $b = 4$ y $C = 60°$

Solución: $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \operatorname{sen} 60° = 3\sqrt{3}$

Ejercicio 3.8. Encuentre el área S del ΔABC.

a) $a = 3$, $b = 4$ y $C = 30°$
b) $b = 8$, $c = 3$ y $A = 45°$
c) $c = 2$, $a = 6$ y $B = 120°$
d) $a = 5$, $b = 4$ y $C = 150°$

Ejemplo 3.9. Encuentre el área S del ΔABC donde $a = 4$, $b = 5$ y $c = 7$.
Solución:
De la ley de los cosenos, se tiene que

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2x4x5} = \frac{-8}{40} = -\frac{1}{5}.$$

Como $0° < C < 180°$, $\operatorname{sen} C > 0$, por lo tanto,

$$\operatorname{sen} C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

Luego $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$

[B]

Utilizando la ley de los cosenos, encuentre $\operatorname{sen} C$ (ó $\operatorname{sen} A$ ó $\operatorname{sen} B$).

Ejercicio 3.9. Encuentre el área S del ΔABC.

a) $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$
b) $a = 2$, $b = 4$ y $c = 5$

Nota: Hay una fórmula que representa el área del ΔABC con la medida de los lados.

Fórmula de Herón.
El área S del ΔABC es $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde $s = \frac{a+b+c}{2}$

*** Ejercicio 3.10.** Demuestre la Fórmula de Herón aplicando la manera del Ejemplo 3.9.

Teorema 3.4 (5 min)
Se evita la clasificación según el tipo de ∠A utilizando las coordenadas.

Ejemplo 3.8
(5 min)

Ejercicio 3.8
(10 min) Solución

a) $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$
$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2}$
$= 3$

b) $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$
$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$
$= 6\sqrt{2}$

c) $S = \frac{1}{2} ca \operatorname{sen} B$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= 3\sqrt{3}$

d) $S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$
$= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2}$
$= 5$

Ejemplo 3.9
(8 min)

Ejercicio 3.9
(12 min) Solución

a) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
$= -\frac{1}{4}$

$\operatorname{sen} C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4}$
$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4}$
$= \frac{3\sqrt{15}}{4}$

b) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{5}{16}$
$\operatorname{sen} C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{231}}{16}$
$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{231}}{16}$
$= \frac{\sqrt{231}}{4}$

Nota: (5 min) No tiene sentido enseñar esta fórmula antes del ejemplo 3.9.

***Ejercicio 3.10**
Solución: Véase la página 129.

Unidad II. Lección 3.

Ejercicios de la Lección

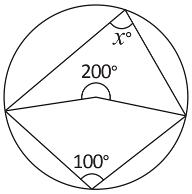
Soluciones

1. a) $x = 50 - 30 = 20$

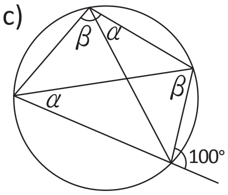
d) $x = 180 - (20 + 60)$

$= 100$

b)



c)



$x = \frac{1}{2}\ (360 - 100 \times 2) = 80$

$x = 100$

2. a) $R = \frac{1}{2}\ \frac{b}{\text{sen}B} = \sqrt{2}$

$a = 2R\ \text{sen}A = \sqrt{2}$

b) $R = \frac{1}{2}\ \frac{c}{\text{sen}C} = 2\sqrt{3}$

$b = 2R\ \text{sen}B = 2\sqrt{6}$

c) $R = \frac{1}{2}\ \frac{c}{\text{sen}C} = 2$

$\text{sen}A = \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $0° < A < 180° - C$

$= 120°$,

$A = 45°$

d) $R = \frac{1}{2}\ \frac{a}{\text{sen}A} = 1$

$\text{sen}C = \frac{c}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como $0° < C < 180° - A$

$= 150°$,

$C = 60°, 120°$

3.a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= 5$

$a = \sqrt{5}$

b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 7$

$c = \sqrt{7}$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 - 3b + 2 = 0,\ \ b = 1, 2$

d) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$a^2 + \sqrt{2}\ a - 1 = 0,$

$a = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

4. a) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

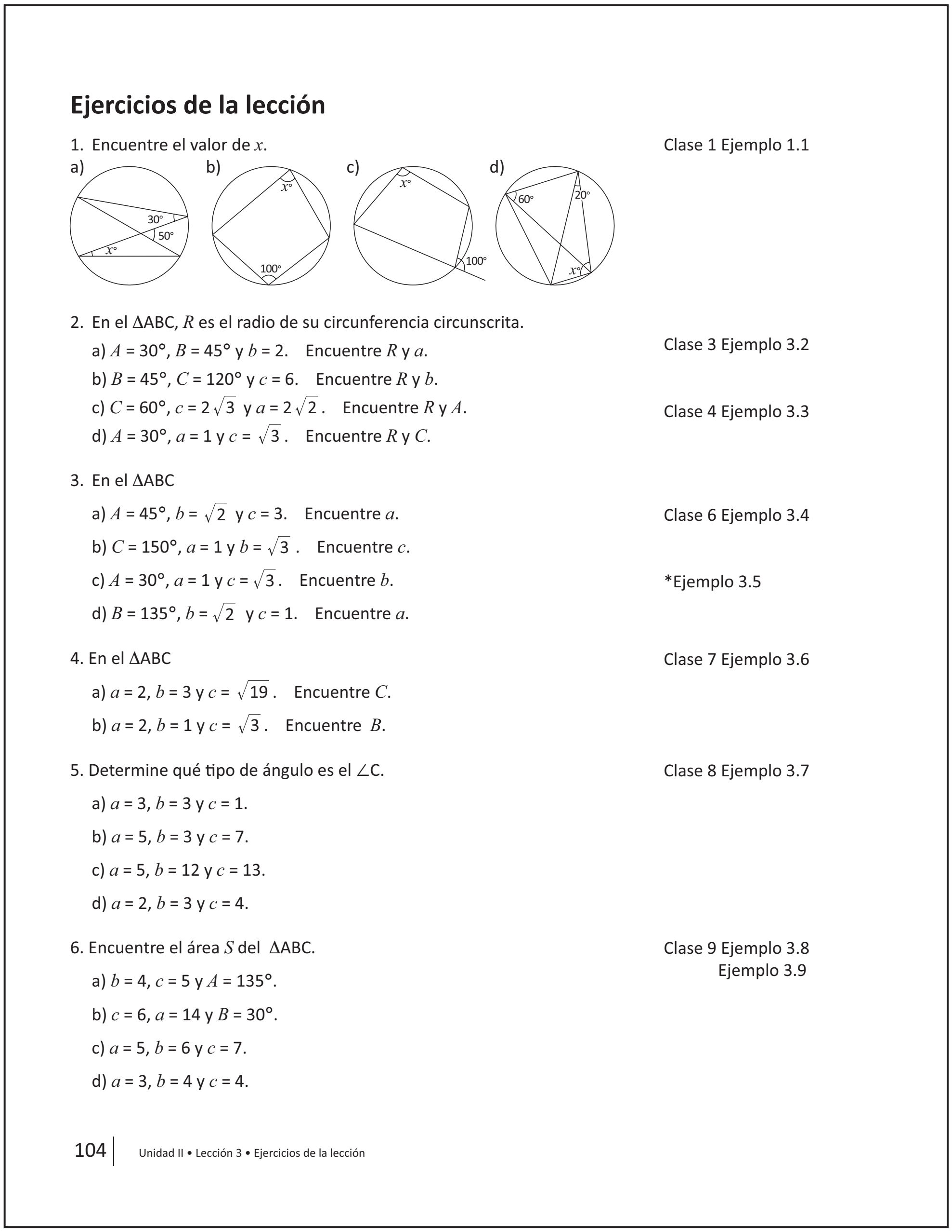
$= -\frac{1}{2}$

$C = 120°$

b) $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$B = 30°$



Ejercicios de la lección

1. Encuentre el valor de x. Clase 1 Ejemplo 1.1

a) b) c) d)

2. En el ΔABC, R es el radio de su circunferencia circunscrita.

a) $A = 30°$, $B = 45°$ y $b = 2$. Encuentre R y a. Clase 3 Ejemplo 3.2

b) $B = 45°$, $C = 120°$ y $c = 6$. Encuentre R y b.

c) $C = 60°$, $c = 2\sqrt{3}$ y $a = 2\sqrt{2}$. Encuentre R y A. Clase 4 Ejemplo 3.3

d) $A = 30°$, $a = 1$ y $c = \sqrt{3}$. Encuentre R y C.

3. En el ΔABC

a) $A = 45°$, $b = \sqrt{2}$ y $c = 3$. Encuentre a. Clase 6 Ejemplo 3.4

b) $C = 150°$, $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$. Encuentre c.

c) $A = 30°$, $a = 1$ y $c = \sqrt{3}$. Encuentre b. *Ejemplo 3.5

d) $B = 135°$, $b = \sqrt{2}$ y $c = 1$. Encuentre a.

4. En el ΔABC Clase 7 Ejemplo 3.6

a) $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{19}$. Encuentre C.

b) $a = 2$, $b = 1$ y $c = \sqrt{3}$. Encuentre B.

5. Determine qué tipo de ángulo es el ∠C. Clase 8 Ejemplo 3.7

a) $a = 3$, $b = 3$ y $c = 1$.

b) $a = 5$, $b = 3$ y $c = 7$.

c) $a = 5$, $b = 12$ y $c = 13$.

d) $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$.

6. Encuentre el área S del ΔABC. Clase 9 Ejemplo 3.8

Ejemplo 3.9

a) $b = 4$, $c = 5$ y $A = 135°$.

b) $c = 6$, $a = 14$ y $B = 30°$.

c) $a = 5$, $b = 6$ y $c = 7$.

d) $a = 3$, $b = 4$ y $c = 4$.

104 | Unidad II • Lección 3 • Ejercicios de la lección

5 y 6. Véase página 129

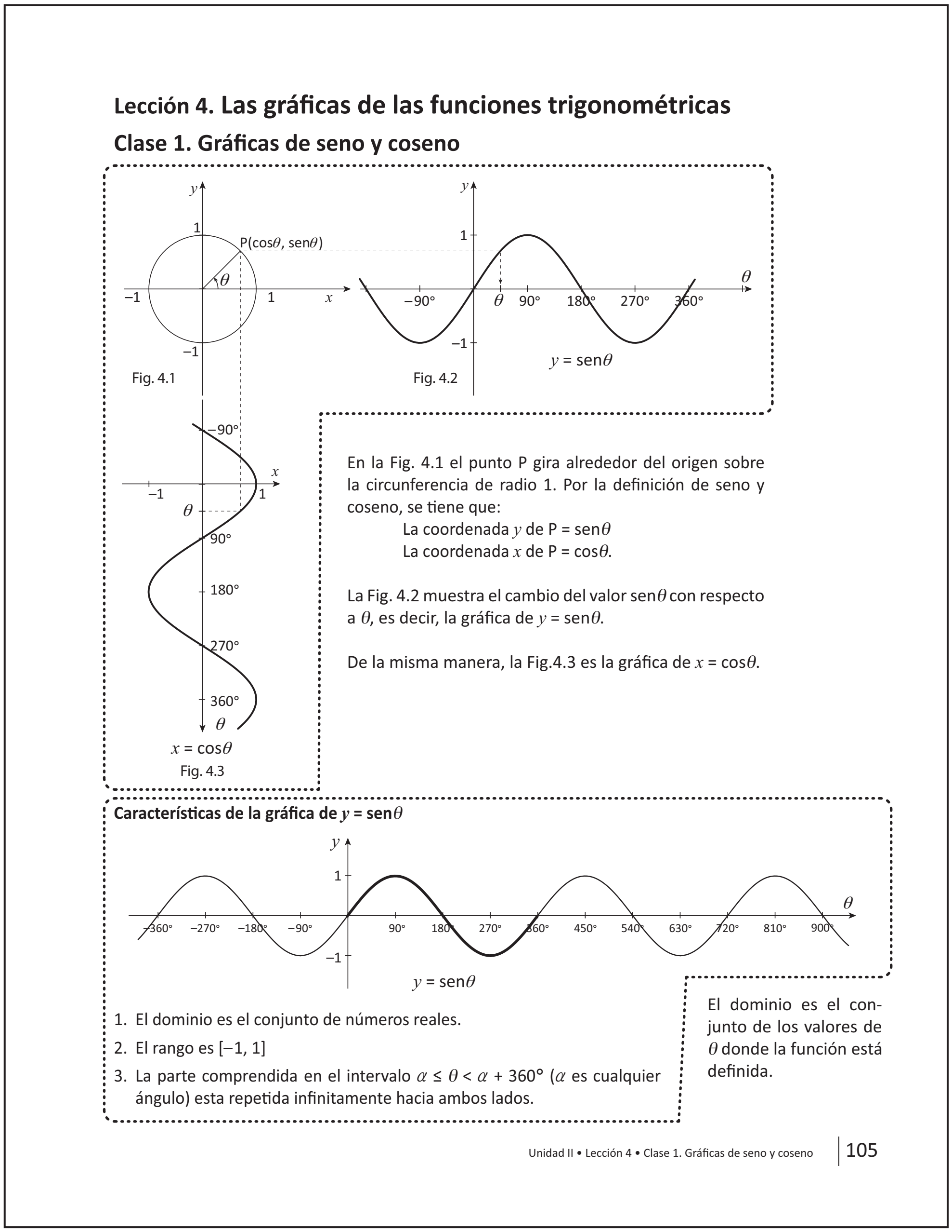
Unidad II. Lección 4.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la forma de las gráficas del seno y coseno y el concepto de período.

Evaluación: Ser capaz de explicar la relación entre las Fig. 4.1, 4.2 y 4.3.



Lección 4. Las gráficas de las funciones trigonométricas

Clase 1. Gráficas de seno y coseno

Fig. 4.1

Fig. 4.2

$x = \cos\theta$

Fig. 4.3

En la Fig. 4.1 el punto P gira alrededor del origen sobre la circunferencia de radio 1. Por la definición de seno y coseno, se tiene que:

La coordenada y de P = senθ

La coordenada x de P = cosθ.

La Fig. 4.2 muestra el cambio del valor senθ con respecto a θ, es decir, la gráfica de y = senθ.

De la misma manera, la Fig.4.3 es la gráfica de x = cosθ.

Características de la gráfica de y = senθ

y = senθ

1. El dominio es el conjunto de números reales.
2. El rango es [–1, 1]
3. La parte comprendida en el intervalo $\alpha \leq \theta < \alpha + 360°$ (α es cualquier ángulo) esta repetida infinitamente hacia ambos lados.

El dominio es el conjunto de los valores de θ donde la función está definida.

Unidad II • Lección 4 • Clase 1. Gráficas de seno y coseno | 105

Gráfica de seno

(20 min)

Los estudiantes tienen que tener memorizada la definición de seno y coseno.

En la pizarra hay que mostrar bien la relación entre la Fig. 4.1 y la Fig. 4.2

Unidad II. Lección 4.

Clase 1

(Continuación)

Clase 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la gráfica y el período de y = tanθ, y = secθ, y = cscθ y y = cotθ

Evaluación: Ejercicio 4.2

Característica de la gráfica de y = senθ

(15 min)

Que los estudiantes entiendan bien que la periodicidad de la función y = senθ es el reflejo del hecho de que senθ es la coordenada y del punto P que gira alrededor del origen.

Gráfica de y = cosθ

(10 min)

Hay que indicar la relación entre la Fig. 4.1 y la Fig.4.3.

***Ejercicio 4.1**

Solución I.II Clase 2.8

$f(\theta + 360°n) = f(\theta)$

donde n es un número entero.

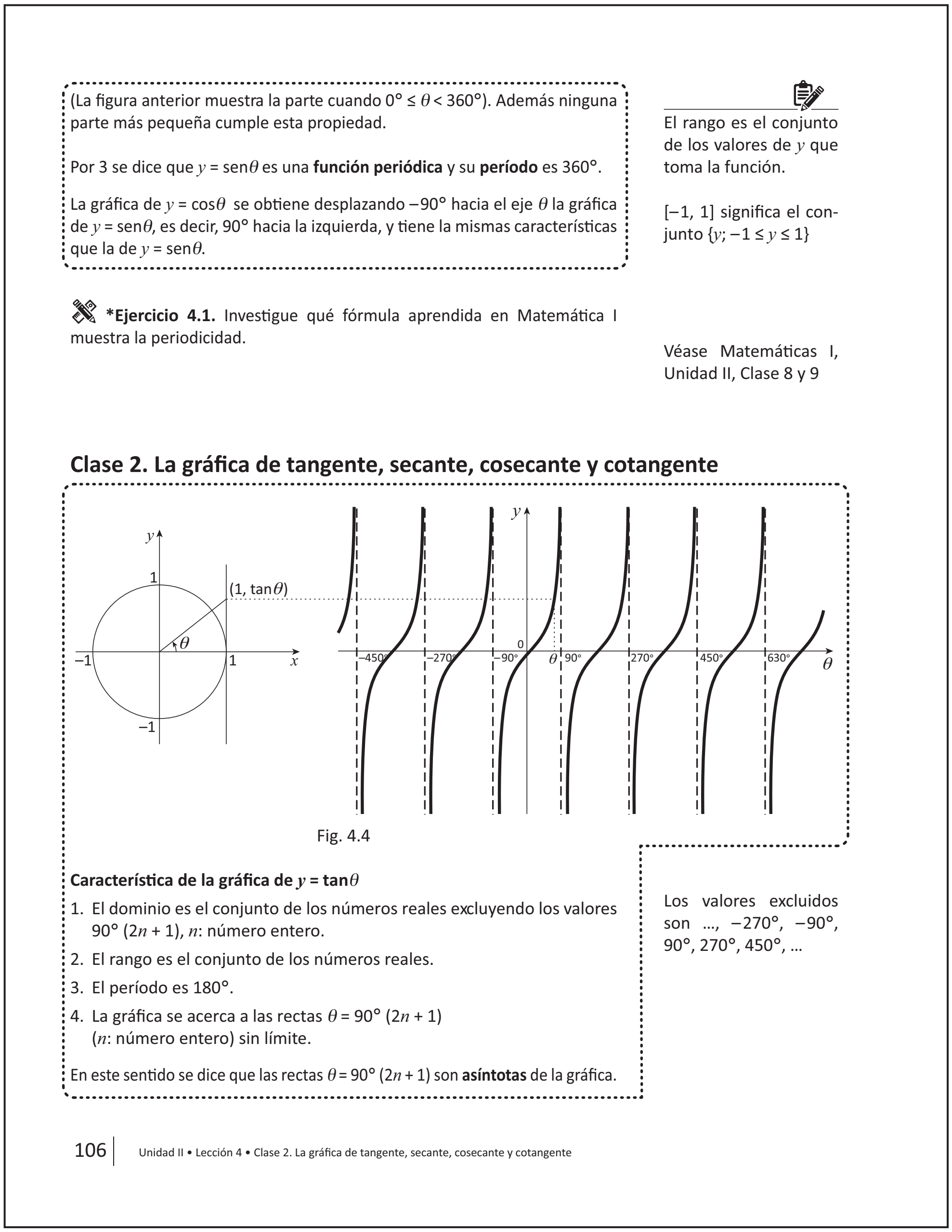
[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Gráfica de y = tanθ

(20 min)

Primero los estudiantes tienen que saber dónde aparece el valor de tanθ como una coordenada del punto.



(La figura anterior muestra la parte cuando 0° ≤ θ < 360°). Además ninguna parte más pequeña cumple esta propiedad.

Por 3 se dice que y = senθ es una **función periódica** y su **período** es 360°.

La gráfica de y = cosθ se obtiene desplazando −90° hacia el eje θ la gráfica de y = senθ, es decir, 90° hacia la izquierda, y tiene la mismas características que la de y = senθ.

El rango es el conjunto de los valores de y que toma la función.

[−1, 1] significa el conjunto {y; −1 ≤ y ≤ 1}

***Ejercicio 4.1.** Investigue qué fórmula aprendida en Matemática I muestra la periodicidad.

Véase Matemáticas I, Unidad II, Clase 8 y 9

Clase 2. La gráfica de tangente, secante, cosecante y cotangente

Fig. 4.4

Característica de la gráfica de y = tanθ

1. El dominio es el conjunto de los números reales excluyendo los valores 90° (2n + 1), n: número entero.
2. El rango es el conjunto de los números reales.
3. El período es 180°.
4. La gráfica se acerca a las rectas θ = 90° (2n + 1) (n: número entero) sin límite.

En este sentido se dice que las rectas θ = 90° (2n + 1) son **asíntotas** de la gráfica.

Los valores excluidos son ..., −270°, −90°, 90°, 270°, 450°, ...

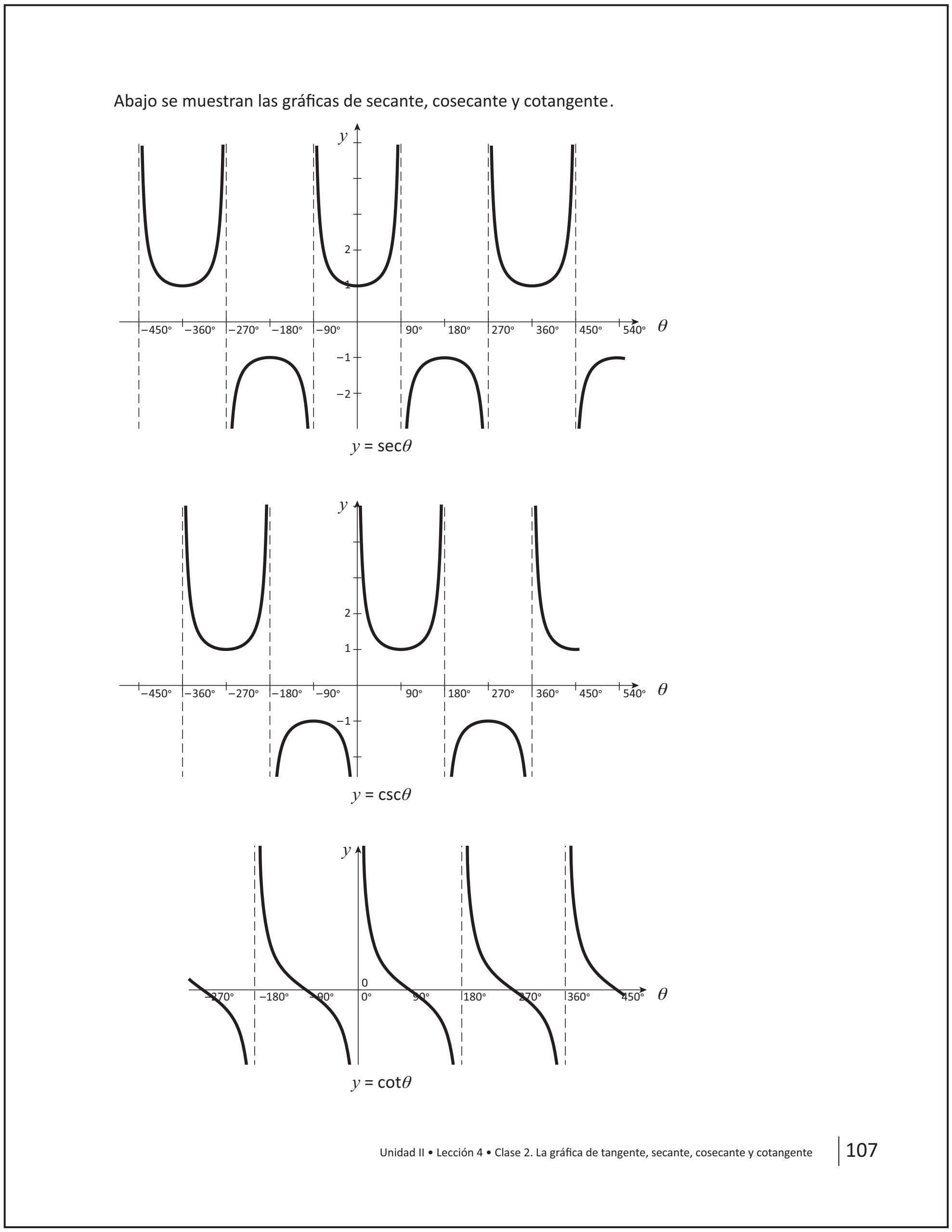
Dese cuenta que las asíntotas aparecen cuando tanθ no está definida para ese valor de θ.

El período es 180° porque los radios colineales dan el mismo valor de tanθ.

Clase 2

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Abajo se muestran las gráficas de secante, cosecante y cotangente.

$y = \sec\theta$

$y = \csc\theta$

$y = \cot\theta$

Unidad II • Lección 4 • Clase 2. La gráfica de tangente, secante, cosecante y cotangente 107

Grafica de $y = \sec\theta$
$y = \csc\theta$ y $y = \cot\theta$
(15min)

El punto es que cuando el número positivo x se acerca a 0, el valor $\frac{1}{x}$ aumenta y si x es negativo entonces $\frac{1}{x}$ es negativo y $\left|\frac{1}{x}\right|$ aumenta.

Unidad II. Lección 4.

Clase 2

(Continuación)

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender las gráficas de $y = k$ senθ y y = sen$\theta + b$ en relación con la de y = senθ.

Evaluación: Ejercicio 4.3, 4.4

Ejercicio 4.2

(10min) Solución

(n: número entero)

y = secθ

- a) $\{\theta, 90° (2n - 1) < \theta < 90° (2n + 1)\}$
- b) $\{y, y \leq -1, 1 \leq y\}$
- c) 360°
- d) $\theta = 90° (2n + 1)$

y = cscθ

- a) $\{\theta, 180°n < y < 180° (n + 1)\}$
- b) $\{y, y \leq -1, 1 \leq y\}$
- c) 360°
- d) $\theta = 180°n$

y = cotθ

- a) $\{\theta, 180°n < y < 180° (n + 1)\}$
- b) El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- c) 180°
- d) $\theta = 180°n$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

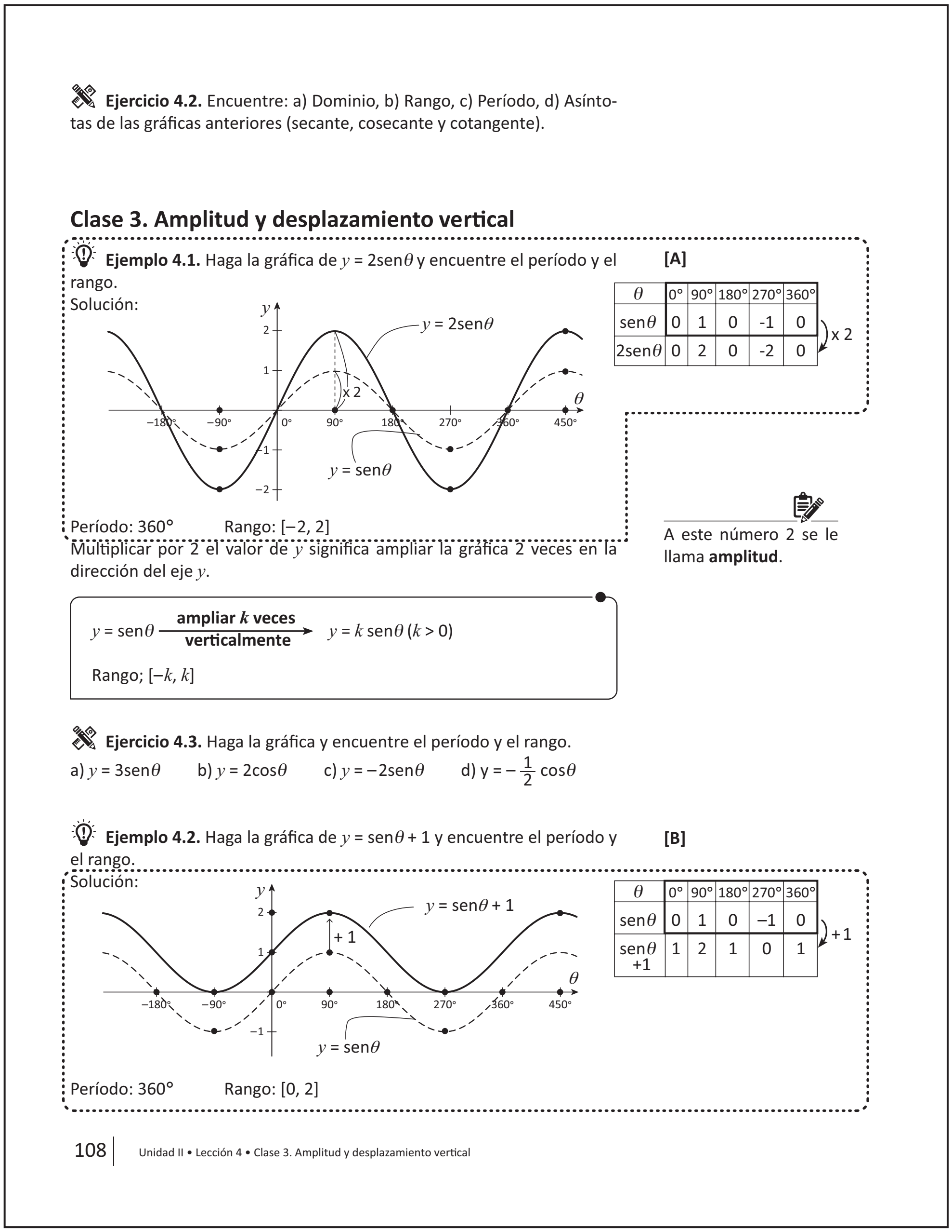
[A]

Ejemplo 4.1

(10min)

Cuando se dibuja la gráfica de y = senθ o y = cosθ, basta tomar puntos donde la coordenada y tiene el valor de –1, 0 y 1.

En la tabla la parte marcada con la línea gruesa es fundamental.



Ejercicio 4.2. Encuentre: a) Dominio, b) Rango, c) Período, d) Asíntotas de las gráficas anteriores (secante, cosecante y cotangente).

Clase 3. Amplitud y desplazamiento vertical

Ejemplo 4.1. Haga la gráfica de $y = 2$senθ y encuentre el período y el rango.

Solución:

[A]

θ	0°	90°	180°	270°	360°
senθ	0	1	0	-1	0
2senθ	0	2	0	-2	0

x 2

Período: 360° Rango: [–2, 2]

Multiplicar por 2 el valor de y significa ampliar la gráfica 2 veces en la dirección del eje y.

A este número 2 se le llama **amplitud**.

$$y = \text{sen}\theta \xrightarrow[\textbf{verticalmente}]{\textbf{ampliar } k \textbf{ veces}} y = k\,\text{sen}\theta\ (k > 0)$$

Rango; $[-k, k]$

Ejercicio 4.3. Haga la gráfica y encuentre el período y el rango.

a) $y = 3$senθ b) $y = 2$cosθ c) $y = -2$senθ d) $y = -\frac{1}{2}$cosθ

Ejemplo 4.2. Haga la gráfica de y = sen$\theta + 1$ y encuentre el período y el rango.

Solución:

[B]

θ	0°	90°	180°	270°	360°
senθ	0	1	0	–1	0
senθ +1	1	2	1	0	1

+1

Período: 360° Rango: [0, 2]

108 | Unidad II • Lección 4 • Clase 3. Amplitud y desplazamiento vertical

Ejercicio 4.3 (13 min) Véase solución en página 130.

[B]

Ejemplo 4.2 (10 min)

Objetivo: Entender la relación entre la gráfica de y = senθ y y = sen($\theta - \alpha$).

Evaluación: Ejercicio 4.6

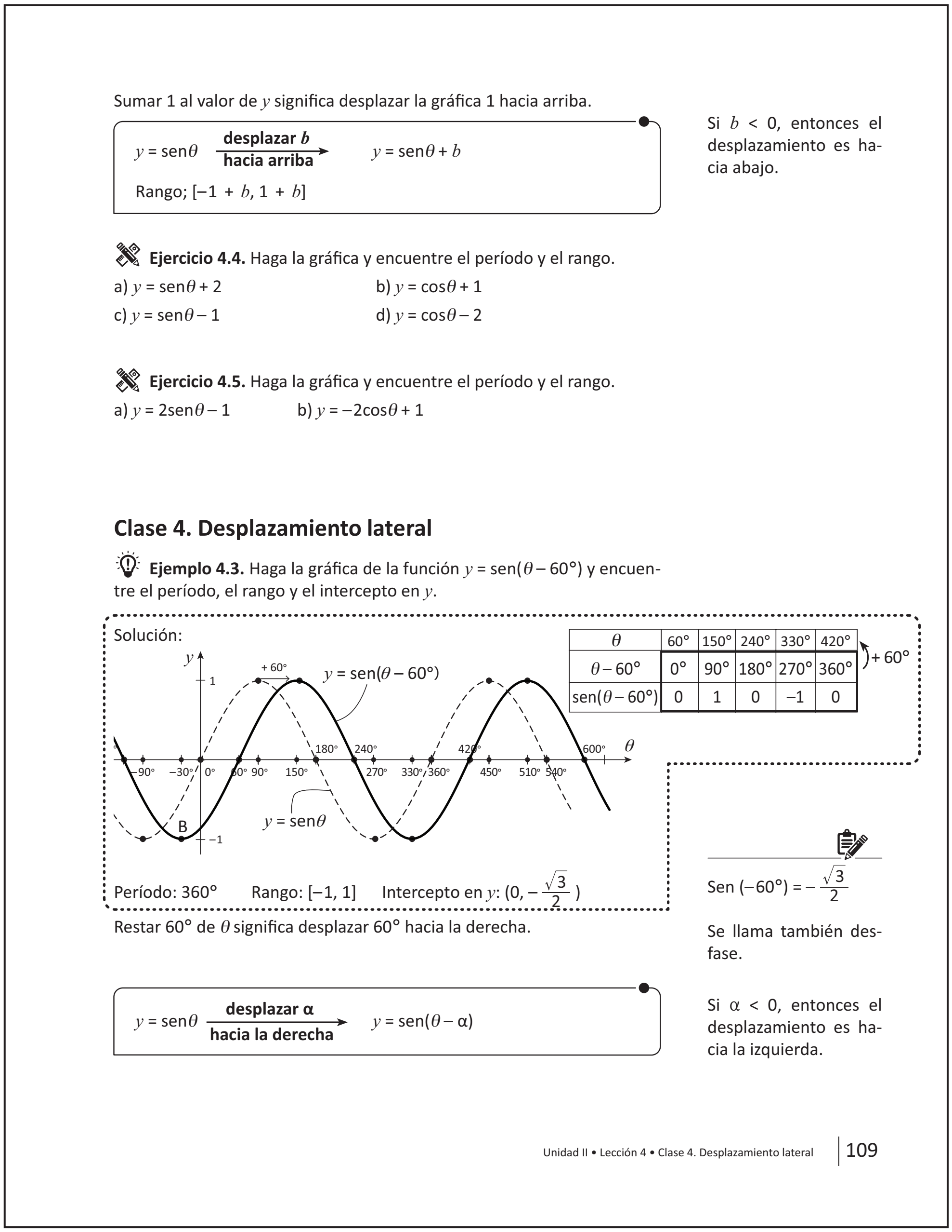
Unidad II. Lección 4.

Clase 3

(Continuación)

Clase 4

(Continúa en la siguiente página)



Sumar 1 al valor de y significa desplazar la gráfica 1 hacia arriba.

y = senθ $\xrightarrow[\textbf{hacia arriba}]{\textbf{desplazar } b}$ y = sen$\theta + b$

Rango; [–1 + b, 1 + b]

Si b < 0, entonces el desplazamiento es hacia abajo.

Ejercicio 4.4. Haga la gráfica y encuentre el período y el rango.

a) y = senθ + 2　　b) y = cosθ + 1

c) y = senθ – 1　　d) y = cosθ – 2

Ejercicio 4.5. Haga la gráfica y encuentre el período y el rango.

a) y = 2senθ – 1　　b) y = –2cosθ + 1

Clase 4. Desplazamiento lateral

Ejemplo 4.3. Haga la gráfica de la función y = sen(θ – 60°) y encuentre el período, el rango y el intercepto en y.

Solución:

θ	60°	150°	240°	330°	420°
θ – 60°	0°	90°	180°	270°	360°
sen(θ – 60°)	0	1	0	–1	0

+ 60°

Período: 360°　　Rango: [–1, 1]　　Intercepto en y: (0, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Restar 60° de θ significa desplazar 60° hacia la derecha.

Sen (–60°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Se llama también desfase.

y = senθ $\xrightarrow[\textbf{hacia la derecha}]{\textbf{desplazar } \alpha}$ y = sen(θ – α)

Si α < 0, entonces el desplazamiento es hacia la izquierda.

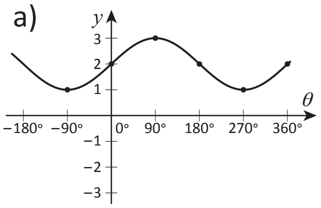
Ejemplo 4.3. (15 min)

Es importante entender el desplazamiento en relación con la tabla.

Ejercicio 4.4

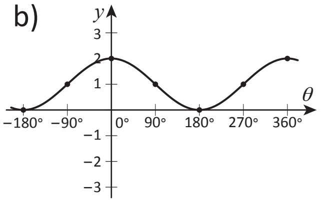
(12 min) Soluciones

a)



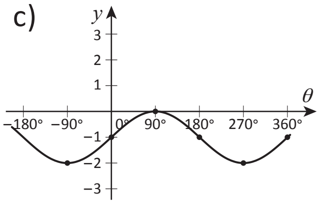
Período: 360°　Rango: [1, 3]

b)



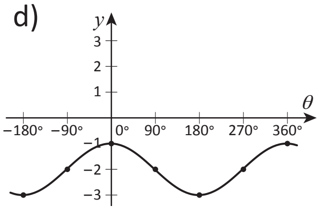
Período: 360°　Rango: [0, 2]

c)



Período: 360°　Rango: [–2, 0]

d)



Período: 360° Rango: [–3, –1]

Ejercicio 4.5

(Tarea en casa)

Solución

Véase página 130.

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4

Unidad II. Lección 4.

Clase 4

(Continuación)

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la gráfica de $y = \text{sen}k\theta$ y $y = \text{sen}k(\theta - \alpha)$ y su período en relación con la de $y = \text{sen}\theta$.

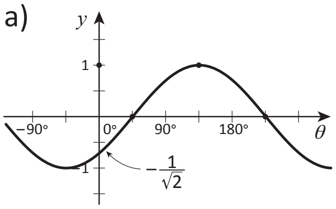
Evaluación: Ejercicio 4.8, Ejercicio 4.9

La teoría general de desplazamiento se tratará en Mat III Unidad II.

Ejercicio 4.6

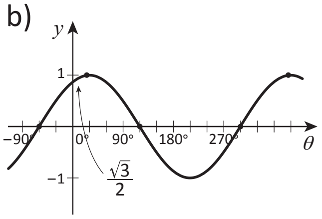
(15 min) Solución

a)



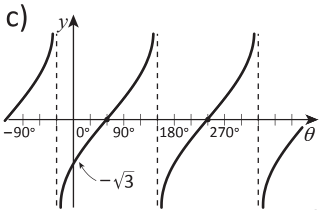
Período: 360° Rango: [–1, 1]

b)



Período: 360° Rango: [–1, 1]

c)



Período: 180° Rango: (–∞, ∞)

Incisos d), e) y f) Véase pág. 130.

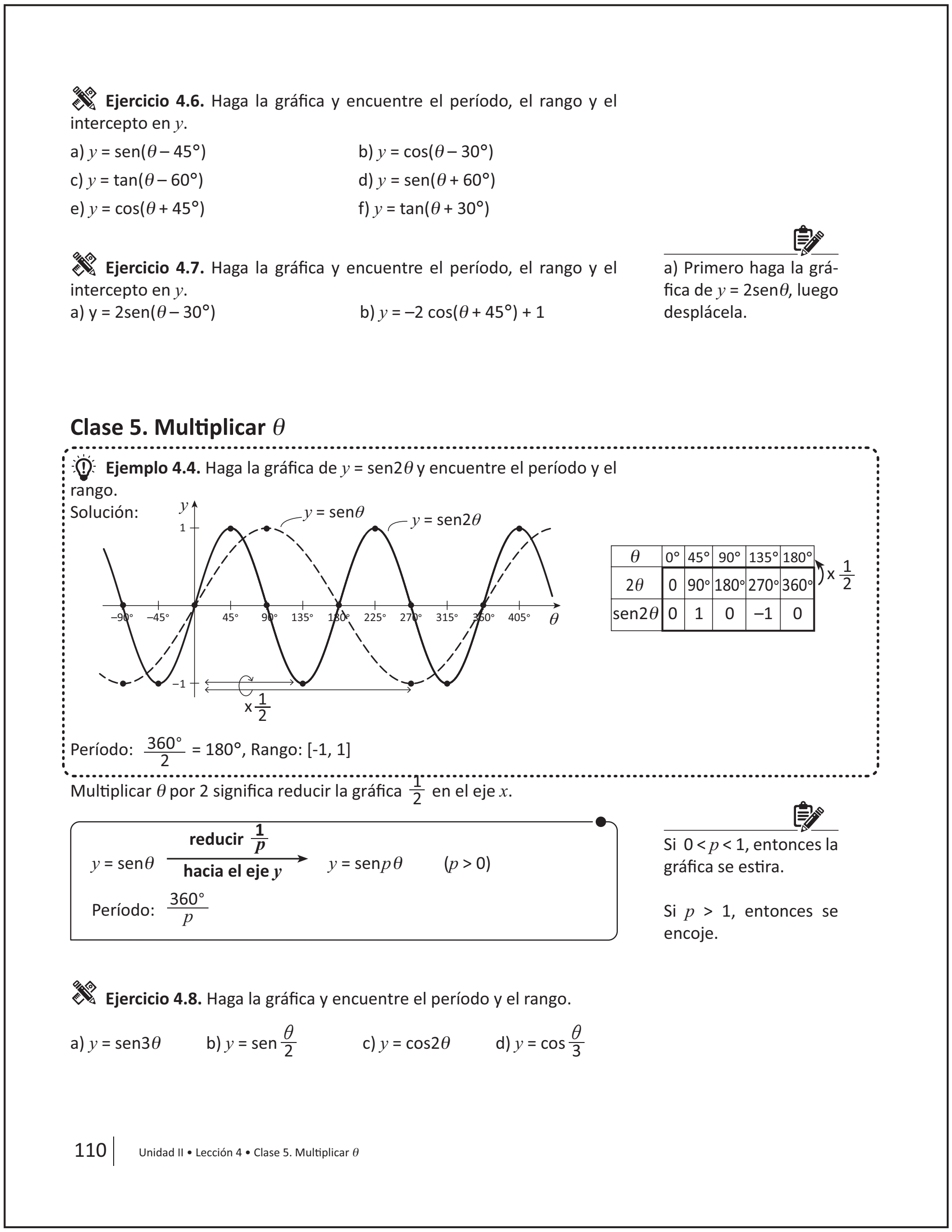
Ejercicio 4.7

(15 min) Solución

Véase página 130.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5



Ejercicio 4.6. Haga la gráfica y encuentre el período, el rango y el intercepto en y.

a) $y = \text{sen}(\theta - 45°)$
b) $y = \cos(\theta - 30°)$
c) $y = \tan(\theta - 60°)$
d) $y = \text{sen}(\theta + 60°)$
e) $y = \cos(\theta + 45°)$
f) $y = \tan(\theta + 30°)$

Ejercicio 4.7. Haga la gráfica y encuentre el período, el rango y el intercepto en y.

a) $y = 2\text{sen}(\theta - 30°)$
b) $y = -2\cos(\theta + 45°) + 1$

a) Primero haga la gráfica de $y = 2\text{sen}\theta$, luego desplácela.

Clase 5. Multiplicar θ

Ejemplo 4.4. Haga la gráfica de $y = \text{sen}2\theta$ y encuentre el período y el rango.

Solución:

θ	0°	45°	90°	135°	180°
2θ	0	90°	180°	270°	360°
sen2θ	0	1	0	–1	0

x $\frac{1}{2}$

Período: $\frac{360°}{2}$ = 180°, Rango: [-1, 1]

Multiplicar θ por 2 significa reducir la gráfica $\frac{1}{2}$ en el eje x.

$$y = \text{sen}\theta \xrightarrow[\textbf{hacia el eje } y]{\textbf{reducir } \frac{1}{p}} y = \text{sen}p\theta \qquad (p > 0)$$

Período: $\frac{360°}{p}$

Si $0 < p < 1$, entonces la gráfica se estira.

Si $p > 1$, entonces se encoje.

Ejercicio 4.8. Haga la gráfica y encuentre el período y el rango.

a) $y = \text{sen}3\theta$ b) $y = \text{sen}\frac{\theta}{2}$ c) $y = \cos2\theta$ d) $y = \cos\frac{\theta}{3}$

110 | Unidad II • Lección 4 • Clase 5. Multiplicar θ

Ejemplo 4.4. (15 min) Explique la gráfica relacionada con la tabla.

Ejercicio 4.8. (15 min) Solución véase página 131.

Objetivo: Entender la manera sintetizar lo aprendido para dibujar la gráfica de $y = k\text{sen}\ (\text{P}\theta + \alpha)$.

Evaluación: Ejercicio 4.10

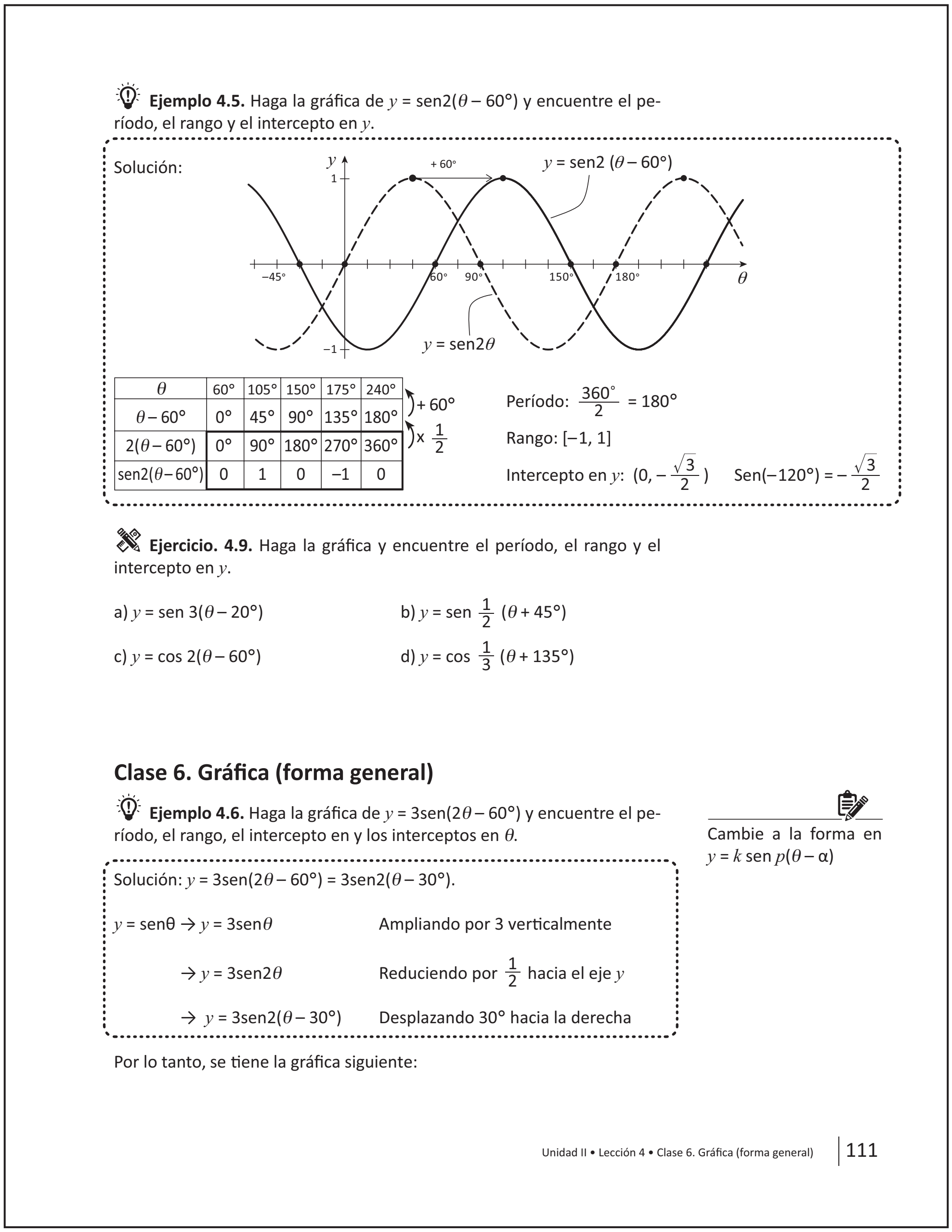
Unidad II. Lección 4.

Clase 5

(Continuación)

Clase 6

(Continúa en la siguiente página)



Ejemplo 4.5. Haga la gráfica de $y = \text{sen}2(\theta - 60°)$ y encuentre el período, el rango y el intercepto en y.

Solución:

θ	60°	105°	150°	175°	240°
$\theta - 60°$	0°	45°	90°	135°	180°
$2(\theta - 60°)$	0°	90°	180°	270°	360°
$\text{sen}2(\theta - 60°)$	0	1	0	–1	0

+ 60°

x $\frac{1}{2}$

Período: $\frac{360°}{2} = 180°$

Rango: [–1, 1]

Intercepto en y: $(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ Sen(–120°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicio. 4.9. Haga la gráfica y encuentre el período, el rango y el intercepto en y.

a) $y = \text{sen}\ 3(\theta - 20°)$ b) $y = \text{sen}\ \frac{1}{2}\ (\theta + 45°)$

c) $y = \cos\ 2(\theta - 60°)$ d) $y = \cos\ \frac{1}{3}\ (\theta + 135°)$

Clase 6. Gráfica (forma general)

Ejemplo 4.6. Haga la gráfica de $y = 3\text{sen}(2\theta - 60°)$ y encuentre el período, el rango, el intercepto en y los interceptos en θ.

Cambie a la forma en $y = k\ \text{sen}\ p(\theta - \alpha)$

Solución: $y = 3\text{sen}(2\theta - 60°) = 3\text{sen}2(\theta - 30°)$.

$y = \text{sen}\theta \rightarrow y = 3\text{sen}\theta$ Ampliando por 3 verticalmente

$\rightarrow y = 3\text{sen}2\theta$ Reduciendo por $\frac{1}{2}$ hacia el eje y

$\rightarrow y = 3\text{sen}2(\theta - 30°)$ Desplazando 30° hacia la derecha

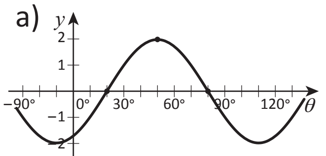
Por lo tanto, se tiene la gráfica siguiente:

Unidad II • Lección 4 • Clase 6. Gráfica (forma general) 111

Ejemplo 4.5
(15 min)
Se efectúa el desplazamiento lateral por último.

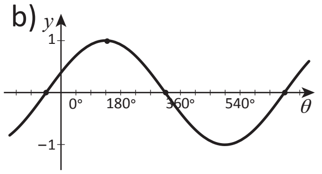
Ejercicio 4.9
(Tarea en casa)
Solución

a)



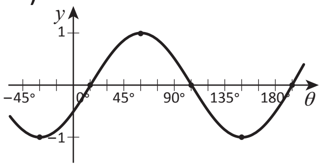
P: 120° R: [–1, 1] Iy: $\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b)



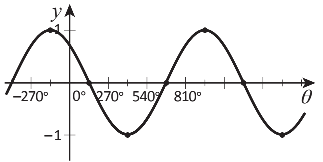
P: 720° R: [–1, 1]
Iy: (0, sen22.5°)

c)



P: 180° R: [–1, 1] Iy: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

d)



P: 1080° R: [–1, 1] Iy: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

Ejemplo 4.6. (15 min)

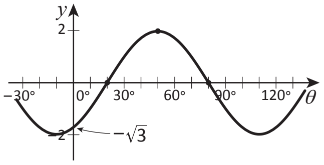
Que entiendan el orden:

$y = \text{sen}\theta \rightarrow y = k\text{sen}\theta$
$\rightarrow y = k\text{sen}p\theta$
$\rightarrow y = k\text{sen}p\ (\theta - \alpha)$

Clase 6
(Continuación)

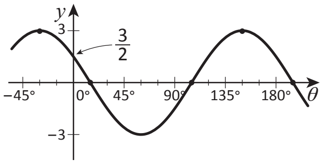
Ejercicio 4.10
(30 min) Solución
(n: número entero)

a) $y = 2\ \text{sen}3(\theta - 20°)$



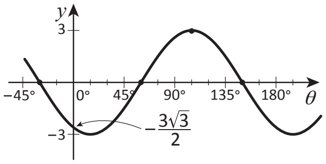
P: 120° R: [–2, 2]
Intercepto en θ: $20° + 60°n$

b) $y = 3\ \cos2(\theta + 30°)$



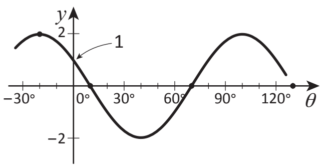
P: 180° R: [–3, 3]
Intercepto en θ: $15° + 90°n$

c) $y = -3\ \text{sen}2(\theta + 30°)$

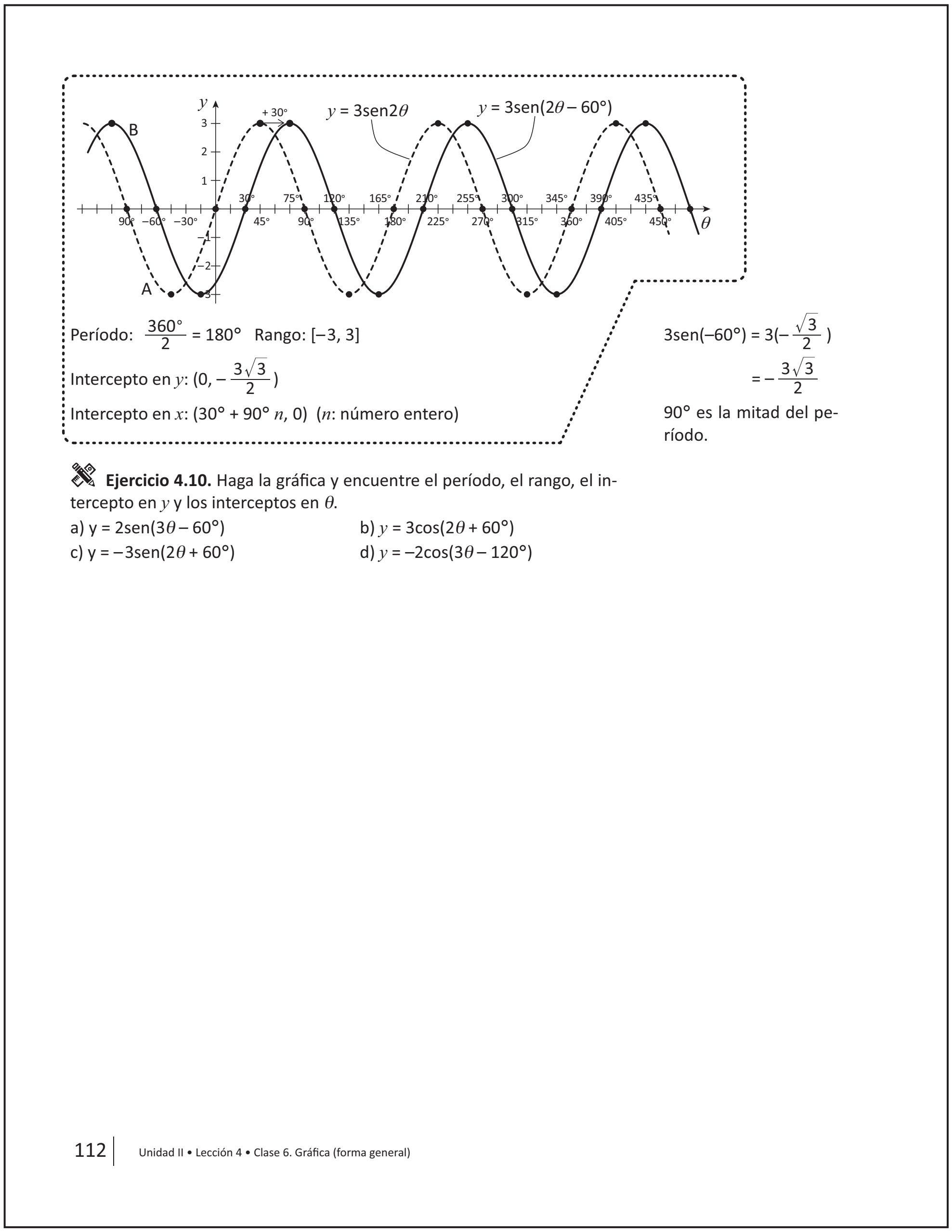


P: 180° R: [–3, 3]
Intercepto en θ: $60° + 90°n$

d) $y = -2\ \cos3(\theta - 40°)$



P: 120° R: [–2, 2]
Intercepto en θ: $10° + 60°n$



Período: $\frac{360°}{2} = 180°$ Rango: [−3, 3]

Intercepto en y: $(0, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

Intercepto en x: $(30° + 90°\,n, 0)$ (n: número entero)

$3\text{sen}(-60°) = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$= -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

90° es la mitad del período.

Ejercicio 4.10. Haga la gráfica y encuentre el período, el rango, el intercepto en y y los interceptos en θ.

a) $y = 2\text{sen}(3\theta - 60°)$
b) $y = 3\cos(2\theta + 60°)$
c) $y = -3\text{sen}(2\theta + 60°)$
d) $y = -2\cos(3\theta - 120°)$

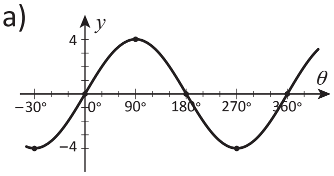
112 Unidad II • Lección 4 • Clase 6. Gráfica (forma general)

Unidad II. Lección 4.

Ejercicios de la Lección

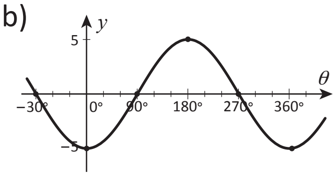
Soluciones

1. a)

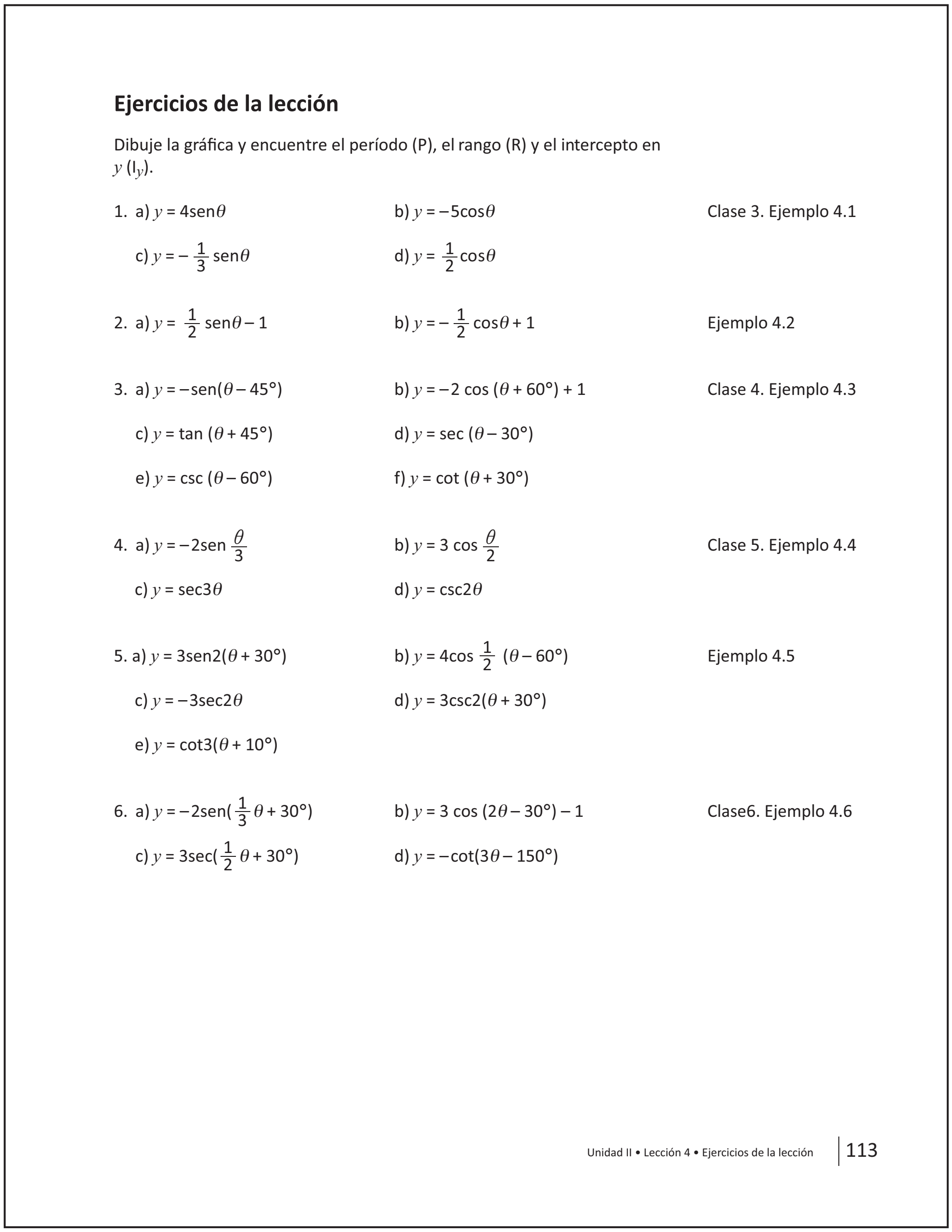


P: 360° R: [–4, 4] Iy: (0, 0)

b)



P: 360° R: [–5, 5] Iy: (0, –5)



Ejercicios de la lección

Dibuje la gráfica y encuentre el período (P), el rango (R) y el intercepto en y (I_y).

1. a) $y = 4\text{sen}\theta$ b) $y = -5\cos\theta$ Clase 3. Ejemplo 4.1

c) $y = -\frac{1}{3}\,\text{sen}\theta$ d) $y = \frac{1}{2}\cos\theta$

2. a) $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\theta - 1$ b) $y = -\frac{1}{2}\cos\theta + 1$ Ejemplo 4.2

3. a) $y = -\text{sen}(\theta - 45°)$ b) $y = -2\cos(\theta + 60°) + 1$ Clase 4. Ejemplo 4.3

c) $y = \tan(\theta + 45°)$ d) $y = \sec(\theta - 30°)$

e) $y = \csc(\theta - 60°)$ f) $y = \cot(\theta + 30°)$

4. a) $y = -2\text{sen}\,\frac{\theta}{3}$ b) $y = 3\cos\frac{\theta}{2}$ Clase 5. Ejemplo 4.4

c) $y = \sec 3\theta$ d) $y = \csc 2\theta$

5. a) $y = 3\text{sen}2(\theta + 30°)$ b) $y = 4\cos\frac{1}{2}\,(\theta - 60°)$ Ejemplo 4.5

c) $y = -3\sec 2\theta$ d) $y = 3\csc 2(\theta + 30°)$

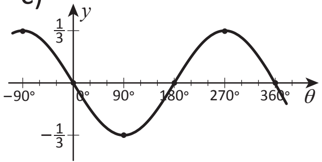
e) $y = \cot 3(\theta + 10°)$

6. a) $y = -2\text{sen}(\frac{1}{3}\theta + 30°)$ b) $y = 3\cos(2\theta - 30°) - 1$ Clase6. Ejemplo 4.6

c) $y = 3\sec(\frac{1}{2}\theta + 30°)$ d) $y = -\cot(3\theta - 150°)$

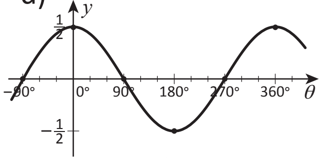
Unidad II • Lección 4 • Ejercicios de la lección | 113

c)



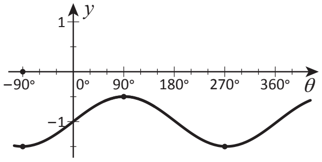
P: 360° R: $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ Iy: (0, 0)

d)



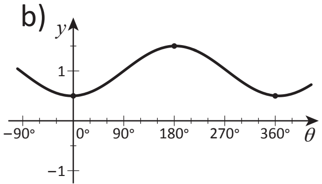
P: 360° R: $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ Iy: $(0, \frac{1}{2})$

2. a)



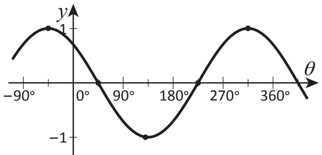
P: 360° R: $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ Iy: (0, –1)

b)



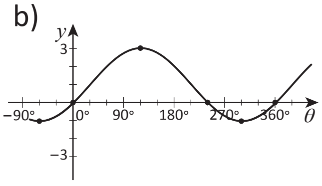
P: 360° R: $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ Iy: $(0, \frac{1}{2})$

3. a)



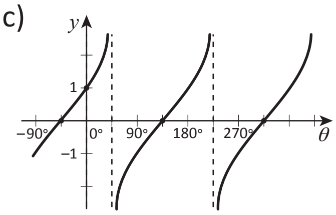
P: 360° R: [–1, 1] Iy: $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

b)



P: 360° R: [–1, 3] Iy: (0, 0)

c)



P: 180° R: (–∞, ∞) Iy: (0, 1)

3. d), e) y f) Véase página 131

4. Véase página 131

5. Véase página 131

6. Véase página 132

Unidad II. Lección 4.

Problemas de la Unidad

Soluciones

1.a) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B = 4$, $b = 2$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\dfrac{1}{2}$, $C = 120°$, $A = 180° - (B + C) = 15°$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 1$, $a = 1$

Como $b = a$, $B = A = 30°$. $C = 180° - (A + B) = 120°$

2. El área del ΔABD

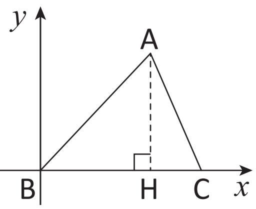
$= \dfrac{1}{2}$ (AD)(AB)sen $\dfrac{A}{2}$

El área del ΔACD

$= \dfrac{1}{2}$ (AD)(AC) sen $\dfrac{A}{2}$

Por lo tanto, la razón de las áreas es AB:AC. Por otra parte, tomando $\overline{\text{BD}}$ y $\overline{\text{DC}}$ como base de los triángulos, se sabe que esta razón es BD:DC. Luego BD:DC = AB:AC.

3.



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CH}$

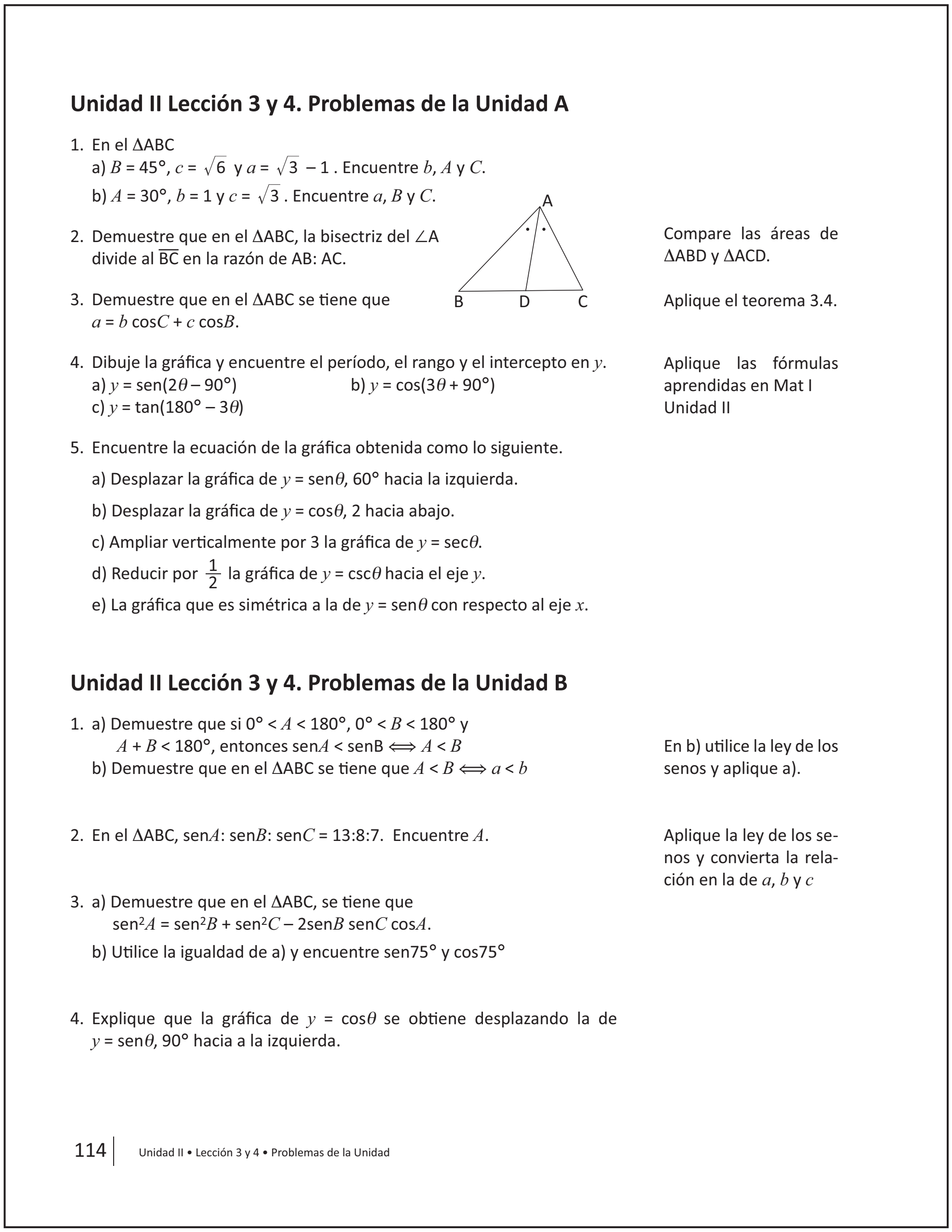
$= (c\cos B, 0)$

$-(b\cos(180° - C), 0)$

$= (c\cos B + b\cos C, 0)$

Como $a = |\overrightarrow{BC}|$ y el componente x del $\overrightarrow{BC}$ es positivo, se tiene que $a = c\cos B + b\cos C$.

4. Véase página 132.
5. Véase página 132.



Unidad II Lección 3 y 4. Problemas de la Unidad A

1. En el ΔABC
   a) $B = 45°$, $c = \sqrt{6}$ y $a = \sqrt{3} - 1$. Encuentre b, A y C.
   b) $A = 30°$, $b = 1$ y $c = \sqrt{3}$. Encuentre a, B y C.
2. Demuestre que en el ΔABC, la bisectriz del ∠A divide al $\overline{\text{BC}}$ en la razón de AB: AC.

Compare las áreas de ΔABD y ΔACD.

3. Demuestre que en el ΔABC se tiene que $a = b\cos C + c\cos B$.

Aplique el teorema 3.4.

4. Dibuje la gráfica y encuentre el período, el rango y el intercepto en y.
   a) $y = \text{sen}(2\theta - 90°)$ b) $y = \cos(3\theta + 90°)$
   c) $y = \tan(180° - 3\theta)$

Aplique las fórmulas aprendidas en Mat I Unidad II

5. Encuentre la ecuación de la gráfica obtenida como lo siguiente.
   a) Desplazar la gráfica de $y = \text{sen}\theta$, 60° hacia la izquierda.
   b) Desplazar la gráfica de $y = \cos\theta$, 2 hacia abajo.
   c) Ampliar verticalmente por 3 la gráfica de $y = \sec\theta$.
   d) Reducir por $\frac{1}{2}$ la gráfica de $y = \csc\theta$ hacia el eje y.
   e) La gráfica que es simétrica a la de $y = \text{sen}\theta$ con respecto al eje x.

Unidad II Lección 3 y 4. Problemas de la Unidad B

1. a) Demuestre que si $0° < A < 180°$, $0° < B < 180°$ y
   $A + B < 180°$, entonces sen$A$ < senB $\Longleftrightarrow A < B$
   b) Demuestre que en el ΔABC se tiene que $A < B \Longleftrightarrow a < b$

En b) utilice la ley de los senos y aplique a).

2. En el ΔABC, sen$A$: sen$B$: sen$C$ = 13:8:7. Encuentre A.

Aplique la ley de los senos y convierta la relación en la de a, b y c

3. a) Demuestre que en el ΔABC, se tiene que
   $\text{sen}^2 A = \text{sen}^2 B + \text{sen}^2 C - 2\,\text{sen}B\,\text{sen}C\cos A$.
   b) Utilice la igualdad de a) y encuentre sen75° y cos75°
4. Explique que la gráfica de $y = \cos\theta$ se obtiene desplazando la de $y = \text{sen}\theta$, 90° hacia a la izquierda.

114 | Unidad II • Lección 3 y 4 • Problemas de la Unidad

Problemas Unidad B

Véase página 133.

Unidad II. Lección 3. Clase 9. *Ejercicio 3.10 Pág. 117

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} C &= \sqrt{1-\cos^2 C}\\
&= \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}\\
&= \frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}\\
&= \frac{1}{2ab}\sqrt{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}\\
&= \frac{1}{2ab}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}\\
&= \frac{1}{2ab}\sqrt{2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)}\\
&= \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

Luego $S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Unidad II. Lección 3. Ejercicios de la Lección. Pág. 118. Soluciones

5.a) $a^2 < b^2 + c^2$, $b^2 < c^2 + a^2$ y $c^2 < a^2 + b^2$ acutángulo

b) $c^2 > a^2 + b^2$ obtusángulo

c) $c^2 = a^2 + b^2$ rectángulo

d) $c^2 > a^2 + b^2$ obtusángulo

6.a) $S = \frac{1}{2}\,bc\operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

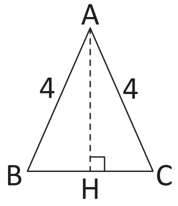
b) $S = \frac{1}{2}ca\operatorname{sen} B = \frac{1}{2} \times 6 \times 14 \times \frac{1}{2} = 21$

c) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{5}$, $\operatorname{sen} C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$

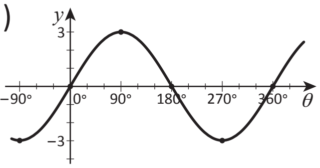
d) $\mathrm{AH} = \sqrt{4^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{2}$

$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{55}}{2} = \frac{3\sqrt{55}}{4}$



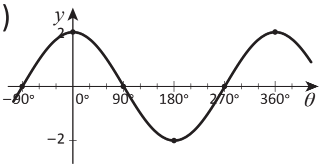
Unidad II. Lección 4. Clase 3. Ejercicio 4.3. Pág. 122. Solución.

a)



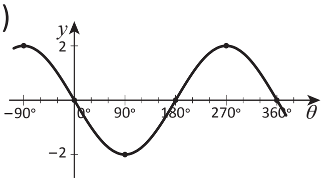
Período: 360° Rango: [–3, 3]

b)



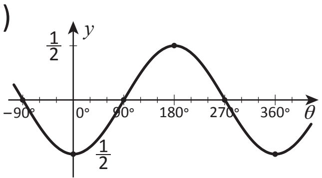
Período: 360° Rango: [–2, 2]

c)



Período: 360° Rango: [–2, 2]

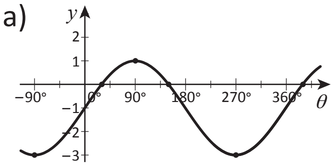
d)



Período: 360° Rango: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

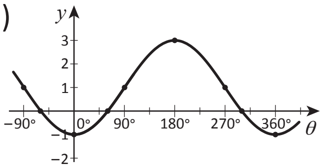
Unidad II. Lección 4. Clase 3. Ejercicio 4.5. Pág. 123. Solución.

a)



Período: 360° Rango: [–3, 1]

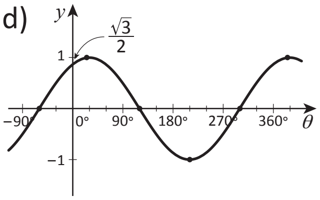
b)



Período: 360° Rango: [–1, 3]

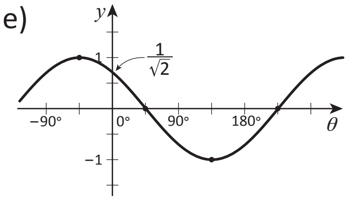
Unidad II. Lección 4. Clase 4. Ejercicio 4.6. Pág. 124. Solución (Continuación).

d)



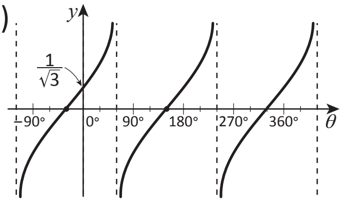
Período: 360° Rango: [–1, 1]

e)



Período: 360° Rango: [–1, 1]

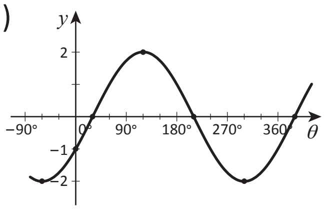
f)



Período: 180° Rango: (–∞, ∞)

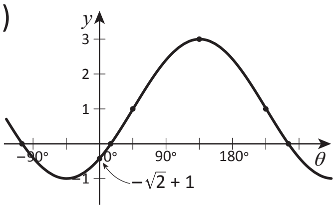
Unidad II. Lección 4. Clase 4. Ejercicio 4.7. Pág. 124. Solución.

a)



Período: 360° Rango: [–2, 2]

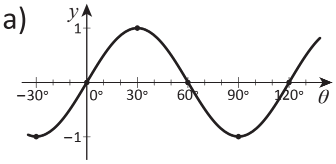
b)



Período: 360° Rango: [–1, 3]

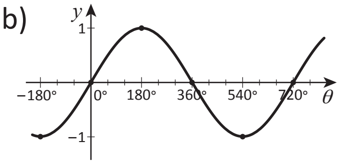
Unidad II. Lección 4. Clase 5. Ejercicio 4.8. Pág. 124. Solución.

a)



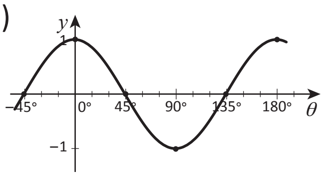
Período: 120° Rango: [–1, 1]

b)



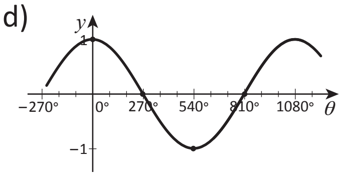
Período: 720° Rango: [–1, 1]

c)



Período: 180° Rango: [–1, 1]

d)

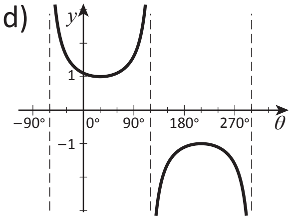


Período: 1080° Rango: [–1, 1]

Unidad II. Lección 4. Ejercicios de la Lección. Pág. 127. Soluciones

3) (continuación)

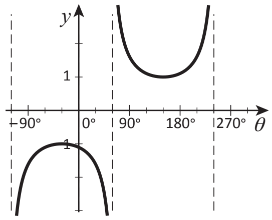
d)



P: 360° R $\{y, y \leq -1\}$
U $\{y, 1 \leq y\}$

Iy: (0, $\frac{2}{\sqrt{3}}$)

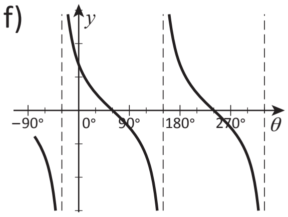
e)



P: 360° R: $\{y, y \leq -1\}$
U $\{y, 1 \leq y\}$

Iy: (0, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$)

f)

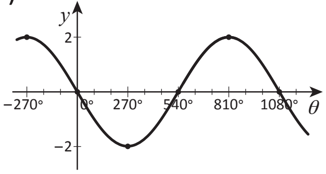


P: 180° R: (–∞, ∞)

Iy: (0, $\sqrt{3}$)

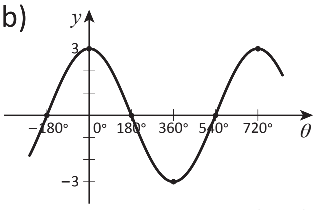
4)

a)



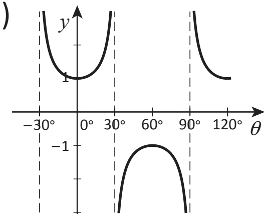
P: 1080° R: [–2, 2] Iy: (0, 0)

b)



P: 720° R: [–3, 3] Iy: (0, 3)

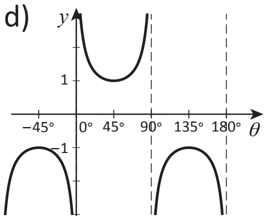
c)



P: 120° R $\{y, y \leq -1\}$
U $\{y, 1 \leq y\}$

Iy: (0, 1)

d)

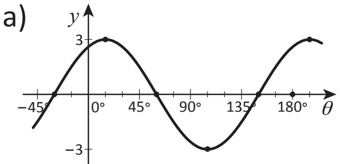


P: 180° R $\{y, y \leq -1\}$
U $\{y, 1 \leq y\}$

Iy: No existe

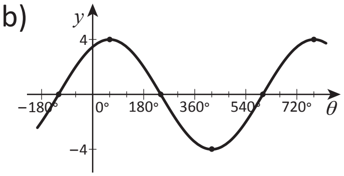
5)

a)



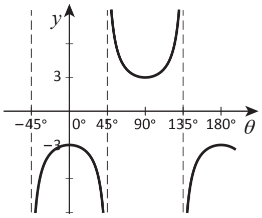
P: 180° R: [–3, 3] Iy: (0, $\frac{3}{2}\sqrt{3}$)

b)



P: 720° R: [–4, 4] Iy: (0, $2\sqrt{3}$)

c)

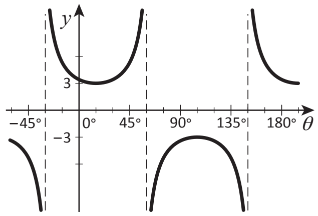


P: 180° R: (–∞, –3] U [3, ∞] Iy: (0, –3)

Unidad II. Lección 4. Ejercicios de la Lección. Pág. 127. Soluciones

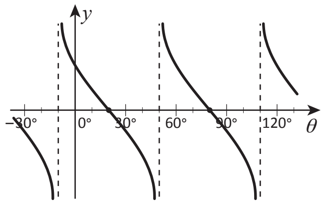
5) (continuación)

d)



P: 180° R: (−∞, −3] U (3, ∞) Iy: (0, $2\sqrt{3}$)

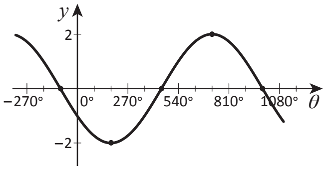
e)



P: 60° R: (−∞, ∞) Iy: (0, $\sqrt{3}$)

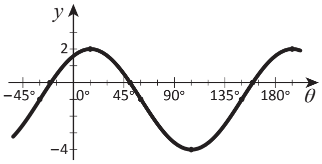
6)

a) $y = -2\text{sen}\,\frac{1}{3}(\theta + 90°)$



P: 1080° R: [−2, 2] Iy: (0, −1)

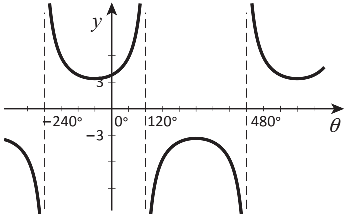
b) $y = 3\cos 2(\theta - 15°) - 1$



P: 180° R: [−4, 2]

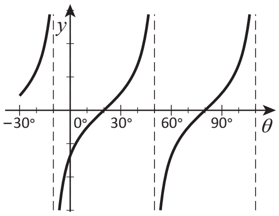
Iy: (0, $\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$)

c) $y = 3\sec\frac{1}{2}(\theta + 60°)$



P: 720° R $\{y;\, y \le -3\}$
U $\{y;\, 3 \le y\}$
Iy: (0, $2\sqrt{3}$)

d) $y = -\cot 3(\theta - 50°)$

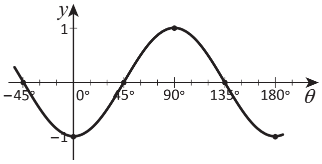


P: 60° R: (−∞, ∞)

Iy: (0, $-\sqrt{3}$)

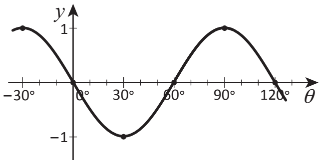
Unidad II. Problemas de la Unidad A. Pág. 128. Soluciones (Continuación)

4.a) $y = \text{sen}(2\theta - 90°) = -\text{sen}(90° - 2\theta) = -\cos 2\theta$



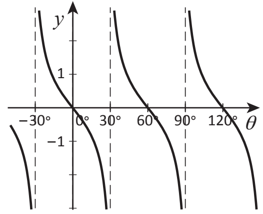
Período: 180° Rango: [−1, 1]
Intercepto en y: (0, −1)

b) $y = \cos(3\theta + 90°) = -\text{sen}3\theta$



Período: 120° Rango: [−1, 1]
Intercepto en y: (0, 0)

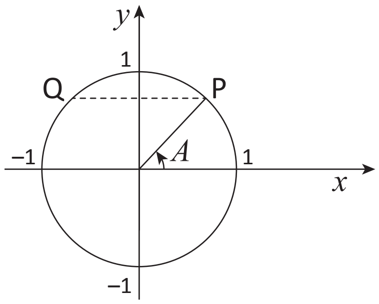
c) $y = \tan(180° - 3\theta) = \tan(-3\theta) = -\tan 3\theta$



Período: 60° Rango: (−∞, ∞)
Intercepto en y: (0, 0)

5. a) $y = \text{sen}(\theta + 60°)$ b) $y = \cos\theta - 2$ c) $y = 3\text{sen}\theta$ d) $y = \csc 2\theta$ e) $y = -\text{sen}\theta$

Unidad II. Problemas de la Unidad B. Pág. 128. Soluciones



1. a) Si $A < B$, entonces $0° < A < 90°$, como $A + B < 180°$ el punto que corresponde a B queda en el arco PQ excluyendo los extremos.
Luego sen$A$ < sen$B$.
Sea sen$A$ < sen B. Cuando $0° < A < 90°$,
si $0° < B \leq A$, sen$B$ ≤ sen$A$ (contradicción).
Entonces se tiene que $A < B$.
Cuando $90° < A < 180°$, por hipótesis ($A + B < 180°$),
$0° < B < 90°$.
Sea $\theta = 180° - A$, por definición de θ, $0° < \theta < 90°$.
senθ = sen($180° - A$) = senθ < sen$B$.
Entonces $\theta < B$.
Por tanto $180° - A < B$, $180° < A + B$ (contradiccón).
Entonces no se puede que $90° < A < 180°$.
Asi que se tiene que sen$A$ < sen$B$ $\Longleftrightarrow$ $A < B$.

b) sea R el radio de la circunferencia circunscrita.
$A < B \Longleftrightarrow$ sen$A$ < sen$B$
$$\frac{a}{2R} < \frac{b}{2R} \Longleftrightarrow a < b$$

2. sen$A$: sen$B$: sen$C$ = $\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = a : b : c = 13 : 8 : 7$

Por lo tanto, existe un número real r tal que $a = 13r$, $b = 8r$ y $c = 7r$.

Luego cos$A$ = $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(8r)^2+(7r)^2-(13r)^2}{2(8r)(7r)} = -\frac{1}{2}$, $A = 120°$

3. a) Sustituyendo $a = 2R$ sen$A$, $b = 2R$ sen$B$ y $c = 2R$ sen$C$ en $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ y luego dividiendo ambos lados entre $4R^2$, se obtiene la igualdad.

b) Sustituyendo $A = 75°$, $B = 60°$ y $C = 45°$, se tiene que sen²75° = $\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$cos75°.

Como sen²75° = 1 – cos²75°, se tiene que cos²75° – $\frac{\sqrt{6}}{2}$cos75° + $\frac{1}{4}$ = 0.

Las soluciones de $x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{4} = 0$ son $x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

Como $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} > \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y cos75° < cos45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

cos75° = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Luego sen75° = $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}}$ $\left(= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

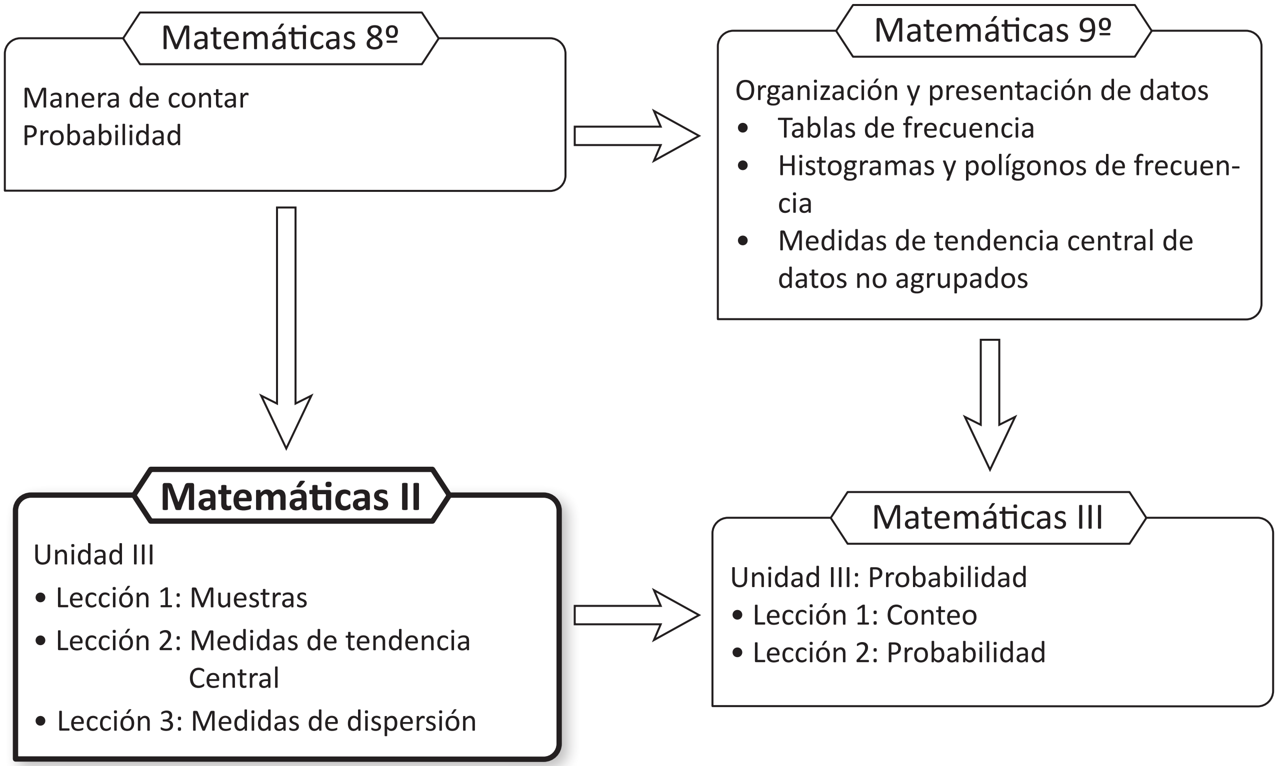
4. $y = \cos\theta$ = sen($\theta + 90°$).
La gráfica de y = sen($\theta + 90°$) se obtiene desplazando la de y = senθ, 90° hacia la izquierda.

Matemáticas II
Unidad III

Estadística

1. **Competencias de la Unidad**
   1. Desarrollar los conceptos de estadística, población y muestra.
   2. Recolectar y organizar datos estadísticos.
   3. Interpretar y comunicar información presentada en las tablas y gráficos.
   4. Calcular las medidas de tendencia central de datos en frecuencia simple y agrupada.
   5. Calcular las medidas de dispersión para datos en frecuencia simple y agrupada.
   6. Valorar la importancia de la estadística en la realidad.

2. **Relación y Desarrollo**



Matemáticas 8º

Manera de contar
Probabilidad

Matemáticas 9º

Organización y presentación de datos
- Tablas de frecuencia
- Histogramas y polígonos de frecuencia
- Medidas de tendencia central de datos no agrupados

Matemáticas II

Unidad III
- Lección 1: Muestras
- Lección 2: Medidas de tendencia Central
- Lección 3: Medidas de dispersión

Matemáticas III

Unidad III: Probabilidad
- Lección 1: Conteo
- Lección 2: Probabilidad

3. Plan de Estudio de la Unidad (14 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1. Muestras	1	Términos estadísticos	Población, muestra, variable, dato,
	2, 3 y 4	Tipos de muestra	Probabilística Aleatorio
	5 y 6	Tablas de frecuencia Datos en frecuencia simple y datos agrupados	Frecuencias, clase o intervalo
	7	Histogramas y polígonos de frecuencia	Histograma, polígono
2. Medidas de tendencia central	1 y 2	Media	Media aritmética Limites(Li, Ls), marca de clase (Xm)
	3	Mediana y moda	Clase de la media, clase modal
		Ejercicios de la lección	
3. Medidas de dispersión	1	Rango	Dispersión
	2, 3 y 4	Desviación absoluta media, varianza y desviación estándar	Desviación absoluta, varianza, desviación estándar
		Ejercicios de la lección	

Puntos de lección

Lección 1: Muestras

La estadística es una de las áreas fundamentales en la matemática que nos permite conocer el comportamiento de ciertos fenómenos y esta ocupa un papel importante en la investigación, ya que permite organizar e interpretar los datos que se obtienen, y poder hacer predicciones o toma de decisiones.

Debido a tal importancia es necesario que los estudiantes conozcan sobre esta área por lo que en esta lección se trata de tener un acercamiento procurando definir los términos básicos de la estadística (población, muestra, variables, datos, etc.) con el propósito de poder identificarlos o seleccionarlos al momento de hacer una investigación.

Adicional a ello se trata de clasificar y definir los tipos de muestra que existen proponiendo ejemplos sencillos en donde se aplica.

En una investigación cualquiera se obtendrán datos estadísticos ya sea de poblaciones o muestras por lo que es importante que los estudiantes puedan trabajar con ellos, ordenarlos, organizarlos en tablas, gráficos, diagramas, etc. para poder lograr una mejor interpretación y comprensión de ellos. Uno de los métodos que se propone es la tabla de frecuencia, los histogramas y polígonos de frecuencia lo que les permitirá observar la tendencia de los datos, identificar rápidamente cual es la clase de mayor o menor frecuencia, obtener la media, mediana y moda para poder comparar distribuciones.

Lección 2: Medidas de tendencia central

En esta lección se abordará las medidas de tendencia central para datos agrupados, sin embargo se calculará solo la media y en el caso de la mediana y la moda bastará con que identifiquen el intervalo que las contiene, ya que se considera que para su cálculo se requiere de mucha información la cual no es necesaria en este curso, por lo que se espera que en cursos posteriores de estadística aprendan a calcular.

Para el cálculo de la media se proponen dos maneras, las cuales el docente debe analizar con anticipación y decidir cuál es la más conveniente a utilizar en la clase, esto con el objeto de facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Lección 3: Medidas de dispersión

En cursos anteriores los estudiantes ya aprendieron como calcular las medidas de tendencia central para datos no agrupados (9º grado), estas se utilizan con la intención de representar todos los valores de los datos con un solo valor, sin embargo cuando se trazan los polígonos de frecuencia de dos grupos, puede ocurrir que la forma de la dispersión de los datos sea diferente aunque la media, mediana y moda sea igual, lo que significa que para una toma de decisiones o interpretación de estos se vuelve insuficiente solo las medidas de tendencia central por lo que es necesario estudiar un poco más la dispersión de los datos.

En esta lección se estudian los valores típicos que representan las medidas de dispersión; el rango que denota la diferencia entre el dato mayor y el dato menor de una distribución y al hacer la comparación entre dos distribuciones que tienen las mismas medidas de tendencia central se da que el rango es diferente, por lo que cuanto mayor es el rango los valores de los datos están más dispersos. Sin embargo se puede presentar el caso de distribuciones que poseen el mismo rango, hay casos en que los datos se dispersan de la media y otros se concentran alrededor de la media.

Para distinguir estos grupos se utiliza la desviación absoluta media la cual es la media de las distancias entre los valores y la media de los datos. Además de ello se calculan otros valores llamados varianza y desviación estándar. Cuanto mayor es el valor de estos valores, mayor es la dispersión de los datos de la media.

Unidad III. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definen los términos básicos utilizados en estadística.
Identifican y clasifican términos básicos utilizados en la estadística.

Evaluación: Ejercicio 1.1

[A]

Ejemplo 1.1

(10 min)
Presentación del problema y análisis del mismo
M: ¿De qué trata la situación Problemática?
RP: De una entrevista que hace una universidad a un colegio
M: ¿Cuántos estudiantes tienen el colegio?
RP: 300
M: 300 representa el total de estudiantes que tiene el colegio y a este le conoce como población.
M: ¿Cuántos estudiantes entrevista la universidad?
RP: 60
M: 60 es una parte del total por lo que a este dato se le conoce como muestra.
M: ¿Para qué va entrevistar la universidad?
RP: para conocer la preferencia de la carrera que desean estudiar
M: A este elemento que desean conocer de la muestra se le llama variable.

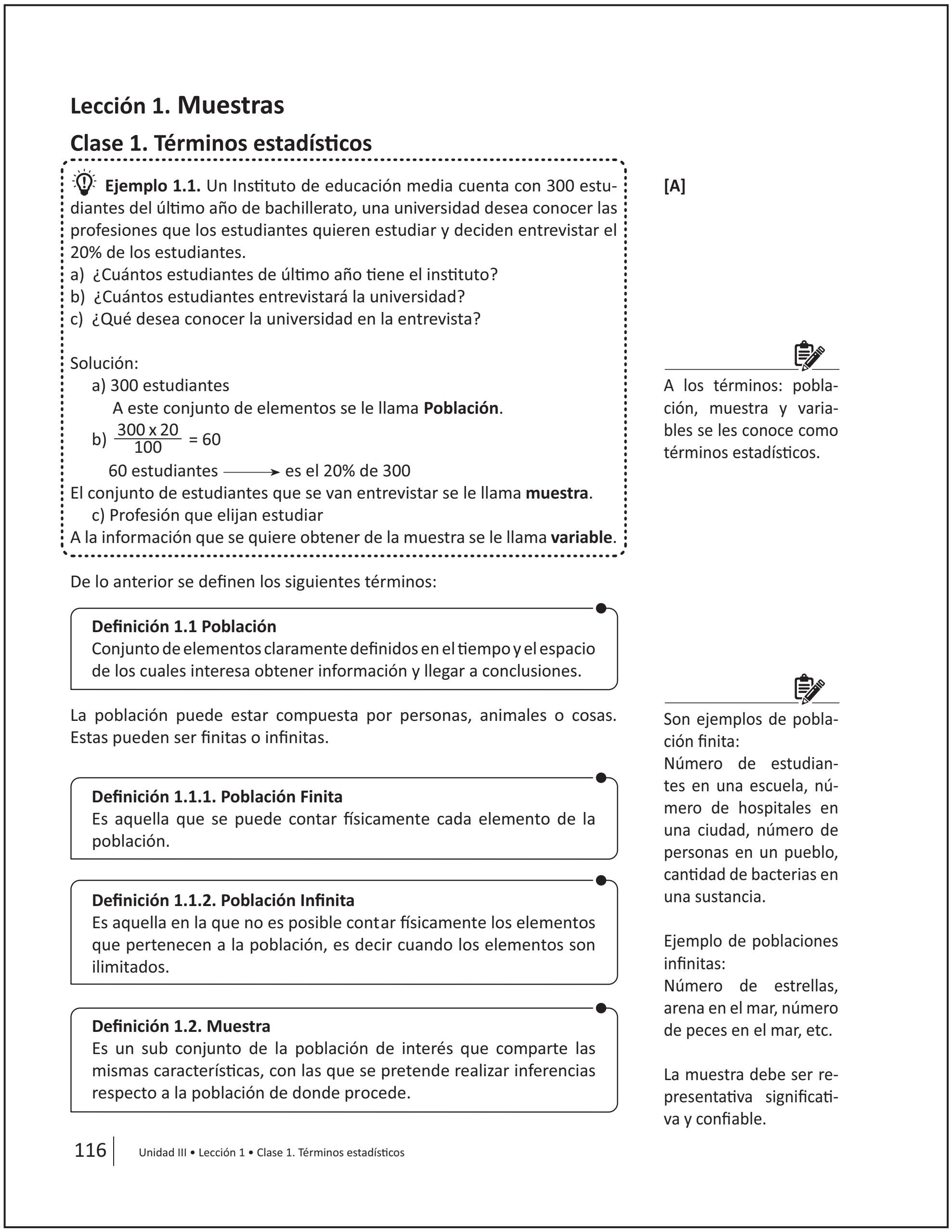
Concluye:
Definición 1.1
Clasifica la población

Definición 1.1.1

Definición 1.1.2

Concluye definición de muestra

Definición 1.2



Lección 1. Muestras

Clase 1. Términos estadísticos

Ejemplo 1.1. Un Instituto de educación media cuenta con 300 estudiantes del último año de bachillerato, una universidad desea conocer las profesiones que los estudiantes quieren estudiar y deciden entrevistar el 20% de los estudiantes.

a) ¿Cuántos estudiantes de último año tiene el instituto?
b) ¿Cuántos estudiantes entrevistará la universidad?
c) ¿Qué desea conocer la universidad en la entrevista?

Solución:
a) 300 estudiantes
A este conjunto de elementos se le llama **Población**.
b) $\frac{300 \times 20}{100} = 60$
60 estudiantes ⟶ es el 20% de 300
El conjunto de estudiantes que se van entrevistar se le llama **muestra**.
c) Profesión que elijan estudiar
A la información que se quiere obtener de la muestra se le llama **variable**.

[A]

A los términos: población, muestra y variables se les conoce como términos estadísticos.

De lo anterior se definen los siguientes términos:

Definición 1.1 Población
Conjunto de elementos claramente definidos en el tiempo y el espacio de los cuales interesa obtener información y llegar a conclusiones.

La población puede estar compuesta por personas, animales o cosas. Estas pueden ser finitas o infinitas.

Son ejemplos de población finita:
Número de estudiantes en una escuela, número de hospitales en una ciudad, número de personas en un pueblo, cantidad de bacterias en una sustancia.

Ejemplo de poblaciones infinitas:
Número de estrellas, arena en el mar, número de peces en el mar, etc.

La muestra debe ser representativa significativa y confiable.

Definición 1.1.1. Población Finita
Es aquella que se puede contar físicamente cada elemento de la población.

Definición 1.1.2. Población Infinita
Es aquella en la que no es posible contar físicamente los elementos que pertenecen a la población, es decir cuando los elementos son ilimitados.

Definición 1.2. Muestra
Es un sub conjunto de la población de interés que comparte las mismas características, con las que se pretende realizar inferencias respecto a la población de donde procede.

* Es importante que el docente proporcione algunos ejemplos de poblaciones y muestras para que los estudiantes se den cuenta que la población puede estar compuesta por objetos, animales, cosas, sustancias etc. que tengan las mismas características y dependiendo del estudio que se quiera hacer.

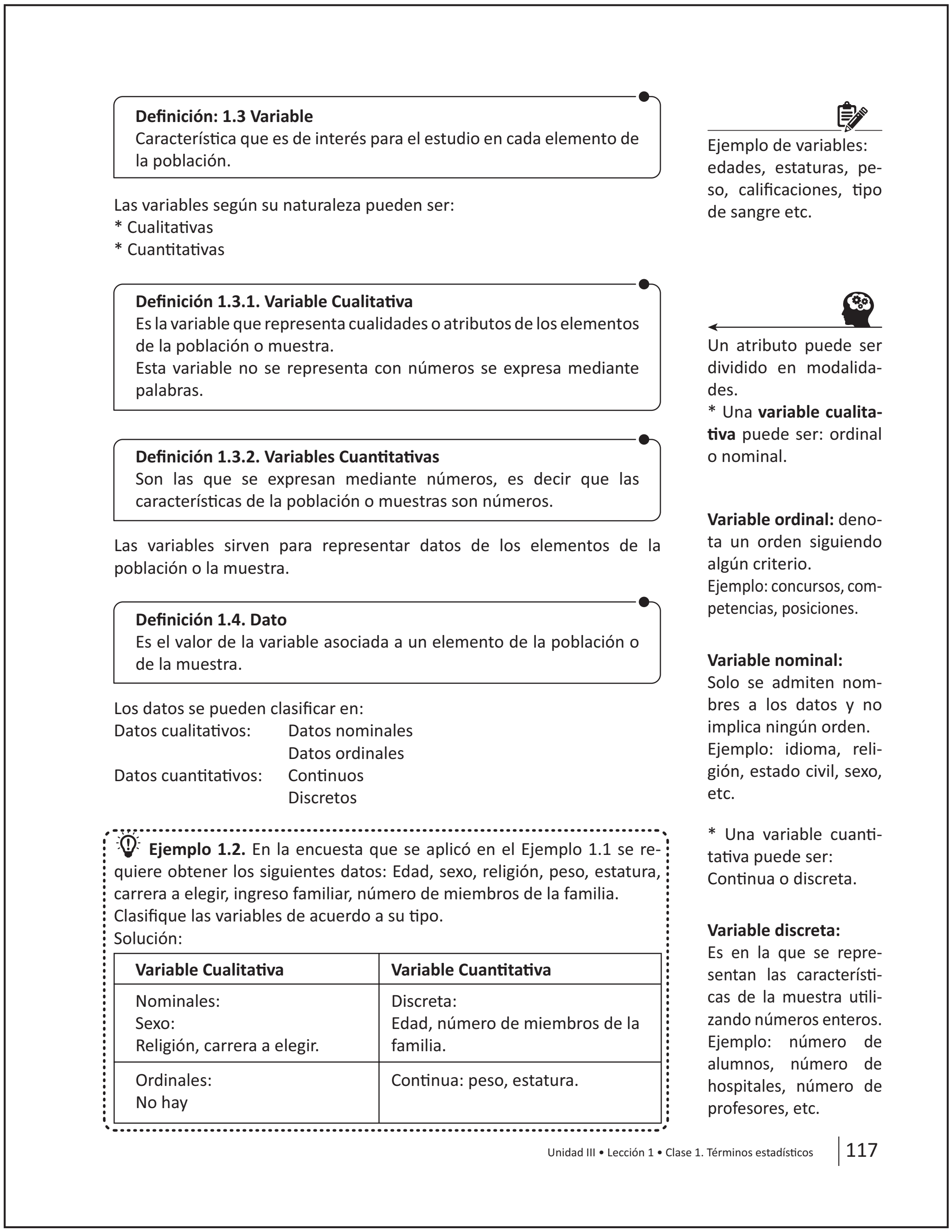
* Deben identificar la diferencia entre una población y una muestra.

Objetivo: **[B]** Identifican y clasifican términos básicos utilizados en la estadística.

Evaluación: Ejercicio 1.1

Clase 1
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Definición: 1.3 Variable
Característica que es de interés para el estudio en cada elemento de la población.

Las variables según su naturaleza pueden ser:
* Cualitativas
* Cuantitativas

Definición 1.3.1. Variable Cualitativa
Es la variable que representa cualidades o atributos de los elementos de la población o muestra.
Esta variable no se representa con números se expresa mediante palabras.

Definición 1.3.2. Variables Cuantitativas
Son las que se expresan mediante números, es decir que las características de la población o muestras son números.

Las variables sirven para representar datos de los elementos de la población o la muestra.

Definición 1.4. Dato
Es el valor de la variable asociada a un elemento de la población o de la muestra.

Los datos se pueden clasificar en:

Datos cualitativos:	Datos nominales Datos ordinales
Datos cuantitativos:	Continuos Discretos

Ejemplo 1.2. En la encuesta que se aplicó en el Ejemplo 1.1 se requiere obtener los siguientes datos: Edad, sexo, religión, peso, estatura, carrera a elegir, ingreso familiar, número de miembros de la familia.
Clasifique las variables de acuerdo a su tipo.
Solución:

Variable Cualitativa	Variable Cuantitativa
Nominales: Sexo: Religión, carrera a elegir.	Discreta: Edad, número de miembros de la familia.
Ordinales: No hay	Continua: peso, estatura.

Ejemplo de variables: edades, estaturas, peso, calificaciones, tipo de sangre etc.

Un atributo puede ser dividido en modalidades.
* Una **variable cualitativa** puede ser: ordinal o nominal.

Variable ordinal: denota un orden siguiendo algún criterio.
Ejemplo: concursos, competencias, posiciones.

Variable nominal:
Solo se admiten nombres a los datos y no implica ningún orden.
Ejemplo: idioma, religión, estado civil, sexo, etc.

* Una variable cuantitativa puede ser:
Continua o discreta.

Variable discreta:
Es en la que se representan las características de la muestra utilizando números enteros.
Ejemplo: número de alumnos, número de hospitales, número de profesores, etc.

Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Términos estadísticos | 117

Definición 1.3
(5 min)
*Proponen algunas situaciones que se pueden investigar en un grupo de personas
RP: Edad, sexo, religión, estatura, deporte favorito, color favorito, comida favorita etc.
Concluye: cada una de las situaciones anteriores son variables.
M: ¿Cómo serán los datos que se obtendrán de cada variable?
RP: algunos números y otras palabras o frases.
Concluye en los tipos de variables.

[B]
Definición 1.3.1
(10 min)
Las variables cualitativas se pueden clasificar en ordinales y nominales.
Definición 1.3.2
Las variables cuantitativas se pueden clasificar en variables discreta y continua.
M: Cuando se obtiene la información de las variables en cada miembro de la población o muestra estos se llaman datos.
M: ¿La variable estatura de que tipo es?
RP: Cuantitativa continua
M: El tipo de dato que recibe será continuo.

Los datos se clasifican de acuerdo al tipo de variable: nominales, ordinales, discretos y continuos.

Ejemplo 1.2. (5 min)
Presentar el ejemplo en la pizarra pedir a los estudiantes que identifiquen la muestra, población, y las variables
M: ¿Qué tipos de datos recolectará cada variable?
RP: Nominales, discretos y continuos.

Clase 1

(Continuación)

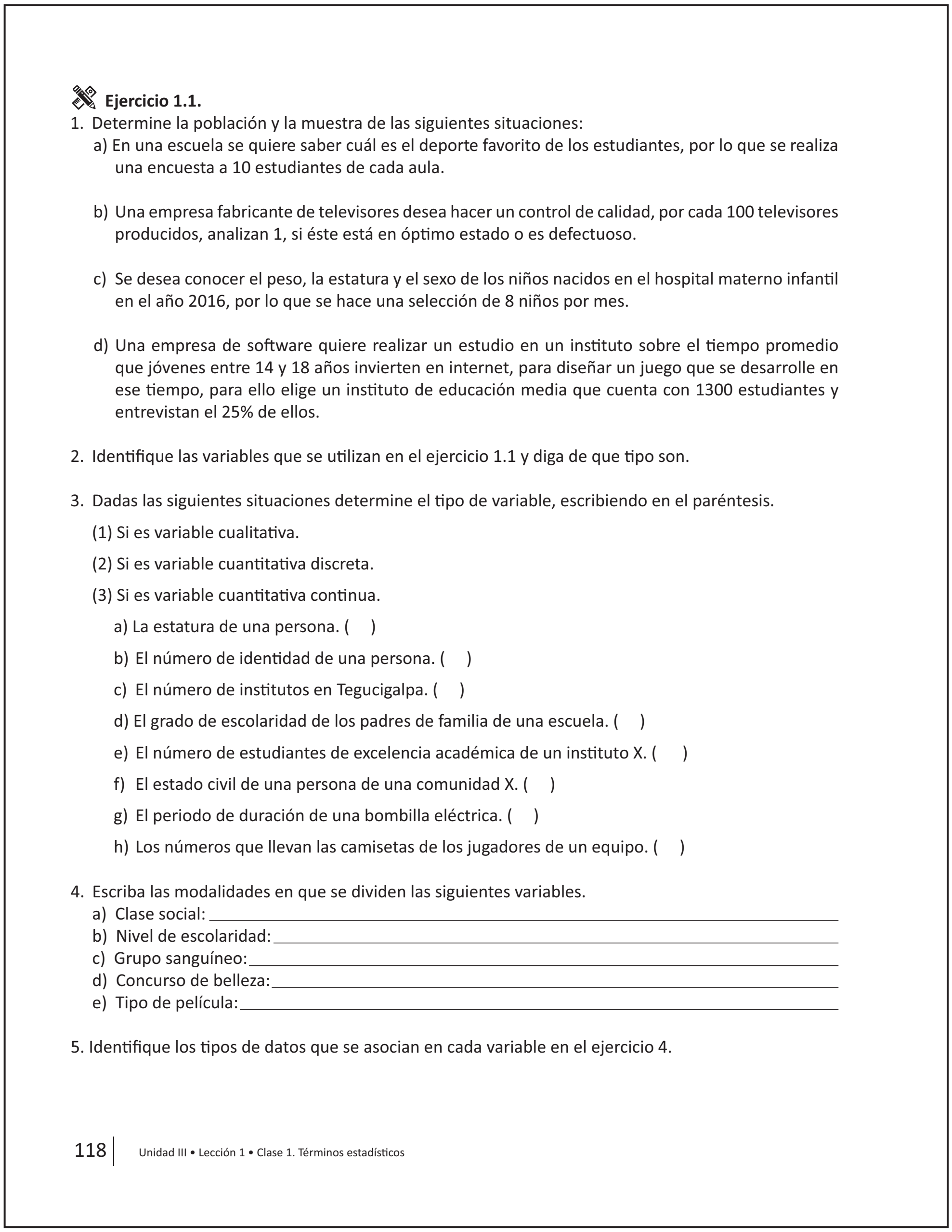
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 1.1

(15 min)

Supervisar el trabajo individual de los estudiantes para verificar la comprensión del tema. Si no hay tiempo suficiente para terminar los ejercicios proponerlos de tarea.

*Puede ser que una hora de clase no sea suficiente por lo que se puede extender dos horas de clase.



Ejercicio 1.1.

1. Determine la población y la muestra de las siguientes situaciones:
   a) En una escuela se quiere saber cuál es el deporte favorito de los estudiantes, por lo que se realiza una encuesta a 10 estudiantes de cada aula.

   b) Una empresa fabricante de televisores desea hacer un control de calidad, por cada 100 televisores producidos, analizan 1, si éste está en óptimo estado o es defectuoso.

   c) Se desea conocer el peso, la estatura y el sexo de los niños nacidos en el hospital materno infantil en el año 2016, por lo que se hace una selección de 8 niños por mes.

   d) Una empresa de software quiere realizar un estudio en un instituto sobre el tiempo promedio que jóvenes entre 14 y 18 años invierten en internet, para diseñar un juego que se desarrolle en ese tiempo, para ello elige un instituto de educación media que cuenta con 1300 estudiantes y entrevistan el 25% de ellos.

2. Identifique las variables que se utilizan en el ejercicio 1.1 y diga de que tipo son.

3. Dadas las siguientes situaciones determine el tipo de variable, escribiendo en el paréntesis.
   (1) Si es variable cualitativa.
   (2) Si es variable cuantitativa discreta.
   (3) Si es variable cuantitativa continua.
   a) La estatura de una persona. (   )
   b) El número de identidad de una persona. (   )
   c) El número de institutos en Tegucigalpa. (   )
   d) El grado de escolaridad de los padres de familia de una escuela. (   )
   e) El número de estudiantes de excelencia académica de un instituto X. (   )
   f) El estado civil de una persona de una comunidad X. (   )
   g) El periodo de duración de una bombilla eléctrica. (   )
   h) Los números que llevan las camisetas de los jugadores de un equipo. (   )

4. Escriba las modalidades en que se dividen las siguientes variables.
   a) Clase social: ______________________
   b) Nivel de escolaridad: ______________________
   c) Grupo sanguíneo: ______________________
   d) Concurso de belleza: ______________________
   e) Tipo de película: ______________________

5. Identifique los tipos de datos que se asocian en cada variable en el ejercicio 4.

118 | Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Términos estadísticos

Soluciones:

1. a) Población: todos los estudiantes.
      Muestra: 10 estudiantes por aula.
   b) Población: todos los TV fabricados.
      Muestra: es uno de cada 100.
   c) Población: todos los niños nacidos en el hospital año 2016.
      Muestra: 8 niños por mes.
   d) Población: 1300 estudiantes.
      Muestra: 325 estudiantes.

2. a) Cualitativa
   b) Cualitativa
   c) Cuantitativa
   d) Cuantitativa

3. a) 3 b) 2 c) 2 d) 1
   e) 2 f) 1 g) 3 h) 1
   i) 2 j) 3 k) 3

4. a) ordinal b) ordinal
   c) nominal d) ordinal
   e) nominal.

5. a) Cualitativo b) Cualitativo
   c) Cualitativo d) Cualitativo
   e) Cualitativo

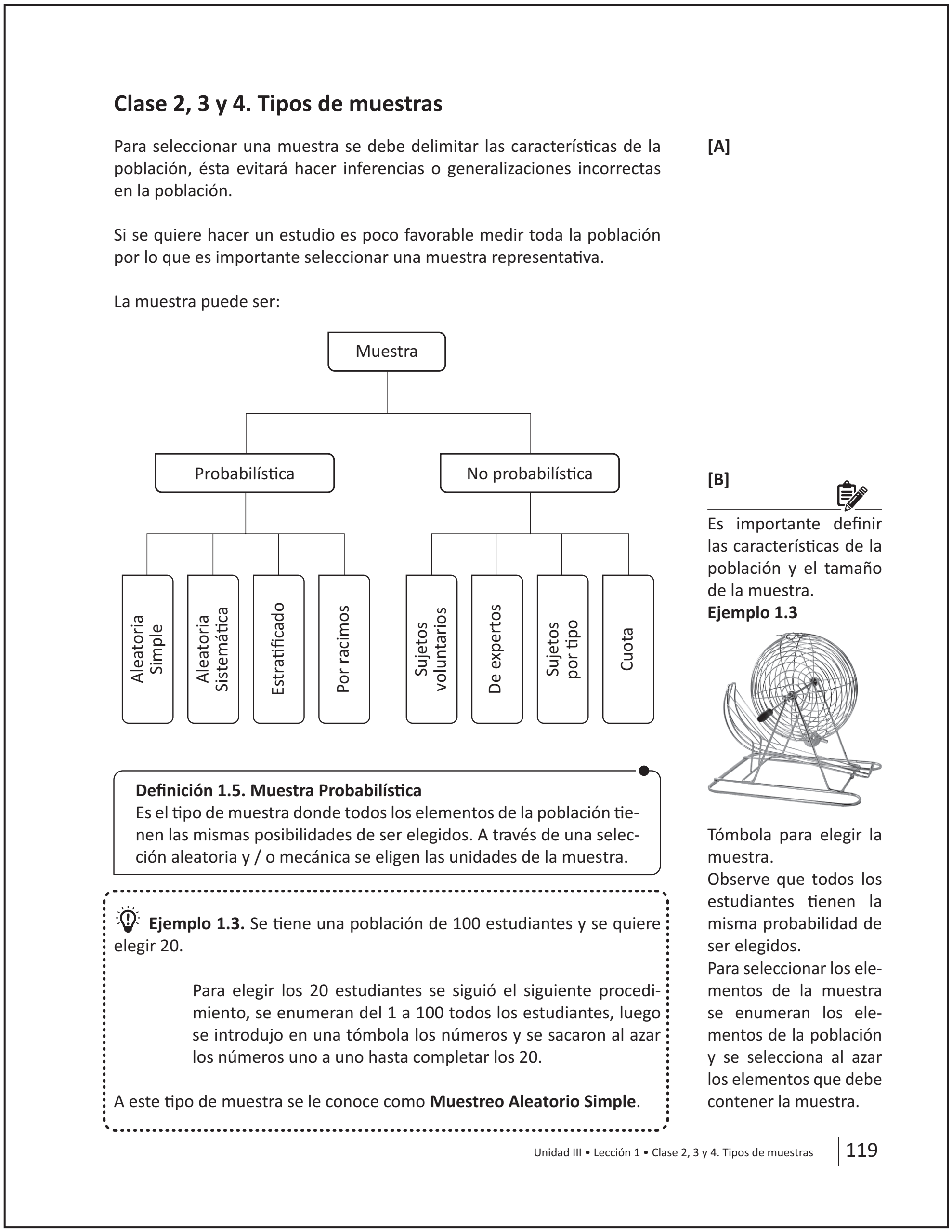
Objetivo: **[A]** Clasifican las muestras probabilísticas y no probabilísticas.
[B] Definen las características de las muestras probabilísticas.

Evaluación: Ejercicio 1.2

Unidad III. Lección 1.

Clase 2, 3 y 4

(Continúa en la siguiente página)



Clase 2, 3 y 4. Tipos de muestras

Para seleccionar una muestra se debe delimitar las características de la población, ésta evitará hacer inferencias o generalizaciones incorrectas en la población.

Si se quiere hacer un estudio es poco favorable medir toda la población por lo que es importante seleccionar una muestra representativa.

La muestra puede ser:

Definición 1.5. Muestra Probabilística
Es el tipo de muestra donde todos los elementos de la población tienen las mismas posibilidades de ser elegidos. A través de una selección aleatoria y / o mecánica se eligen las unidades de la muestra.

Ejemplo 1.3. Se tiene una población de 100 estudiantes y se quiere elegir 20.

Para elegir los 20 estudiantes se siguió el siguiente procedimiento, se enumeran del 1 a 100 todos los estudiantes, luego se introdujo en una tómbola los números y se sacaron al azar los números uno a uno hasta completar los 20.

A este tipo de muestra se le conoce como **Muestreo Aleatorio Simple**.

[A]

[B]

Es importante definir las características de la población y el tamaño de la muestra.
Ejemplo 1.3

Tómbola para elegir la muestra.
Observe que todos los estudiantes tienen la misma probabilidad de ser elegidos.
Para seleccionar los elementos de la muestra se enumeran los elementos de la población y se selecciona al azar los elementos que debe contener la muestra.

Unidad III • Lección 1 • Clase 2, 3 y 4. Tipos de muestras 119

[A]
(15 min)
M: Propongan ejemplos de muestras.
RP: Proponen varios ejemplos.
M: Aprovechar las opiniones de los estudiantes para concluir en la clasificación de las muestras en dos grupos probabilístico y no probabilístico.
M: ¿Cuál es la diferencia entre una muestra probabilística y una no probabilística?
RP: La muestra probabilística todos los elementos de la población tienen la misma posibilidad de ser elegidos y se selecciona siguiendo procesos estadísticos sistemáticos.
Mientras que la no probabilística se elige por conveniencia y los elementos de la población no tienen la misma posibilidad de ser elegidos.
Concluye en el diagrama del tipo de muestras.

[B]
Definición 1.5. (5 min)
¿Qué significa que una muestra es probabilística?
RP: Se emplean métodos estadísticos para escoger los elementos de la muestra.

Ejemplo 1.3. (10 min)
*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedirle a los estudiantes que propongan formas de cómo pueden seleccionar la muestra.
Observan en LE la forma de seleccionar la muestra y concluyen que a ese tipo de muestreo se le conoce como muestreo aleatorio simple.

Clase 2, 3 y 4
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Definición 1.5.1. (5 min)

Ejemplo 1.4
(7 min)
*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedirle a los estudiantes que propongan formas de cómo pueden seleccionar la muestra.

Observan en LE la forma de seleccionar la muestra y concluyen que a ese tipo de muestreo se le conoce como muestreo aleatorio sistemático.

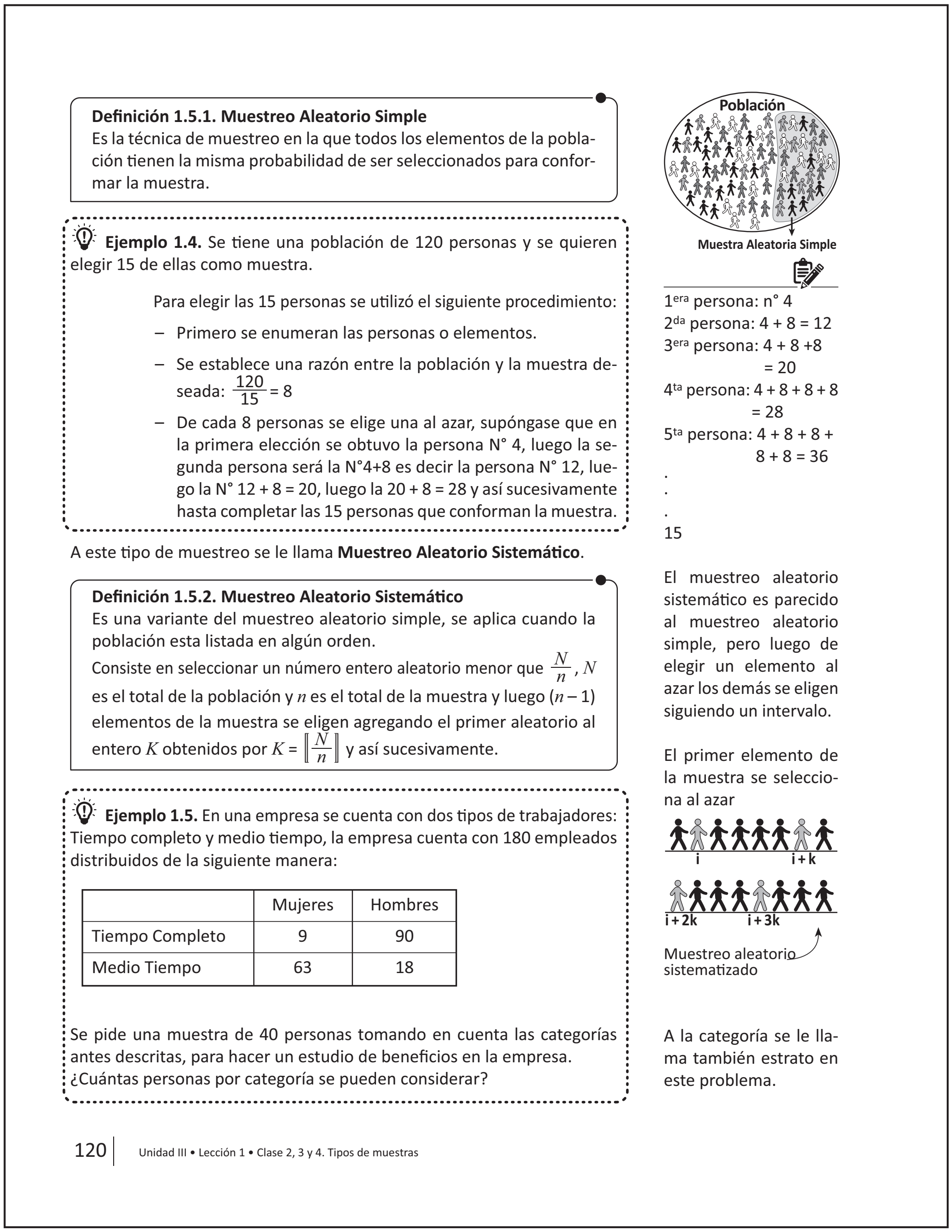
Definición 1.5.2
(3 min) observan el diagrama presentado en él LE.

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 1.5
(10 min)
*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedirle a los estudiantes que propongan formas de cómo pueden seleccionar la muestra.

Observan en LE la forma de seleccionar la muestra y concluyen que a ese tipo de muestreo se le conoce como muestreo estratificado.



Definición 1.5.1. Muestreo Aleatorio Simple
Es la técnica de muestreo en la que todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser seleccionados para conformar la muestra.

Ejemplo 1.4. Se tiene una población de 120 personas y se quieren elegir 15 de ellas como muestra.

Para elegir las 15 personas se utilizó el siguiente procedimiento:

- Primero se enumeran las personas o elementos.
- Se establece una razón entre la población y la muestra deseada: $\frac{120}{15} = 8$
- De cada 8 personas se elige una al azar, supóngase que en la primera elección se obtuvo la persona N° 4, luego la segunda persona será la N°4+8 es decir la persona N° 12, luego la N° 12 + 8 = 20, luego la 20 + 8 = 28 y así sucesivamente hasta completar las 15 personas que conforman la muestra.

A este tipo de muestreo se le llama **Muestreo Aleatorio Sistemático**.

Definición 1.5.2. Muestreo Aleatorio Sistemático
Es una variante del muestreo aleatorio simple, se aplica cuando la población esta listada en algún orden.
Consiste en seleccionar un número entero aleatorio menor que $\frac{N}{n}$, N es el total de la población y n es el total de la muestra y luego $(n-1)$ elementos de la muestra se eligen agregando el primer aleatorio al entero K obtenidos por $K = [\![\frac{N}{n}]\!]$ y así sucesivamente.

Ejemplo 1.5. En una empresa se cuenta con dos tipos de trabajadores: Tiempo completo y medio tiempo, la empresa cuenta con 180 empleados distribuidos de la siguiente manera:

	Mujeres	Hombres
Tiempo Completo	9	90
Medio Tiempo	63	18

Se pide una muestra de 40 personas tomando en cuenta las categorías antes descritas, para hacer un estudio de beneficios en la empresa. ¿Cuántas personas por categoría se pueden considerar?

1^{era} persona: n° 4
2^{da} persona: 4 + 8 = 12
3^{era} persona: 4 + 8 +8 = 20
4^{ta} persona: 4 + 8 + 8 + 8 = 28
5^{ta} persona: 4 + 8 + 8 + 8 + 8 = 36
.
.
.
15

El muestreo aleatorio sistemático es parecido al muestreo aleatorio simple, pero luego de elegir un elemento al azar los demás se eligen siguiendo un intervalo.

El primer elemento de la muestra se selecciona al azar

Muestreo aleatorio sistematizado

A la categoría se le llama también estrato en este problema.

120 Unidad III • Lección 1 • Clase 2, 3 y 4. Tipos de muestras

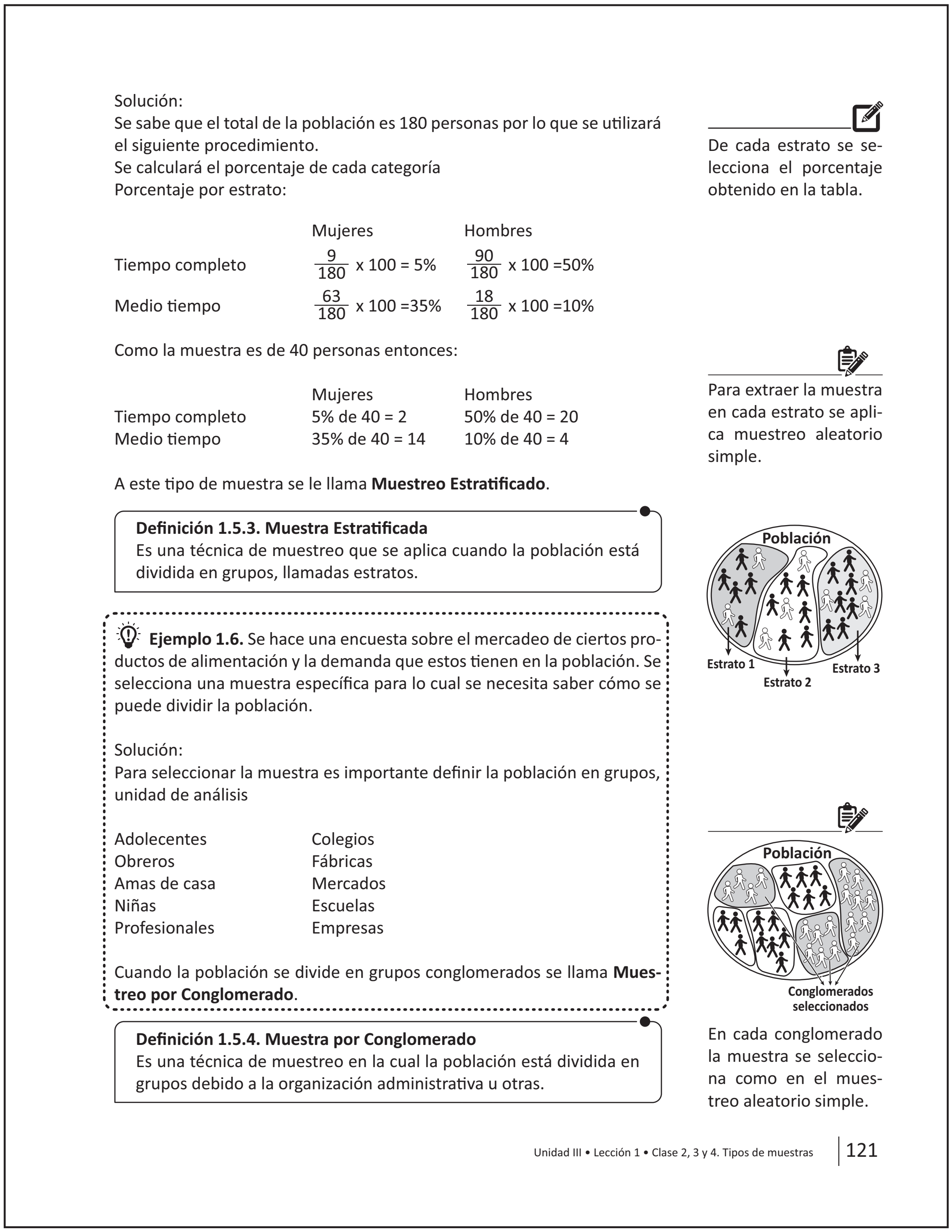
Concluye en la forma de cómo se debe seleccionar una muestra estratificada.

Objetivo: **[A]** Clasifican las muestras probabilísticas y no probabilísticas.
[B] Definen las características de las muestras probabilísticas.

Clase 2, 3 y 4

(Continúa en la siguiente página)

Evaluación: Ejercicio 1.2



Solución:
Se sabe que el total de la población es 180 personas por lo que se utilizará el siguiente procedimiento.
Se calculará el porcentaje de cada categoría
Porcentaje por estrato:

	Mujeres	Hombres
Tiempo completo	$\frac{9}{180}$ x 100 = 5%	$\frac{90}{180}$ x 100 =50%
Medio tiempo	$\frac{63}{180}$ x 100 =35%	$\frac{18}{180}$ x 100 =10%

Como la muestra es de 40 personas entonces:

	Mujeres	Hombres
Tiempo completo	5% de 40 = 2	50% de 40 = 20
Medio tiempo	35% de 40 = 14	10% de 40 = 4

A este tipo de muestra se le llama **Muestreo Estratificado**.

De cada estrato se selecciona el porcentaje obtenido en la tabla.

Para extraer la muestra en cada estrato se aplica muestreo aleatorio simple.

Definición 1.5.3. Muestra Estratificada
Es una técnica de muestreo que se aplica cuando la población está dividida en grupos, llamadas estratos.

Ejemplo 1.6. Se hace una encuesta sobre el mercadeo de ciertos productos de alimentación y la demanda que estos tienen en la población. Se selecciona una muestra específica para lo cual se necesita saber cómo se puede dividir la población.

Solución:
Para seleccionar la muestra es importante definir la población en grupos, unidad de análisis

Adolecentes	Colegios
Obreros	Fábricas
Amas de casa	Mercados
Niñas	Escuelas
Profesionales	Empresas

Cuando la población se divide en grupos conglomerados se llama **Muestreo por Conglomerado**.

En cada conglomerado la muestra se selecciona como en el muestreo aleatorio simple.

Definición 1.5.4. Muestra por Conglomerado
Es una técnica de muestreo en la cual la población está dividida en grupos debido a la organización administrativa u otras.

Unidad III • Lección 1 • Clase 2, 3 y 4. Tipos de muestras | 121

Definición 1.5.3
(5 min)
Observan el diagrama de muestreo estratificado en LE.

*Hacer notar al estudiante que para extraer la muestra en cada estrato se aplica muestreo aleatorio simple.

Ejemplo 1.6
(10 min)
Presentar el ejemplo en la pizarra y pedirle a los estudiantes que propongan formas de cómo pueden seleccionar la muestra.

Observan en LE la forma de seleccionar la muestra y concluyen que a ese tipo de muestreo se le conoce como muestreo por conglomerado.

Definición 1.5.4
(5 min)
Observar el diagrama de muestreo por conglomerado.
M: ¿Cuál es la diferencia de la muestra por conglomerado y muestra estratificada?

RP: En la muestra por estratos se divide en grupos sin importar la categoría y en el muestreo por conglomerado la población se divide en grupos por categorías.

Clase 2, 3 y 4
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[C]** Definen las características de muestras no probabilísticas.

Evaluación: Ejercicio 1.2

Ejercicio 1.2
(15 min) Soluciones:
a) Muestreo aleatorio simple.
b) Muestreo estratificado.
c) Muestreo estratificado.
d) Muestreo por conglomerado.

[Hasta aquí Clase 3]

[Desde aquí Clase 4]

[C]

Definición 1.6
(5 min)

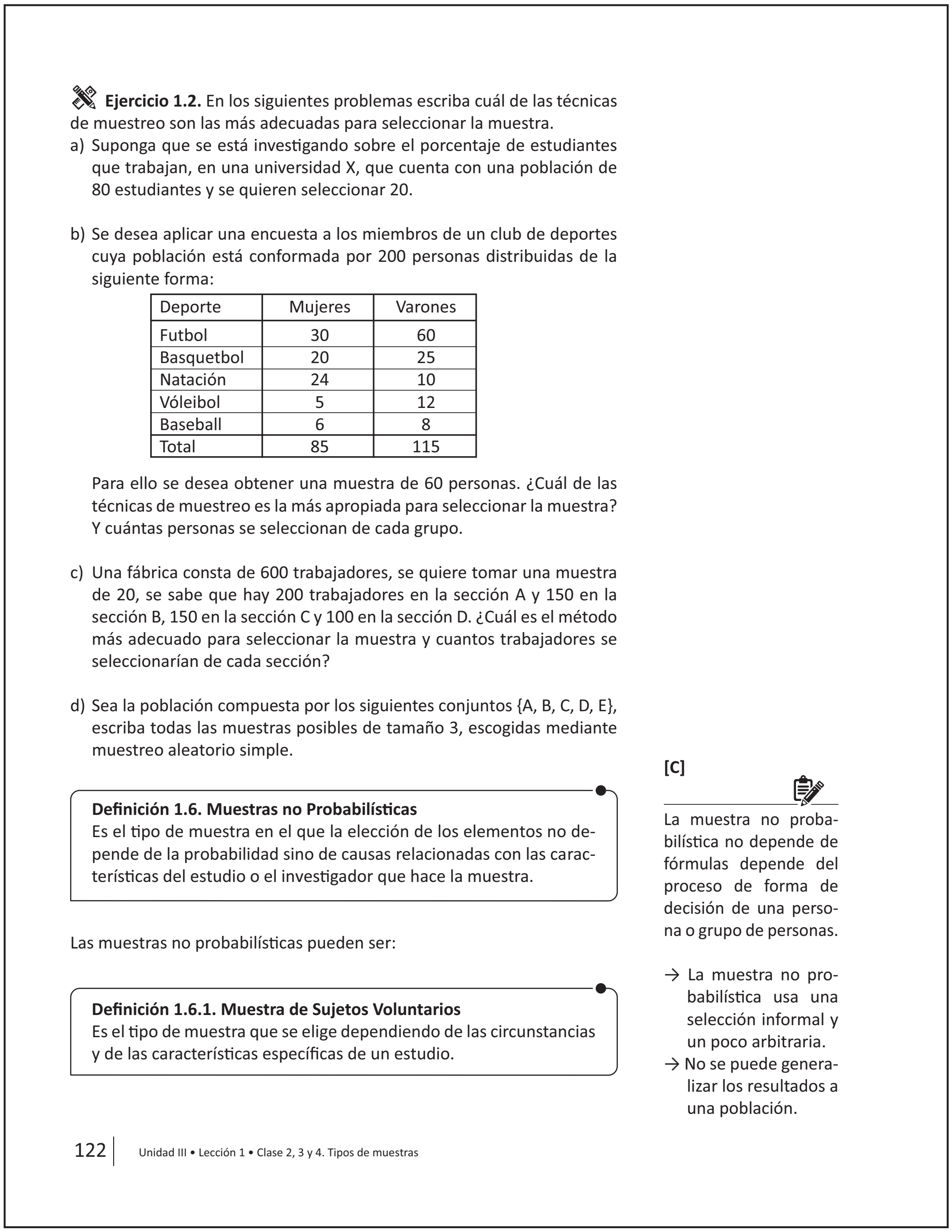
M: ¿Qué significa que una muestra sea no probabilística?

RP: Que se selecciona sin usar fórmulas estadísticas.

Concluye en la definición de muestreo no probabilística.

*Es importante explicar cuáles son las características de una muestra no probabilística y qué ventajas tiene.

*Clasifican la muestra no probabilística



Ejercicio 1.2. En los siguientes problemas escriba cuál de las técnicas de muestreo son las más adecuadas para seleccionar la muestra.

a) Suponga que se está investigando sobre el porcentaje de estudiantes que trabajan, en una universidad X, que cuenta con una población de 80 estudiantes y se quieren seleccionar 20.

b) Se desea aplicar una encuesta a los miembros de un club de deportes cuya población está conformada por 200 personas distribuidas de la siguiente forma:

Deporte	Mujeres	Varones
Futbol	30	60
Basquetbol	20	25
Natación	24	10
Vóleibol	5	12
Baseball	6	8
Total	85	115

Para ello se desea obtener una muestra de 60 personas. ¿Cuál de las técnicas de muestreo es la más apropiada para seleccionar la muestra? Y cuántas personas se seleccionan de cada grupo.

c) Una fábrica consta de 600 trabajadores, se quiere tomar una muestra de 20, se sabe que hay 200 trabajadores en la sección A y 150 en la sección B, 150 en la sección C y 100 en la sección D. ¿Cuál es el método más adecuado para seleccionar la muestra y cuantos trabajadores se seleccionarían de cada sección?

d) Sea la población compuesta por los siguientes conjuntos {A, B, C, D, E}, escriba todas las muestras posibles de tamaño 3, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.

Definición 1.6. Muestras no Probabilísticas
Es el tipo de muestra en el que la elección de los elementos no depende de la probabilidad sino de causas relacionadas con las características del estudio o el investigador que hace la muestra.

Las muestras no probabilísticas pueden ser:

Definición 1.6.1. Muestra de Sujetos Voluntarios
Es el tipo de muestra que se elige dependiendo de las circunstancias y de las características específicas de un estudio.

[C]

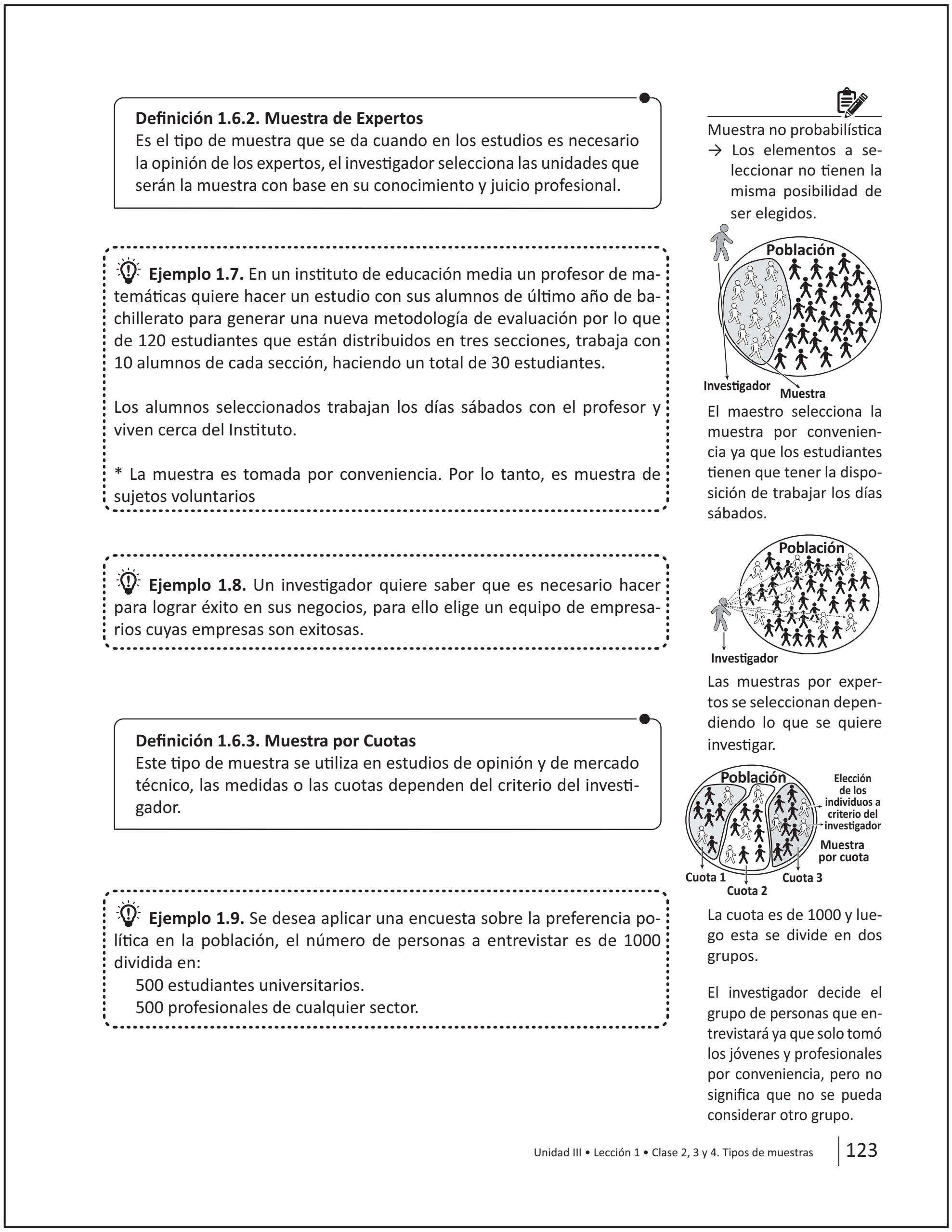
La muestra no probabilística no depende de fórmulas depende del proceso de forma de decisión de una persona o grupo de personas.

→ La muestra no probabilística usa una selección informal y un poco arbitraria.
→ No se puede generalizar los resultados a una población.

Definición 1.6.1
(5 min)

*Proponen ejemplos de situaciones en donde se puede aplicar este tipo de muestreo.

(Continúa en la siguiente página)



Definición 1.6.2. Muestra de Expertos
Es el tipo de muestra que se da cuando en los estudios es necesario la opinión de los expertos, el investigador selecciona las unidades que serán la muestra con base en su conocimiento y juicio profesional.

Muestra no probabilística
→ Los elementos a seleccionar no tienen la misma posibilidad de ser elegidos.

Ejemplo 1.7. En un instituto de educación media un profesor de matemáticas quiere hacer un estudio con sus alumnos de último año de bachillerato para generar una nueva metodología de evaluación por lo que de 120 estudiantes que están distribuidos en tres secciones, trabaja con 10 alumnos de cada sección, haciendo un total de 30 estudiantes.

Los alumnos seleccionados trabajan los días sábados con el profesor y viven cerca del Instituto.

* La muestra es tomada por conveniencia. Por lo tanto, es muestra de sujetos voluntarios

El maestro selecciona la muestra por conveniencia ya que los estudiantes tienen que tener la disposición de trabajar los días sábados.

Ejemplo 1.8. Un investigador quiere saber que es necesario hacer para lograr éxito en sus negocios, para ello elige un equipo de empresarios cuyas empresas son exitosas.

Las muestras por expertos se seleccionan dependiendo lo que se quiere investigar.

Definición 1.6.3. Muestra por Cuotas
Este tipo de muestra se utiliza en estudios de opinión y de mercado técnico, las medidas o las cuotas dependen del criterio del investigador.

Ejemplo 1.9. Se desea aplicar una encuesta sobre la preferencia política en la población, el número de personas a entrevistar es de 1000 dividida en:
500 estudiantes universitarios.
500 profesionales de cualquier sector.

La cuota es de 1000 y luego esta se divide en dos grupos.

El investigador decide el grupo de personas que entrevistará ya que solo tomó los jóvenes y profesionales por conveniencia, pero no significa que no se pueda considerar otro grupo.

Unidad III • Lección 1 • Clase 2, 3 y 4. Tipos de muestras 123

Ejemplo1.7

(10 min)
*Presentar el ejemplo en la pizarra y permitir que los estudiantes propongan soluciones y analicen como se seleccionará la muestra, qué criterios se deben tomar en cuenta para ello.

Concluye que la muestra es por conveniencia ya que la muestra debe reunir ciertas características para el estudio.

Definición 1.6.2
(5 min)
Determinan las características del muestreo por expertos.
*Mencionan ejemplos de estudios en el cual se puede utilizar este muestreo.

Ejemplo 1.8

(10 min)
Discuten las características del ejemplo y porque se usa el muestreo por expertos.

Definición 1.6.3
(5 min)
Es importante hacer énfasis en las características de los tipos de muestra para poder determinar y seleccionar la ideal en un estudio.

Ejemplo 1.9

(5 min)
Mencionan las características del ejemplo y porque se usa el muestreo por cuotas.

Unidad III. Lección 1.

Clase 5 y 6

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Definen Organizan datos estadísticos mediante tablas de frecuencias.

Evaluación: Ejercicio 1.3

[A]

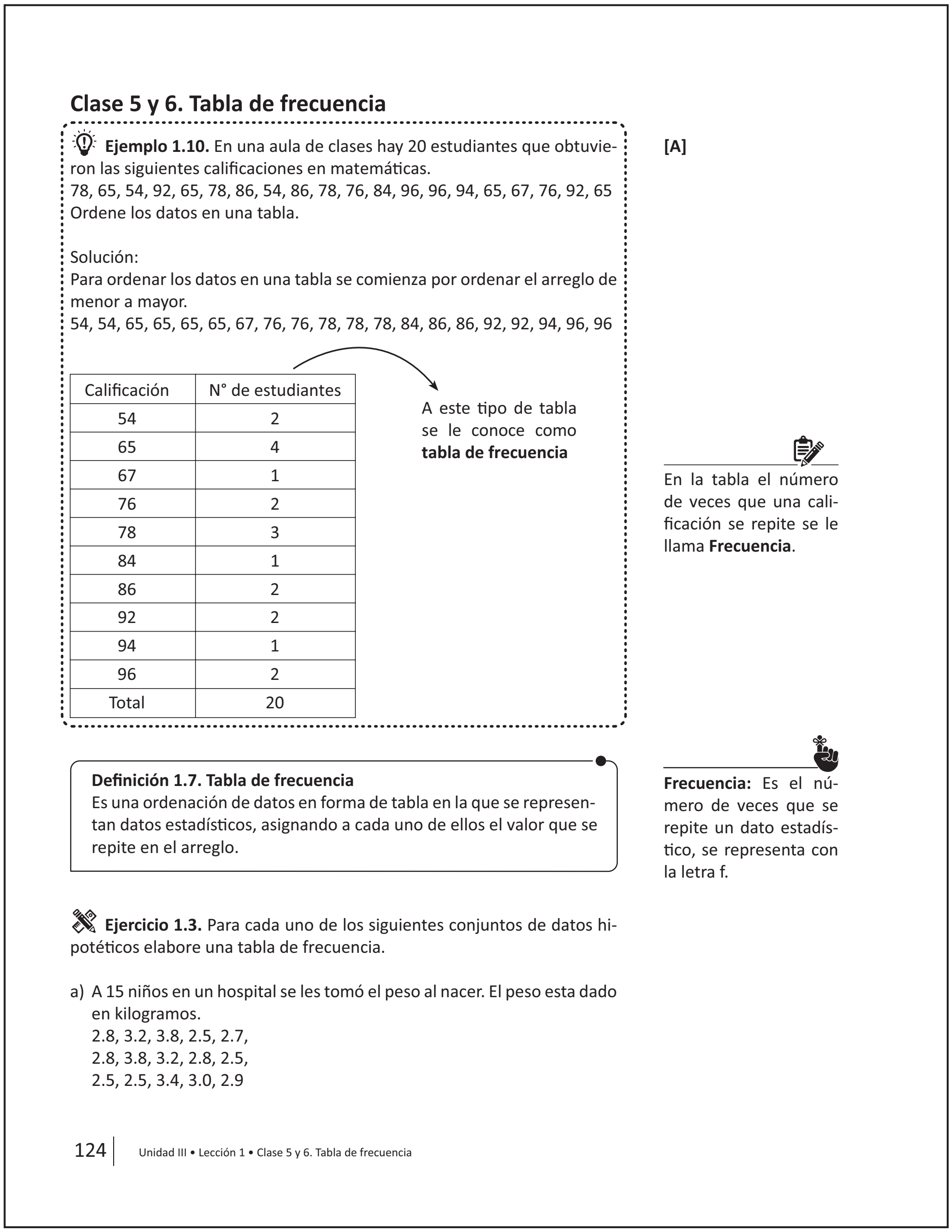
Ejemplo 1.10
(15 min)
Presentar el ejemplo en la pizarra.
M: Ordenen los datos de menor a mayor.
¿Que observan en los datos?
Hay algunos datos que se repiten.
Ordenen los datos en una tabla donde aparecen las calificaciones y cuantos estudiantes obtuvieron dicha calificación.

Concluye que a la tabla se le conoce como tabla de frecuencias
M: ¿Qué es frecuencia?
RP Es el número de veces que se repite un dato.

Definición 1.7
(5 min)

Ejercicio 1.3.
(20 min) Solución:
a)

Peso (kg)	N° de recién nacidos
2.5	4
2.7	1
2.8	3
2.9	1
3.0	1
3.2	2
3.4	1
3.8	2
Total	15



Clase 5 y 6. Tabla de frecuencia

Ejemplo 1.10. En una aula de clases hay 20 estudiantes que obtuvieron las siguientes calificaciones en matemáticas.
78, 65, 54, 92, 65, 78, 86, 54, 86, 78, 76, 84, 96, 96, 94, 65, 67, 76, 92, 65
Ordene los datos en una tabla.

Solución:
Para ordenar los datos en una tabla se comienza por ordenar el arreglo de menor a mayor.
54, 54, 65, 65, 65, 65, 67, 76, 76, 78, 78, 78, 84, 86, 86, 92, 92, 94, 96, 96

Calificación	N° de estudiantes
54	2
65	4
67	1
76	2
78	3
84	1
86	2
92	2
94	1
96	2
Total	20

A este tipo de tabla se le conoce como **tabla de frecuencia**

[A]

En la tabla el número de veces que una calificación se repite se le llama **Frecuencia**.

Definición 1.7. Tabla de frecuencia
Es una ordenación de datos en forma de tabla en la que se representan datos estadísticos, asignando a cada uno de ellos el valor que se repite en el arreglo.

Frecuencia: Es el número de veces que se repite un dato estadístico, se representa con la letra f.

Ejercicio 1.3. Para cada uno de los siguientes conjuntos de datos hipotéticos elabore una tabla de frecuencia.

a) A 15 niños en un hospital se les tomó el peso al nacer. El peso esta dado en kilogramos.
2.8, 3.2, 3.8, 2.5, 2.7,
2.8, 3.8, 3.2, 2.8, 2.5,
2.5, 2.5, 3.4, 3.0, 2.9

124 Unidad III • Lección 1 • Clase 5 y 6. Tabla de frecuencia

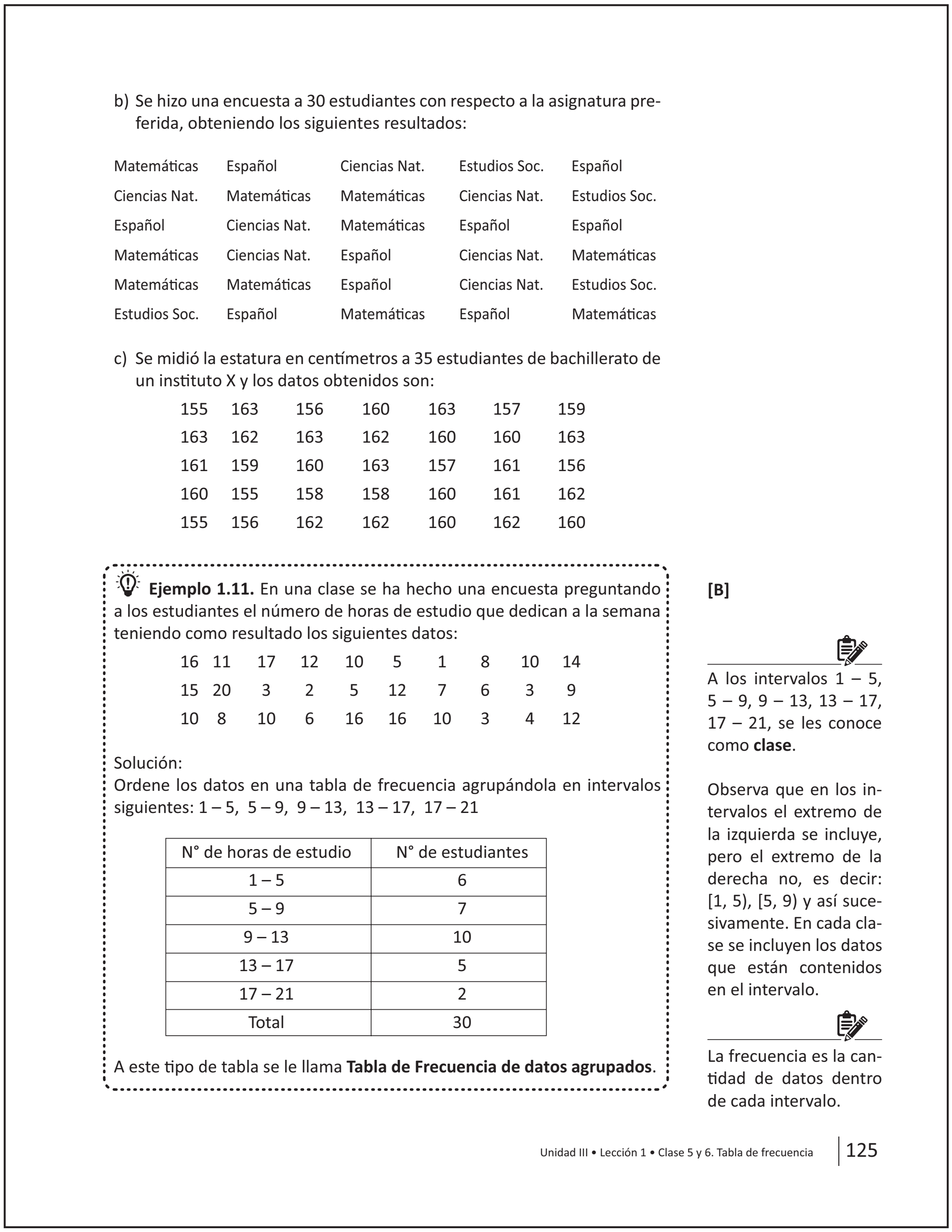
Objetivo: **[B]** Organizan datos estadísticos mediante tabla de frecuencia de datos agrupados.

Evaluación: Ejercicio 1.4

Clase 5 y 6

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



b) Se hizo una encuesta a 30 estudiantes con respecto a la asignatura preferida, obteniendo los siguientes resultados:

Matemáticas	Español	Ciencias Nat.	Estudios Soc.	Español
Ciencias Nat.	Matemáticas	Matemáticas	Ciencias Nat.	Estudios Soc.
Español	Ciencias Nat.	Matemáticas	Español	Español
Matemáticas	Ciencias Nat.	Español	Ciencias Nat.	Matemáticas
Matemáticas	Matemáticas	Español	Ciencias Nat.	Estudios Soc.
Estudios Soc.	Español	Matemáticas	Español	Matemáticas

c) Se midió la estatura en centímetros a 35 estudiantes de bachillerato de un instituto X y los datos obtenidos son:

155	163	156	160	163	157	159
163	162	163	162	160	160	163
161	159	160	163	157	161	156
160	155	158	158	160	161	162
155	156	162	162	160	162	160

Ejemplo 1.11. En una clase se ha hecho una encuesta preguntando a los estudiantes el número de horas de estudio que dedican a la semana teniendo como resultado los siguientes datos:

16	11	17	12	10	5	1	8	10	14
15	20	3	2	5	12	7	6	3	9
10	8	10	6	16	16	10	3	4	12

Solución:
Ordene los datos en una tabla de frecuencia agrupándola en intervalos siguientes: 1 – 5, 5 – 9, 9 – 13, 13 – 17, 17 – 21

N° de horas de estudio	N° de estudiantes
1 – 5	6
5 – 9	7
9 – 13	10
13 – 17	5
17 – 21	2
Total	30

A este tipo de tabla se le llama **Tabla de Frecuencia de datos agrupados**.

[B]

A los intervalos 1 – 5, 5 – 9, 9 – 13, 13 – 17, 17 – 21, se les conoce como **clase**.

Observa que en los intervalos el extremo de la izquierda se incluye, pero el extremo de la derecha no, es decir: [1, 5), [5, 9) y así sucesivamente. En cada clase se incluyen los datos que están contenidos en el intervalo.

La frecuencia es la cantidad de datos dentro de cada intervalo.

b)

Asignatura	N° de estudiantes
Matemáticas	10
Español	9
Ciencias N.	7
Estudios S.	4
Total	30

c)

Estatura (cm)	N° de estudiantes
155	3
156	3
157	2
158	2
159	2
160	8
161	3
162	6
163	6
Total	35

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

Ejemplo 1.11

(20 min)

*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedirle a los estudiantes que propongan ideas de como ordenar estos datos.

*Hacer que se den cuenta que no es funcional ordenar los datos en una tabla de frecuencia tomando todos los valores, ya que sería muy grande.

Concluye que para ordenar estos datos se utilizan intervalos las cuales se les llama **clase**.

*Hacen la tabla de frecuencia y la nombran tabla de frecuencias de datos agrupados.

*Es importante hacer notar al estudiante que en algunas tablas de frecuencias de datos agrupados se toma intervalos o clases en las que no se incluye el extremo superior, sin embargo, hay tablas que si lo incluyen.

Unidad III. Lección 1.

Clase 5 y 6

(Continuación)

Clase 7

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Representan datos estadísticos mediante histogramas de frecuencia.

Evaluación: Ejercicio 1.5

Ejercicio 1.4

(25 min) Soluciones:

a)

N° de días	N° de personas
6 – 8	2
8 – 10	3
10 – 12	2
12 – 14	4
14 –16	5
16 – 18	1
18 – 20	2
20 – 22	1
Total	20

b) Solución en pág. 150

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Ejemplo 1.12

(15 min)

Utilizando los datos de Ejemplo. 1.11 Trazar un histograma de frecuencias.

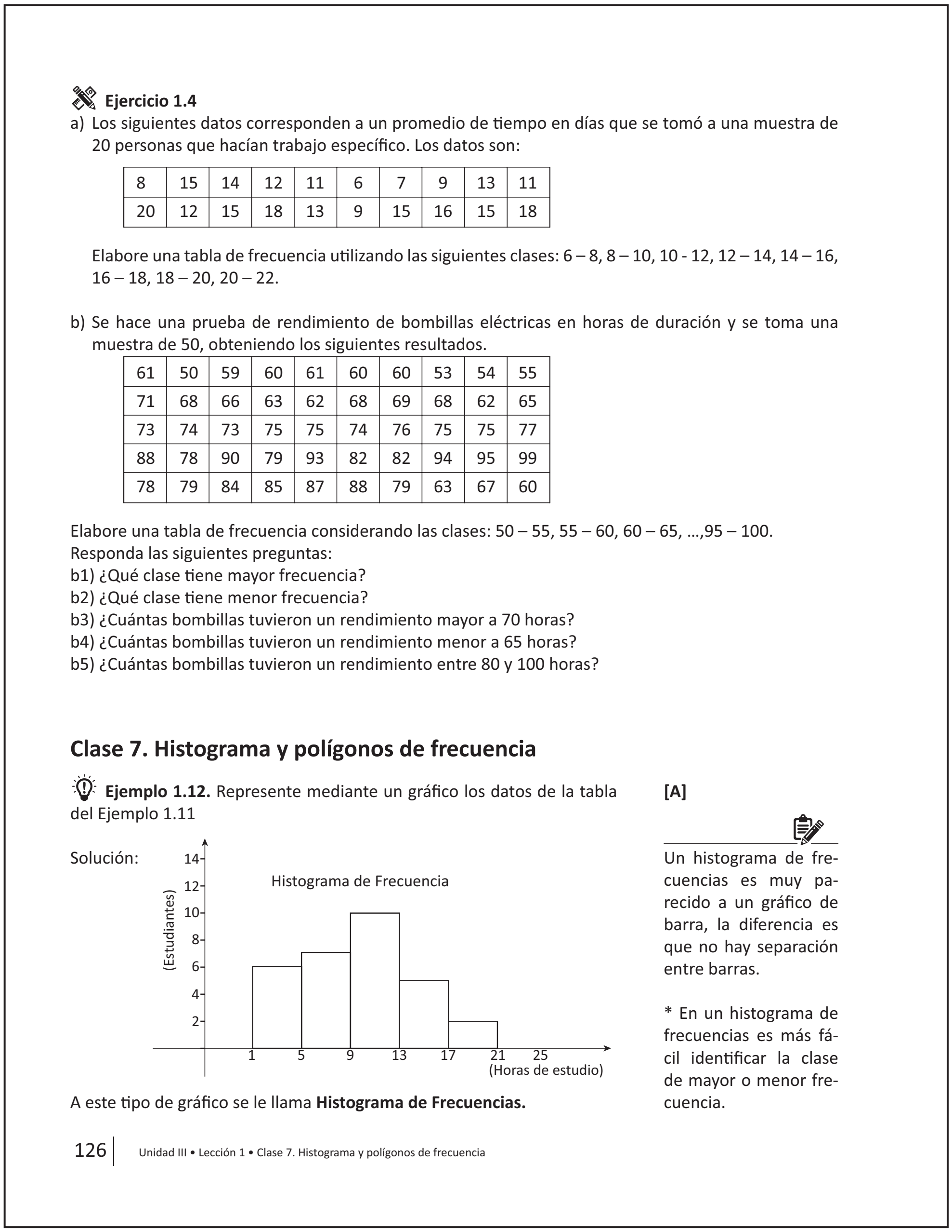
*El docente debe dar todas las orientaciones necesarias para hacer el gráfico y definir las partes del gráfico.

M: ¿Qué datos se ubican en el eje x?

RP: Las clase

M: ¿Qué datos se ubica en el eje y?

RP: La frecuencia



Ejercicio 1.4

a) Los siguientes datos corresponden a un promedio de tiempo en días que se tomó a una muestra de 20 personas que hacían trabajo específico. Los datos son:

8	15	14	12	11	6	7	9	13	11
20	12	15	18	13	9	15	16	15	18

Elabore una tabla de frecuencia utilizando las siguientes clases: 6 – 8, 8 – 10, 10 - 12, 12 – 14, 14 – 16, 16 – 18, 18 – 20, 20 – 22.

b) Se hace una prueba de rendimiento de bombillas eléctricas en horas de duración y se toma una muestra de 50, obteniendo los siguientes resultados.

61	50	59	60	61	60	60	53	54	55
71	68	66	63	62	68	69	68	62	65
73	74	73	75	75	74	76	75	75	77
88	78	90	79	93	82	82	94	95	99
78	79	84	85	87	88	79	63	67	60

Elabore una tabla de frecuencia considerando las clases: 50 – 55, 55 – 60, 60 – 65, …,95 – 100.

Responda las siguientes preguntas:

b1) ¿Qué clase tiene mayor frecuencia?

b2) ¿Qué clase tiene menor frecuencia?

b3) ¿Cuántas bombillas tuvieron un rendimiento mayor a 70 horas?

b4) ¿Cuántas bombillas tuvieron un rendimiento menor a 65 horas?

b5) ¿Cuántas bombillas tuvieron un rendimiento entre 80 y 100 horas?

Clase 7. Histograma y polígonos de frecuencia

Ejemplo 1.12. Represente mediante un gráfico los datos de la tabla del Ejemplo 1.11

[A]

Solución:

A este tipo de gráfico se le llama **Histograma de Frecuencias.**

Un histograma de frecuencias es muy parecido a un gráfico de barra, la diferencia es que no hay separación entre barras.

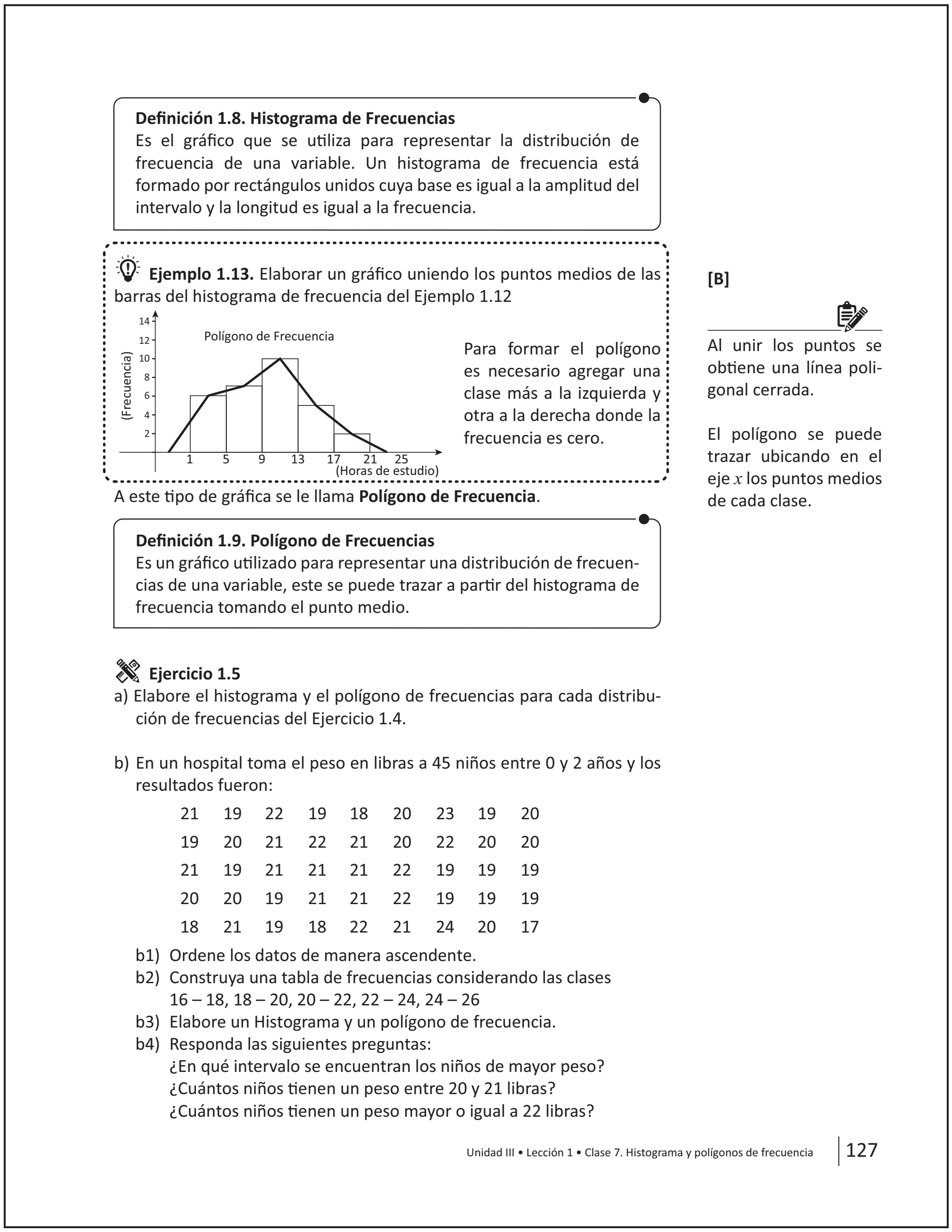
* En un histograma de frecuencias es más fácil identificar la clase de mayor o menor frecuencia.

126 Unidad III • Lección 1 • Clase 7. Histograma y polígonos de frecuencia

Objetivo: **[B]** Representan datos estadísticos mediante polígonos de frecuencia.

Clase 7
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 1.5



Definición 1.8. Histograma de Frecuencias
Es el gráfico que se utiliza para representar la distribución de frecuencia de una variable. Un histograma de frecuencia está formado por rectángulos unidos cuya base es igual a la amplitud del intervalo y la longitud es igual a la frecuencia.

Ejemplo 1.13. Elaborar un gráfico uniendo los puntos medios de las barras del histograma de frecuencia del Ejemplo 1.12

Para formar el polígono es necesario agregar una clase más a la izquierda y otra a la derecha donde la frecuencia es cero.

A este tipo de gráfica se le llama **Polígono de Frecuencia**.

Definición 1.9. Polígono de Frecuencias
Es un gráfico utilizado para representar una distribución de frecuencias de una variable, este se puede trazar a partir del histograma de frecuencia tomando el punto medio.

Ejercicio 1.5

a) Elabore el histograma y el polígono de frecuencias para cada distribución de frecuencias del Ejercicio 1.4.

b) En un hospital toma el peso en libras a 45 niños entre 0 y 2 años y los resultados fueron:

21	19	22	19	18	20	23	19	20
19	20	21	22	21	20	22	20	20
21	19	21	21	21	22	19	19	19
20	20	19	21	21	22	19	19	19
18	21	19	18	22	21	24	20	17

- b1) Ordene los datos de manera ascendente.
- b2) Construya una tabla de frecuencias considerando las clases 16 – 18, 18 – 20, 20 – 22, 22 – 24, 24 – 26
- b3) Elabore un Histograma y un polígono de frecuencia.
- b4) Responda las siguientes preguntas:
  - ¿En qué intervalo se encuentran los niños de mayor peso?
  - ¿Cuántos niños tienen un peso entre 20 y 21 libras?
  - ¿Cuántos niños tienen un peso mayor o igual a 22 libras?

[B]

Al unir los puntos se obtiene una línea poligonal cerrada.

El polígono se puede trazar ubicando en el eje x los puntos medios de cada clase.

Unidad III • Lección 1 • Clase 7. Histograma y polígonos de frecuencia | 127

Definición 1.9
(3 min)

Ejercicio 1.5
(14 min)
Solución en la pág. 150 y 151.

Definición 1.8
(3 min)

Ejemplo 1.13
(10 min)
Tomando como base el gráfico anterior del histograma de frecuencias trazar el polígono de frecuencias.

M: ¿Qué se forma si se unen los puntos medios de las barras del histograma de frecuencia?
RP: Parece un polígono.
M: Para formar un polígono se debe ubicar una clase anterior a la primera y otra al final cuya frecuencia sea cero, para poder cerrar la figura y se convierta en un polígono.
Concluye: A este tipo de gráfico se le conoce como polígono de frecuencia.
M: ¿Qué datos se ubican en el eje x en un polígono de frecuencia?
RP: El punto medio de las clases.
M: ¿Qué ventajas tiene representar datos en un polígono de frecuencia?
RP: Se pueden visualizar e interpretar de mejor manera los datos, se pueden obtener fácilmente las clases con mayor o menor frecuencia.

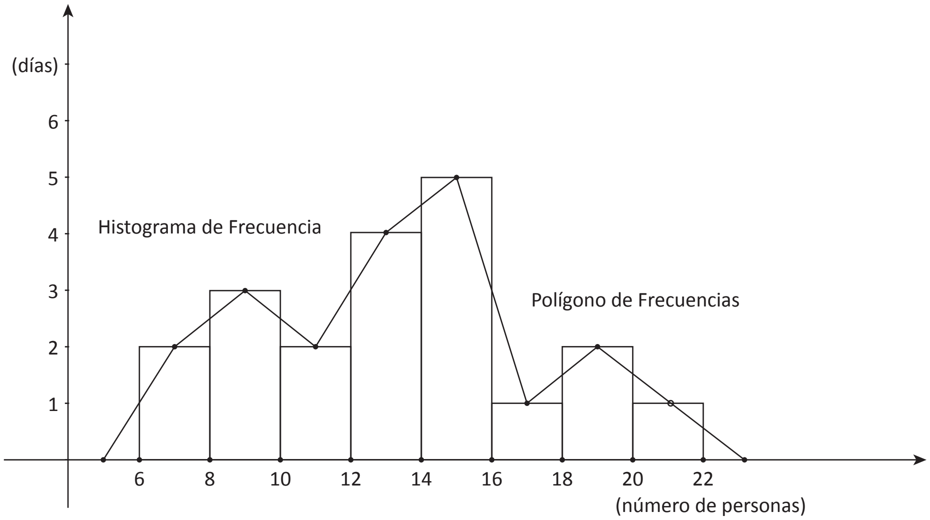
Solución Ejercicio 1.4. **Inciso b)** Pág. 148

N° de horas	N° de bombillas
50 – 55	3
55 – 60	2
60 – 65	10
65 – 70	7
70 – 75	5
75 – 80	11
80 – 85	3
85 – 90	4
90 – 95	3
95 – 100	2
Total	50

b1) R: 75 – 80
b2) R: 55 – 60 y 95 – 100
b3) R: 28 bombillas
b4) R: 15 bombillas
b5) R: 12 bombillas

Solución Ejercicio 1.5. Pág. 149

a)



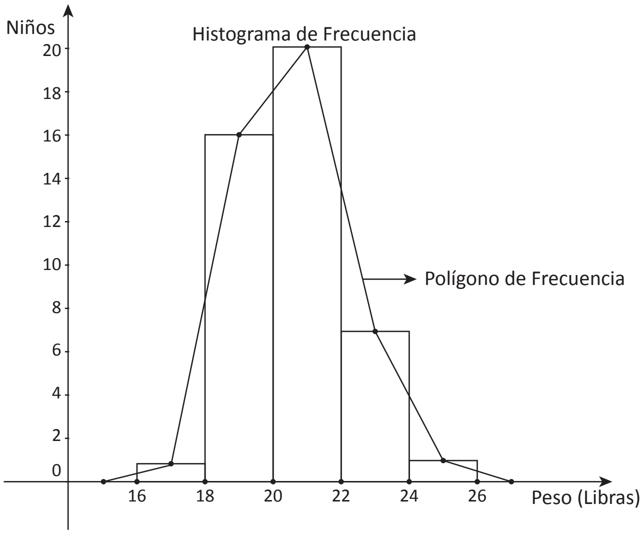
Solución Ejercicio 1.5. Inciso b) Pág. 149

b1) Forma ascendente: 17 18 18 18 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 20 20 20 20 20 20 20 20 20 21 21 21 21 21 21 21 21 21 21 21 22 22 22 22 22 22 23 24.

b2)

Peso (lbs)	N° de niños
16 – 18	1
18 – 20	16
20 – 22	20
22 – 24	7
24 – 26	1
Total	45

b2)



b4) 24 – 26 Intervalo donde se encuentran los niños con mayor peso.
20 niños tienen peso entre 20 y 21 libras, 8 niños tienen un peso igual o mayor a 22 libras.

Unidad III. Lección 2.

Clase 1 y 2

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calculan la media para un conjunto de datos agrupados.

Evaluación: Ejercicio 2.1

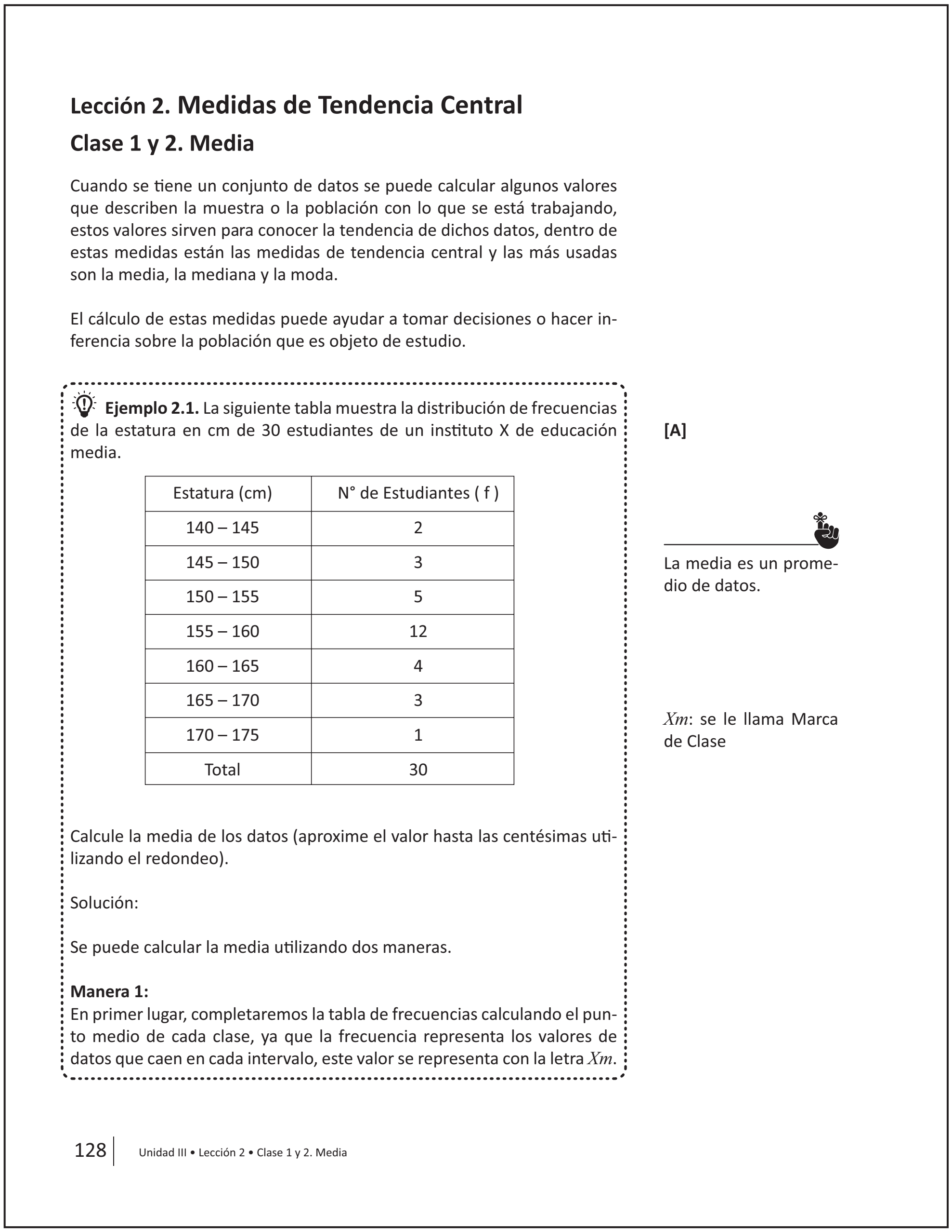
(10 min)
En octavo grado se estudió las medidas de tendencia central. M: ¿Cuáles son las medidas de tendencia central que conocen?
RP: Media, mediana y moda.
M: ¿Para qué se utilizan las medidas de tendencia central?
RP: Para comparar distribuciones de datos.
M: ¿Qué es la media?
RP: Es un promedio.
M: ¿Cómo se calcula la media?
RP: Se suman todos los datos y se divide entre el número total.
*El docente puede poner un ejercicio de repaso de calcular la media de datos no agrupados.

[A]

Ejemplo 2.1
(20 min)
Proponer en la pizarra el ejemplo y solicitar a los estudiantes ideas de cómo se puede calcular la media de los datos.
M: Hay dos maneras de obtener la media.
Manera 1
Calculan los puntos medios de las clases.
M: A esos puntos medios se les llama marca de clase y se simboliza con Xm. Luego se multiplica la frecuencia por Xm y se suman todos los valores de $f(Xm)$ y se dividen por el total de f.

*La manera 1 es la más común en la mayoría de los textos de estadística, sin embargo, se debe mostrar otra manera para ayudar a una mejor comprensión.

* Explicar a los alumnos el significado de la media en un grupo de datos.



Lección 2. Medidas de Tendencia Central

Clase 1 y 2. Media

Cuando se tiene un conjunto de datos se puede calcular algunos valores que describen la muestra o la población con lo que se está trabajando, estos valores sirven para conocer la tendencia de dichos datos, dentro de estas medidas están las medidas de tendencia central y las más usadas son la media, la mediana y la moda.

El cálculo de estas medidas puede ayudar a tomar decisiones o hacer inferencia sobre la población que es objeto de estudio.

Ejemplo 2.1. La siguiente tabla muestra la distribución de frecuencias de la estatura en cm de 30 estudiantes de un instituto X de educación media.

Estatura (cm)	N° de Estudiantes (f)
140 – 145	2
145 – 150	3
150 – 155	5
155 – 160	12
160 – 165	4
165 – 170	3
170 – 175	1
Total	30

Calcule la media de los datos (aproxime el valor hasta las centésimas utilizando el redondeo).

Solución:

Se puede calcular la media utilizando dos maneras.

Manera 1:
En primer lugar, completaremos la tabla de frecuencias calculando el punto medio de cada clase, ya que la frecuencia representa los valores de datos que caen en cada intervalo, este valor se representa con la letra Xm.

[A]

La media es un promedio de datos.

Xm: se le llama Marca de Clase

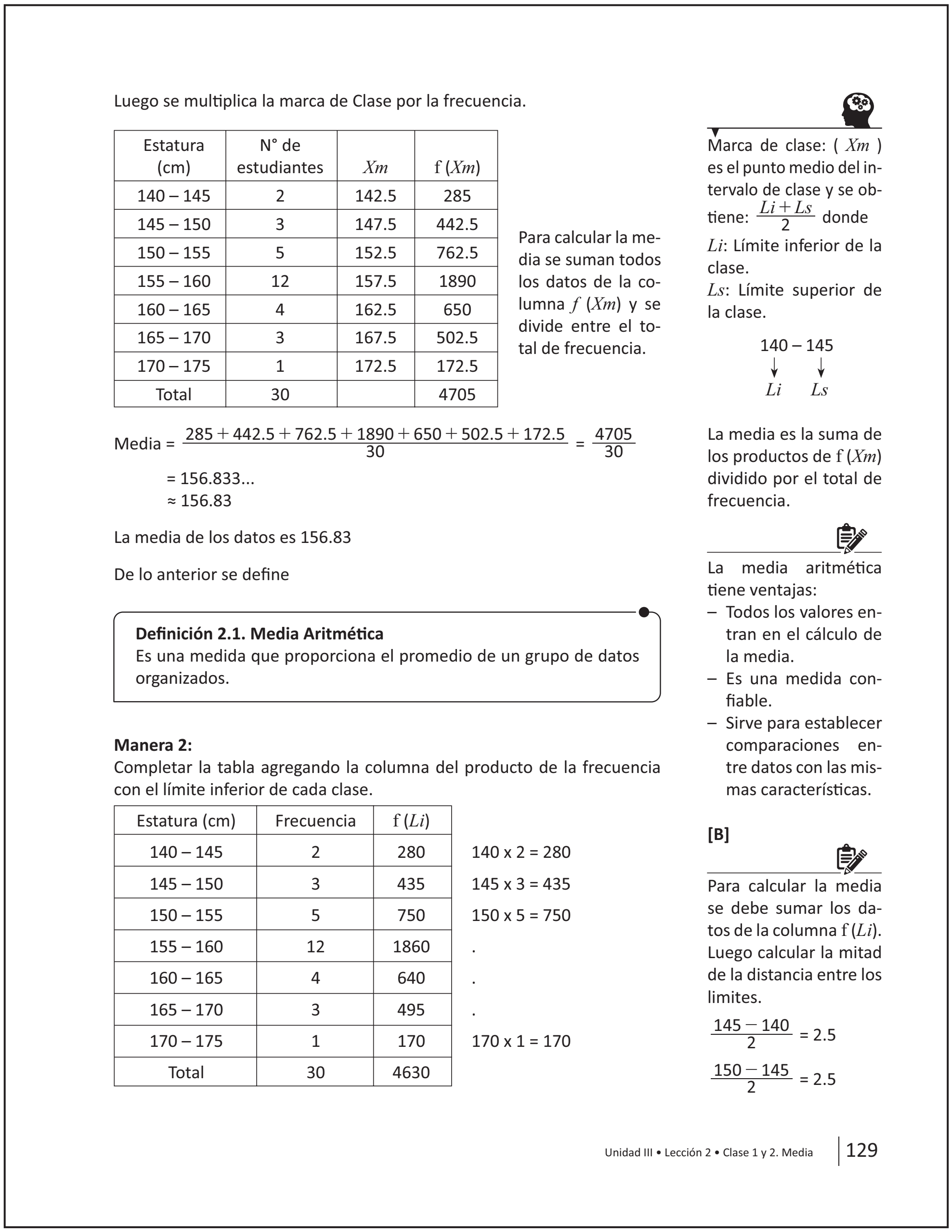
Objetivo: **[B]** Calculan la media de datos agrupados usando otro método diferente al tradicional.

Evaluación: Ejercicio 2.1

Clase 1 y 2

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Luego se multiplica la marca de Clase por la frecuencia.

Estatura (cm)	N° de estudiantes	Xm	f (Xm)
140 – 145	2	142.5	285
145 – 150	3	147.5	442.5
150 – 155	5	152.5	762.5
155 – 160	12	157.5	1890
160 – 165	4	162.5	650
165 – 170	3	167.5	502.5
170 – 175	1	172.5	172.5
Total	30		4705

Para calcular la media se suman todos los datos de la columna f (Xm) y se divide entre el total de frecuencia.

$$\text{Media} = \frac{285 + 442.5 + 762.5 + 1890 + 650 + 502.5 + 172.5}{30} = \frac{4705}{30}$$

$= 156.833...$

≈ 156.83

La media de los datos es 156.83

De lo anterior se define

Definición 2.1. Media Aritmética
Es una medida que proporciona el promedio de un grupo de datos organizados.

Manera 2:
Completar la tabla agregando la columna del producto de la frecuencia con el límite inferior de cada clase.

Estatura (cm)	Frecuencia	f (Li)	
140 – 145	2	280	140 x 2 = 280
145 – 150	3	435	145 x 3 = 435
150 – 155	5	750	150 x 5 = 750
155 – 160	12	1860	.
160 – 165	4	640	.
165 – 170	3	495	.
170 – 175	1	170	170 x 1 = 170
Total	30	4630	

Marca de clase: (Xm) es el punto medio del intervalo de clase y se obtiene: $\frac{Li + Ls}{2}$ donde

Li: Límite inferior de la clase.

Ls: Límite superior de la clase.

$$\underset{Li}{\underset{\downarrow}{140}} - \underset{Ls}{\underset{\downarrow}{145}}$$

La media es la suma de los productos de f (Xm) dividido por el total de frecuencia.

La media aritmética tiene ventajas:

- Todos los valores entran en el cálculo de la media.
- Es una medida confiable.
- Sirve para establecer comparaciones entre datos con las mismas características.

[B]

Para calcular la media se debe sumar los datos de la columna f (Li). Luego calcular la mitad de la distancia entre los limites.

$\frac{145 - 140}{2} = 2.5$

$\frac{150 - 145}{2} = 2.5$

Concluye: una clase está compuesta por límite superior y límite inferior.

*Pedir a los estudiantes que lean la solución propuesta en LE y que expliquen cada paso.

Definición 2.1
(5 min)

[B]

Manera 2
(10 min)
Pedir a los estudiantes que copien la tabla del ejemplo y que la completen con el producto entre la f y límite inferior de cada clase.

Sumar los datos de la columna f(Li) y dividirlo por el total de la frecuencia, finalmente se debe obtener la distancia que hay entre los intervalos de la clase Ls - Li y dividir este entre dos. El resultado obtenido se le suma al cociente encontrado anteriormente.

*La manera dos de calcular la media facilita, porque se reduce el uso de decimales.

[Hasta aquí Clase 1]

Clase 1 y 2
(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calculan la media para un conjunto de datos agrupados.

Evaluación: Ejercicio 2.1

Ejercicio 2.1
(45 min)
Solución
a1)

Clase (X)	f	Xm	f(Xm)
4 – 9	6	6.5	39
9 – 14	8	11.5	92
14 – 19	7	16.5	115.5
19 – 24	5	21.5	107.5
24 – 29	9	26.5	238.5
Total	35		592.5

Media = $\frac{592.5}{35}$ = 16.928...
≈ 16.93

a2)

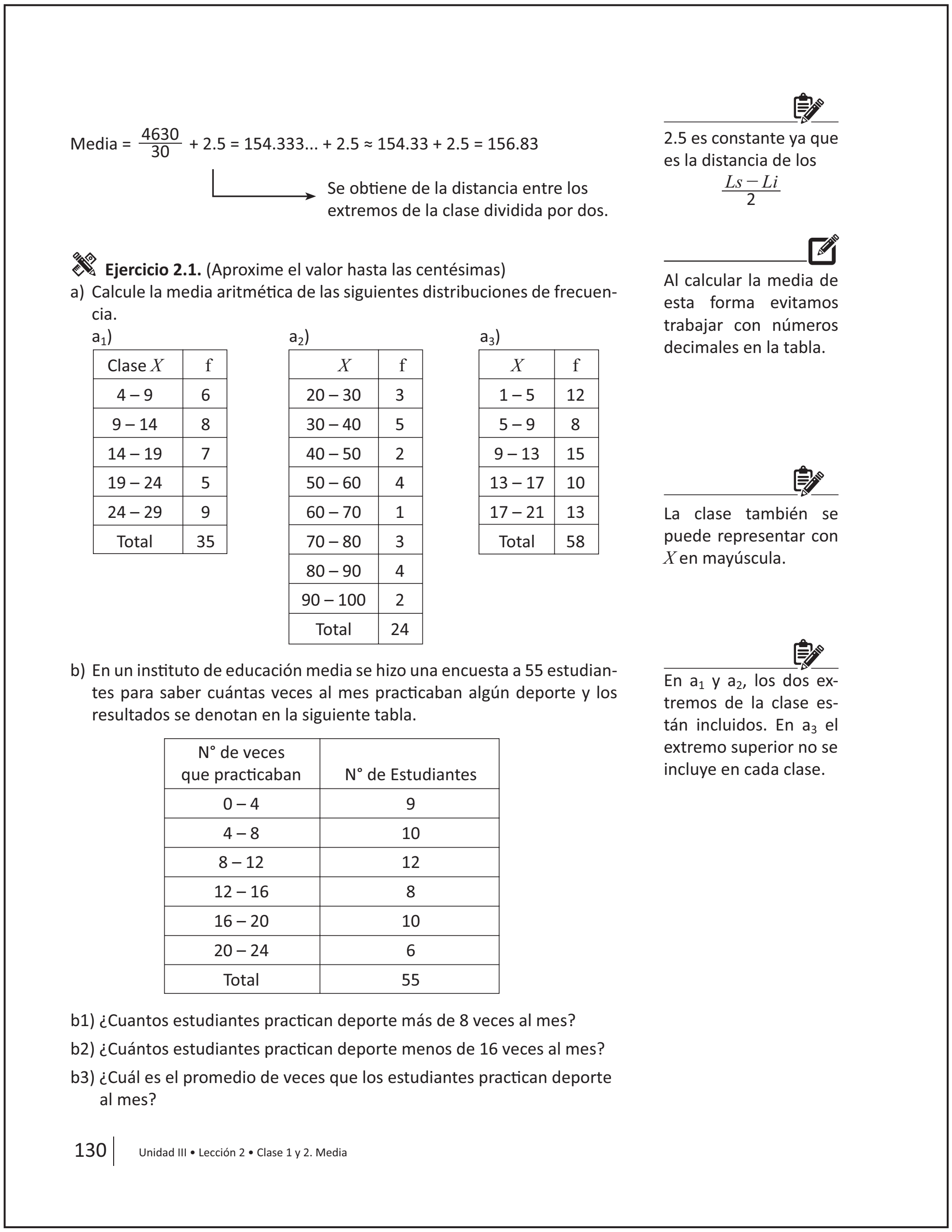
Clase (X)	f	Xm	f(Xm)
20 – 30	3	25	75
30 – 40	5	35	175
40 – 50	2	45	90
50 – 60	4	55	220
60 – 70	1	65	65
70 – 80	3	75	225
80 – 90	4	85	340
90 – 100	2	95	190
Total	24		1380

Media = $\frac{1380}{24}$ = 57.5

a3)

Clase (X)	f	Xm	f(Xm)
1 – 5	12	3	36
5 – 9	8	7	56
9 – 13	15	11	165
13 – 17	10	15	150
17 – 21	13	19	247
Total	58		654

Media = $\frac{654}{58}$ = 11.275...
≈ 11.28



Media = $\frac{4630}{30}$ + 2.5 = 154.333... + 2.5 ≈ 154.33 + 2.5 = 156.83

Se obtiene de la distancia entre los extremos de la clase dividida por dos.

2.5 es constante ya que es la distancia de los $\frac{Ls - Li}{2}$

Al calcular la media de esta forma evitamos trabajar con números decimales en la tabla.

Ejercicio 2.1. (Aproxime el valor hasta las centésimas)

a) Calcule la media aritmética de las siguientes distribuciones de frecuencia.

a$_1$)

Clase X	f
4 – 9	6
9 – 14	8
14 – 19	7
19 – 24	5
24 – 29	9
Total	35

a$_2$)

X	f
20 – 30	3
30 – 40	5
40 – 50	2
50 – 60	4
60 – 70	1
70 – 80	3
80 – 90	4
90 – 100	2
Total	24

a$_3$)

X	f
1 – 5	12
5 – 9	8
9 – 13	15
13 – 17	10
17 – 21	13
Total	58

La clase también se puede representar con X en mayúscula.

En a$_1$ y a$_2$, los dos extremos de la clase están incluidos. En a$_3$ el extremo superior no se incluye en cada clase.

b) En un instituto de educación media se hizo una encuesta a 55 estudiantes para saber cuántas veces al mes practicaban algún deporte y los resultados se denotan en la siguiente tabla.

N° de veces que practicaban	N° de Estudiantes
0 – 4	9
4 – 8	10
8 – 12	12
12 – 16	8
16 – 20	10
20 – 24	6
Total	55

b1) ¿Cuantos estudiantes practican deporte más de 8 veces al mes?
b2) ¿Cuántos estudiantes practican deporte menos de 16 veces al mes?
b3) ¿Cuál es el promedio de veces que los estudiantes practican deporte al mes?

130 | Unidad III • Lección 2 • Clase 1 y 2. Media

b1) Practican deporte más de 8 veces al mes: 36 estudiantes.
b2) Practican deporte menos de 16 veces al mes: 39 estudiantes
b3) Promedio de veces al mes: 11.31

Objetivo: **[A]** Identificar la clase que contiene la mediana en distribuciones de frecuencias de datos agrupados.

Evaluación: Ejercicio 2.2

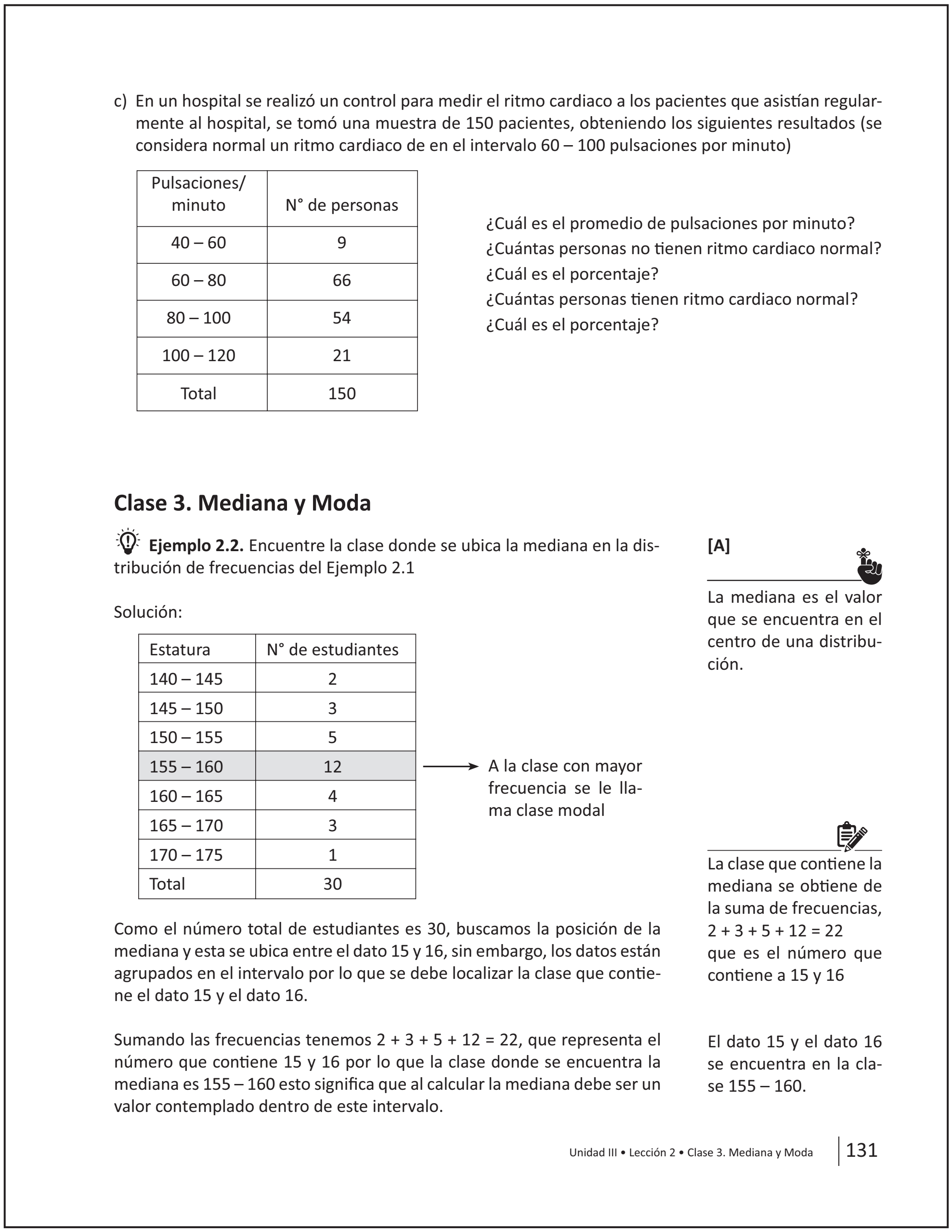
Unidad III. Lección 2.

Clase 1 y 2

(Continuación)

Clase3

(Continúa en la siguiente página)



c) En un hospital se realizó un control para medir el ritmo cardiaco a los pacientes que asistían regularmente al hospital, se tomó una muestra de 150 pacientes, obteniendo los siguientes resultados (se considera normal un ritmo cardiaco de en el intervalo 60 – 100 pulsaciones por minuto)

Pulsaciones/ minuto	N° de personas
40 – 60	9
60 – 80	66
80 – 100	54
100 – 120	21
Total	150

¿Cuál es el promedio de pulsaciones por minuto?
¿Cuántas personas no tienen ritmo cardiaco normal?
¿Cuál es el porcentaje?
¿Cuántas personas tienen ritmo cardiaco normal?
¿Cuál es el porcentaje?

Clase 3. Mediana y Moda

Ejemplo 2.2. Encuentre la clase donde se ubica la mediana en la distribución de frecuencias del Ejemplo 2.1

Solución:

Estatura	N° de estudiantes
140 – 145	2
145 – 150	3
150 – 155	5
155 – 160	12
160 – 165	4
165 – 170	3
170 – 175	1
Total	30

→ A la clase con mayor frecuencia se le llama clase modal

Como el número total de estudiantes es 30, buscamos la posición de la mediana y esta se ubica entre el dato 15 y 16, sin embargo, los datos están agrupados en el intervalo por lo que se debe localizar la clase que contiene el dato 15 y el dato 16.

Sumando las frecuencias tenemos 2 + 3 + 5 + 12 = 22, que representa el número que contiene 15 y 16 por lo que la clase donde se encuentra la mediana es 155 – 160 esto significa que al calcular la mediana debe ser un valor contemplado dentro de este intervalo.

[A]

La mediana es el valor que se encuentra en el centro de una distribución.

La clase que contiene la mediana se obtiene de la suma de frecuencias, 2 + 3 + 5 + 12 = 22 que es el número que contiene a 15 y 16

El dato 15 y el dato 16 se encuentra en la clase 155 – 160.

c) Media = 81.6. Hay 30 personas que no tienen ritmo cardiaco normal representan el 20%. Y 120 personas que tienen ritmo cardiaco normal representan el 80%.

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 2.2.
(13 min)
M: ¿Qué es la mediana?
RP: Es la medida de tendencia central que nos proporciona el dato central de la distribución.
M: ¿Qué significa la mediana?

Concluye: Significa que el 50% de los datos están sobre el valor de la mediana y el otro 50% está por debajo de esta.

*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedir a los estudiantes que den ideas de cómo se puede encontrar la mediana de los datos.
M: Se presenta la estatura de 30 personas en la tabla cual es el dato que está en la mitad.
RP: Es el dato que ocupa el lugar del centro está entre el 15° y 16°(posición).

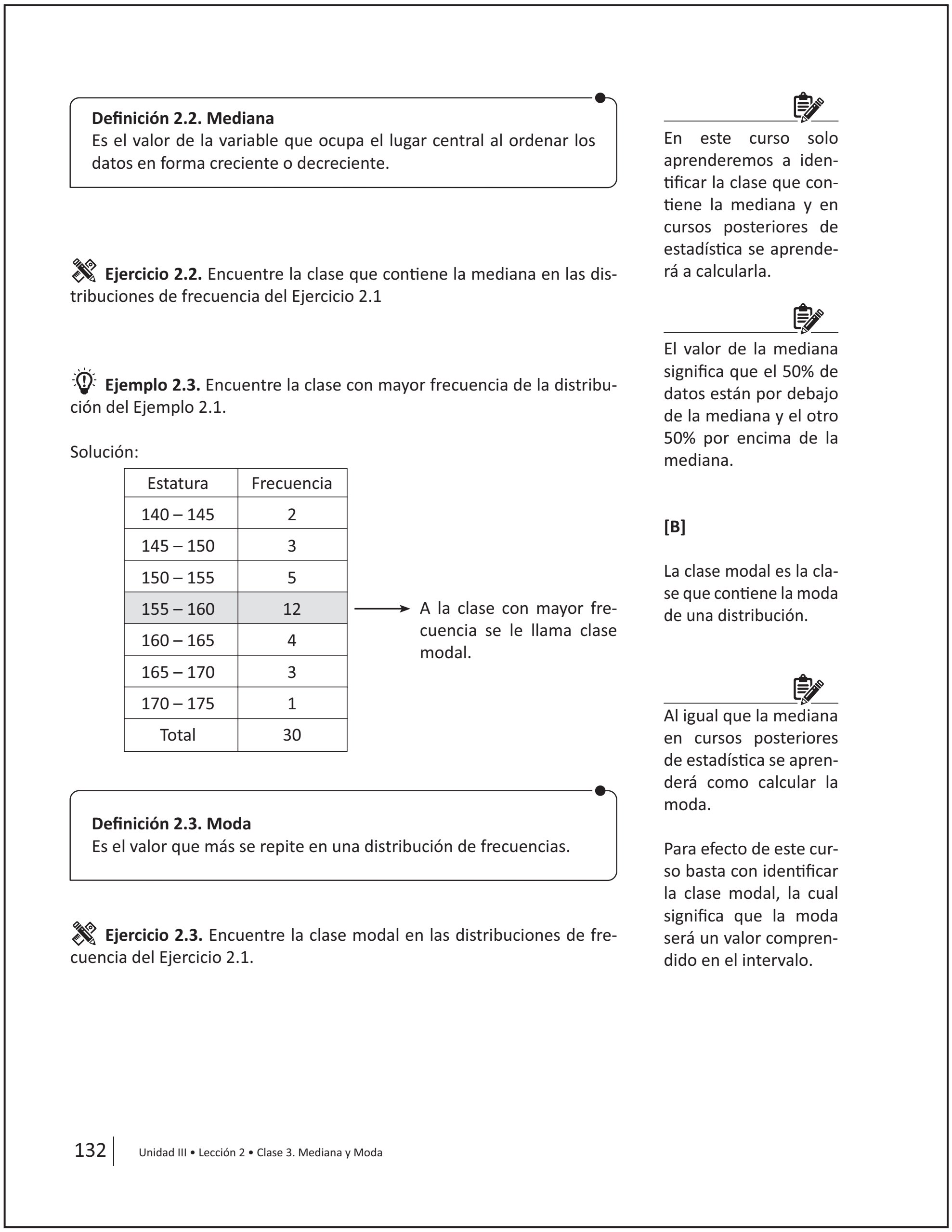
*Hacer notar al estudiante que como la frecuencia es par la posición de la mediana se ubica obteniendo la mitad de la suma de la posición anterior y la siguiente de la mitad del total la frecuencia.

M: ¿En qué clase se encuentra el dato que está ubicado en la posición 15 y la posición 16?
RP: 155 – 160
Concluye: A esta clase se le conoce como clase de la mediana.

Clase 3
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Identifican la clase modal en distribuciones de frecuencia de datos agrupados.

Evaluación: Ejercicio 2.3



Definición 2.2. Mediana
Es el valor de la variable que ocupa el lugar central al ordenar los datos en forma creciente o decreciente.

Ejercicio 2.2. Encuentre la clase que contiene la mediana en las distribuciones de frecuencia del Ejercicio 2.1

Ejemplo 2.3. Encuentre la clase con mayor frecuencia de la distribución del Ejemplo 2.1.

Solución:

Estatura	Frecuencia
140 – 145	2
145 – 150	3
150 – 155	5
155 – 160	12
160 – 165	4
165 – 170	3
170 – 175	1
Total	30

→ A la clase con mayor frecuencia se le llama clase modal.

Definición 2.3. Moda
Es el valor que más se repite en una distribución de frecuencias.

Ejercicio 2.3. Encuentre la clase modal en las distribuciones de frecuencia del Ejercicio 2.1.

En este curso solo aprenderemos a identificar la clase que contiene la mediana y en cursos posteriores de estadística se aprenderá a calcularla.

El valor de la mediana significa que el 50% de datos están por debajo de la mediana y el otro 50% por encima de la mediana.

[B]

La clase modal es la clase que contiene la moda de una distribución.

Al igual que la mediana en cursos posteriores de estadística se aprenderá como calcular la moda.

Para efecto de este curso basta con identificar la clase modal, la cual significa que la moda será un valor comprendido en el intervalo.

132 | Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Mediana y Moda

Definición 2.2

Ejercicio 2.2
(15 min) Soluciones
a1) 14 – 19 a2) 50 – 60
a3) 9 – 13
b) 8 – 12 c) 80 – 100

[B]
M: ¿Qué es la moda de una distribución?
RP: Es el dato que más se repite.

Ejemplo 2.3
(7 min)
*Presentar el problema en la pizarra
M: Usando los datos de la tabla del ejemplo 2.1 ¿Cuál es la clase que contiene mayor frecuencia?
RP: 155 – 160
M: ¿Qué significa?
RP: Hay más estudiantes que tienen esa estatura con respecto a los demás.
M: A esta clase que contiene la mayor frecuencia se le llama clase modal.
*Aclarar a los estudiantes que en este curso de estadística no se calculará la mediana ni la moda para datos agrupados.

Solamente bastará con ubicar la clase de la mediana y la clase modal debido a la complejidad de las fórmulas y el manejo de la información, por lo que en cursos posteriores y/o universitarios de estadística el estudiante aprenderá a calcular.

Ejercicio 2.3. (10 min)
Soluciones:
Clase modal
a1) 24 – 29 a2) 30 – 40 a3) 9 – 13
b) 8 – 12 c) 60 – 80

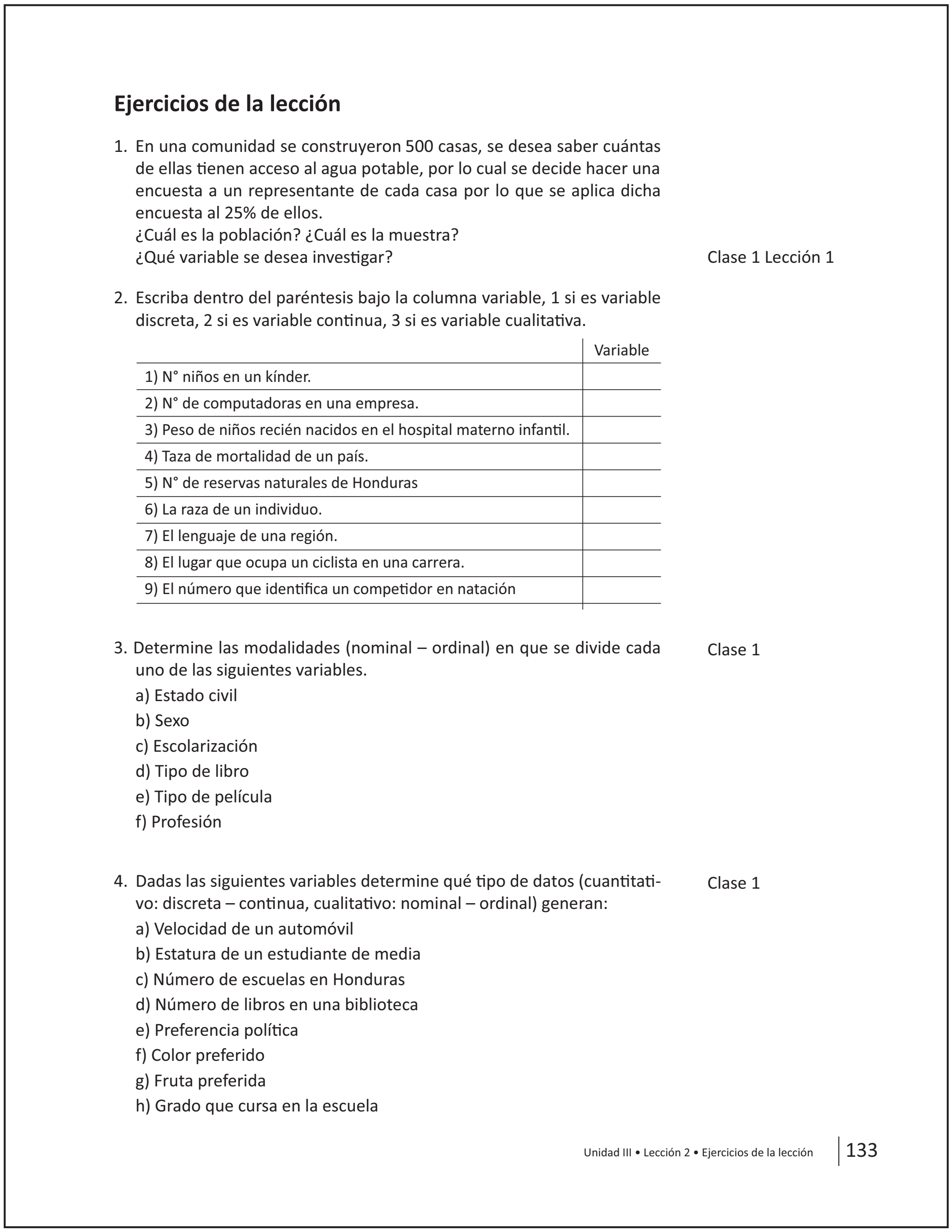
Objetivo: Confirman lo aprendido sobre las medidas de tendencia central.

Evaluación: Ejercicios de la Lección

Unidad III. Lección 2.

Ejercicios de la lección

(Continúa en la siguiente página)



Ejercicios de la lección

1. En una comunidad se construyeron 500 casas, se desea saber cuántas de ellas tienen acceso al agua potable, por lo cual se decide hacer una encuesta a un representante de cada casa por lo que se aplica dicha encuesta al 25% de ellos.
   ¿Cuál es la población? ¿Cuál es la muestra?
   ¿Qué variable se desea investigar?

Clase 1 Lección 1

2. Escriba dentro del paréntesis bajo la columna variable, 1 si es variable discreta, 2 si es variable continua, 3 si es variable cualitativa.

	Variable
1) N° niños en un kínder.	
2) N° de computadoras en una empresa.	
3) Peso de niños recién nacidos en el hospital materno infantil.	
4) Taza de mortalidad de un país.	
5) N° de reservas naturales de Honduras	
6) La raza de un individuo.	
7) El lenguaje de una región.	
8) El lugar que ocupa un ciclista en una carrera.	
9) El número que identifica un competidor en natación	

3. Determine las modalidades (nominal – ordinal) en que se divide cada uno de las siguientes variables.
   a) Estado civil
   b) Sexo
   c) Escolarización
   d) Tipo de libro
   e) Tipo de película
   f) Profesión

Clase 1

4. Dadas las siguientes variables determine qué tipo de datos (cuantitativo: discreta – continua, cualitativo: nominal – ordinal) generan:
   a) Velocidad de un automóvil
   b) Estatura de un estudiante de media
   c) Número de escuelas en Honduras
   d) Número de libros en una biblioteca
   e) Preferencia política
   f) Color preferido
   g) Fruta preferida
   h) Grado que cursa en la escuela

Clase 1

Unidad III • Lección 2 • Ejercicios de la lección 133

Soluciones:

1. Población: 500 casas, muestra el 25% de 500 casas, variable: acceso agua potable.

2. 1) variable 1,
   2) variable 1,
   3) variable 2,
   4) variable 2,
   5) variable 1,
   6) variable 3,
   7) variable 3,
   8) variable 3,
   9) variable 1.

3. a) Estado civil---nominal
   b) Sexo-----------nominal
   c) Escolarización-----------ordinal
   d) Tipo de libro---------nominal
   e) Tipo de película---------nominal
   f) Profesión------nominal

4. a) Cuantitativo (continuo)
   b) Cuantitativo (continuo)
   c) Cuantitativo (discreto)
   d) Cuantitativo (discreto)
   e) Cualitativo (nominal)
   f) Cualitativo (nominal)
   g) Cualitativo (nominal)
   h) Cualitativo (ordinal)

Ejercicios de la lección

(Continuación)

5. Solución abajo

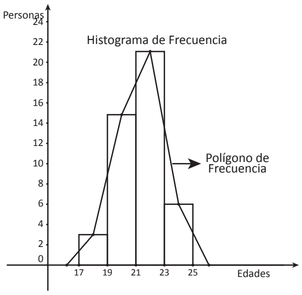
6. Muestra aleatoria sistemática.
   Se establece una razón entre la población y la muestra. $\frac{120}{20} = 6$

   De cada 6 lámparas seleccionadas al azar se elige una hasta completar las 20 lámparas que conforman la muestra.

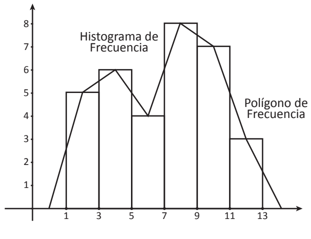
7. a)

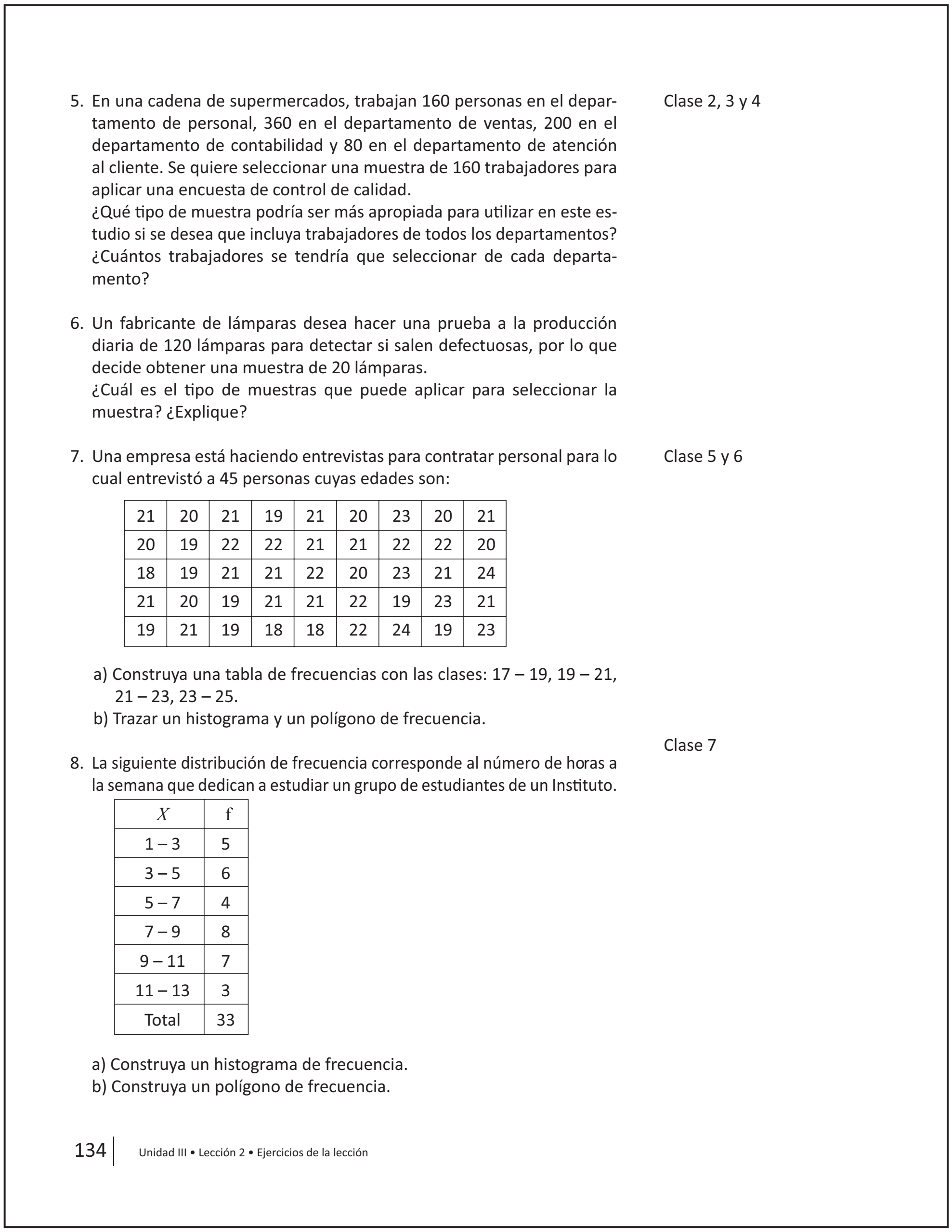
Clase	f
17 – 19	3
19 – 21	15
21 – 23	21
23 – 25	6

b)



8.





5. En una cadena de supermercados, trabajan 160 personas en el departamento de personal, 360 en el departamento de ventas, 200 en el departamento de contabilidad y 80 en el departamento de atención al cliente. Se quiere seleccionar una muestra de 160 trabajadores para aplicar una encuesta de control de calidad.
   ¿Qué tipo de muestra podría ser más apropiada para utilizar en este estudio si se desea que incluya trabajadores de todos los departamentos? ¿Cuántos trabajadores se tendría que seleccionar de cada departamento?

Clase 2, 3 y 4

6. Un fabricante de lámparas desea hacer una prueba a la producción diaria de 120 lámparas para detectar si salen defectuosas, por lo que decide obtener una muestra de 20 lámparas.
   ¿Cuál es el tipo de muestras que puede aplicar para seleccionar la muestra? ¿Explique?

7. Una empresa está haciendo entrevistas para contratar personal para lo cual entrevistó a 45 personas cuyas edades son:

Clase 5 y 6

21	20	21	19	21	20	23	20	21
20	19	22	22	21	21	22	22	20
18	19	21	21	22	20	23	21	24
21	20	19	21	21	22	19	23	21
19	21	19	18	18	22	24	19	23

a) Construya una tabla de frecuencias con las clases: 17 – 19, 19 – 21, 21 – 23, 23 – 25.
b) Trazar un histograma y un polígono de frecuencia.

Clase 7

8. La siguiente distribución de frecuencia corresponde al número de horas a la semana que dedican a estudiar un grupo de estudiantes de un Instituto.

X	f
1 – 3	5
3 – 5	6
5 – 7	4
7 – 9	8
9 – 11	7
11 – 13	3
Total	33

a) Construya un histograma de frecuencia.
b) Construya un polígono de frecuencia.

134 | Unidad III • Lección 2 • Ejercicios de la lección

5. Muestreo estratificado ¿Cuántos trabajadores se tendrían que seleccionar de cada departamento?

Departamento	N° de personas	%	Trabajadores seleccionados
Personal	160	20	32
Ventas	360	45	72
Contabilidad	200	25	40
Atención al c	80	10	16
Total	800		160

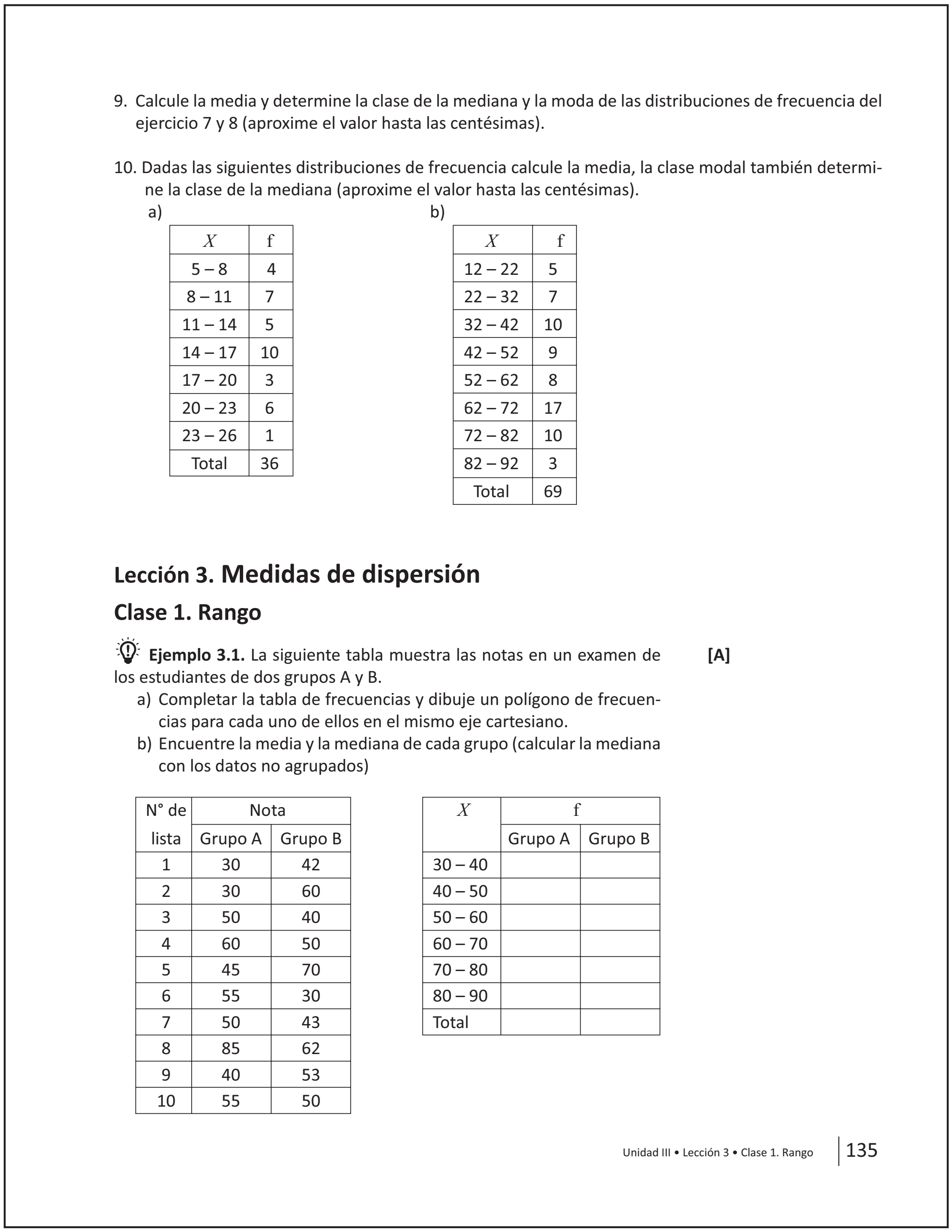
Objetivo: **[A]** Calculan el rango de un conjunto de datos.

Evaluación: Ejercicio 3.1

Unidad III. Lección 3.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)



9. Calcule la media y determine la clase de la mediana y la moda de las distribuciones de frecuencia del ejercicio 7 y 8 (aproxime el valor hasta las centésimas).

10. Dadas las siguientes distribuciones de frecuencia calcule la media, la clase modal también determine la clase de la mediana (aproxime el valor hasta las centésimas).

a)

X	f
5 – 8	4
8 – 11	7
11 – 14	5
14 – 17	10
17 – 20	3
20 – 23	6
23 – 26	1
Total	36

b)

X	f
12 – 22	5
22 – 32	7
32 – 42	10
42 – 52	9
52 – 62	8
62 – 72	17
72 – 82	10
82 – 92	3
Total	69

Lección 3. Medidas de dispersión

Clase 1. Rango

Ejemplo 3.1. La siguiente tabla muestra las notas en un examen de los estudiantes de dos grupos A y B. **[A]**

a) Completar la tabla de frecuencias y dibuje un polígono de frecuencias para cada uno de ellos en el mismo eje cartesiano.

b) Encuentre la media y la mediana de cada grupo (calcular la mediana con los datos no agrupados)

N° de	Nota	
lista	Grupo A	Grupo B
1	30	42
2	30	60
3	50	40
4	60	50
5	45	70
6	55	30
7	50	43
8	85	62
9	40	53
10	55	50

X	f	
	Grupo A	Grupo B
30 – 40		
40 – 50		
50 – 60		
60 – 70		
70 – 80		
80 – 90		
Total		

Unidad III • Lección 3 • Clase 1. Rango 135

9. Ejercicio 7:

Media = $\frac{960}{45}$ = 21.333...
≈ 21.33

Clase de la moda y mediana 21 – 23

Ejercicio 8:

Media = $\frac{228}{33}$ = 6.909...
≈ 6.91

Clase de la moda y mediana 7 – 9

10.

a) Media = $\frac{519}{36}$ = 14.416...
≈ 14.42

Clase de la mediana: 14 – 16

Clase de la moda: 14 – 16

b) Media = $\frac{3693}{69}$ = 53.52

Clase de la mediana: 52 – 62

Clase de la moda: 62 – 72

[Hasta aquí Lección 2]

[Desde aquí Lección 3]

[A]

Ejemplo 3.1

(20 min)

*Presentar el ejemplo en la pizarra y pedir a los estudiantes que completen la tabla de frecuencias.

M: ¿Cuáles son las clases que se dan en la tabla?

RP: 30 – 40; 40 – 50 etc.

M: ¿Qué significa esto?

RP: Se debe de buscar cuantos datos hay en cada clase.

M: ¿Cuántos datos hay en la clase 30 – 40?

RP: 2 en el grupo A y 1 en el grupo B

*Hacer el mismo proceso con las demás clases hasta completar la tabla.

Clase 1
(Continuación)

Objetivo: **[B]** Identifican la clase modal en distribuciones de frecuencia de datos agrupados.

Evaluación: Ejercicio 2.3

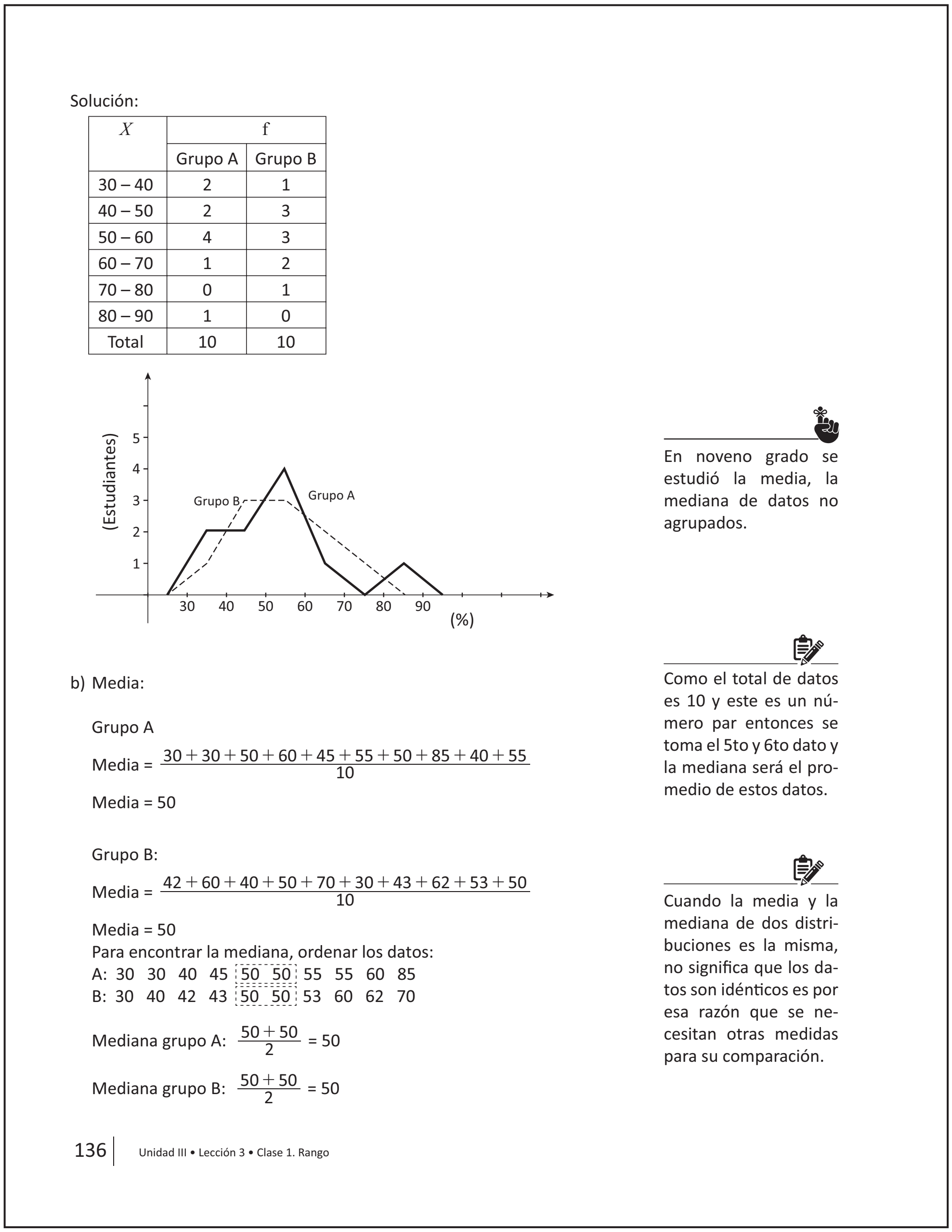
*Pedir a los estudiantes que tracen el polígono de frecuencia para ambos grupos.

M: ¿Qué datos se representan en los ejes?
RP: En el eje horizontal se representa el porciento y en el eje vertical la cantidad de estudiantes.
M: Calculen la media y la mediana para ambos grupos ¿Cuál es el valor?

*Es importante que identifiquen los datos para calcular la media y la mediana.

M: Concluye la media y la mediana son 50%
M: Como los valores son iguales ¿Significa esto que la distribución de los datos son iguales?

M: ¿Que observan en los polígonos?
RP: Que las distribuciones no son iguales.
M: ¿Qué diferencia tienen ambos conjuntos de datos?
RP: Las clases de los dos grupos comienzan en 30 - 40 pero para el grupo A termina en 80 - 90 y para el B es 70 - 80.



Solución:

X	f	
	Grupo A	Grupo B
30 – 40	2	1
40 – 50	2	3
50 – 60	4	3
60 – 70	1	2
70 – 80	0	1
80 – 90	1	0
Total	10	10

b) Media:

Grupo A

$$\text{Media} = \frac{30+30+50+60+45+55+50+85+40+55}{10}$$

Media = 50

Grupo B:

$$\text{Media} = \frac{42+60+40+50+70+30+43+62+53+50}{10}$$

Media = 50
Para encontrar la mediana, ordenar los datos:
A: 30 30 40 45 50 50 55 55 60 85
B: 30 40 42 43 50 50 53 60 62 70

$$\text{Mediana grupo A: } \frac{50+50}{2} = 50$$

$$\text{Mediana grupo B: } \frac{50+50}{2} = 50$$

En noveno grado se estudió la media, la mediana de datos no agrupados.

Como el total de datos es 10 y este es un número par entonces se toma el 5to y 6to dato y la mediana será el promedio de estos datos.

Cuando la media y la mediana de dos distribuciones es la misma, no significa que los datos son idénticos es por esa razón que se necesitan otras medidas para su comparación.

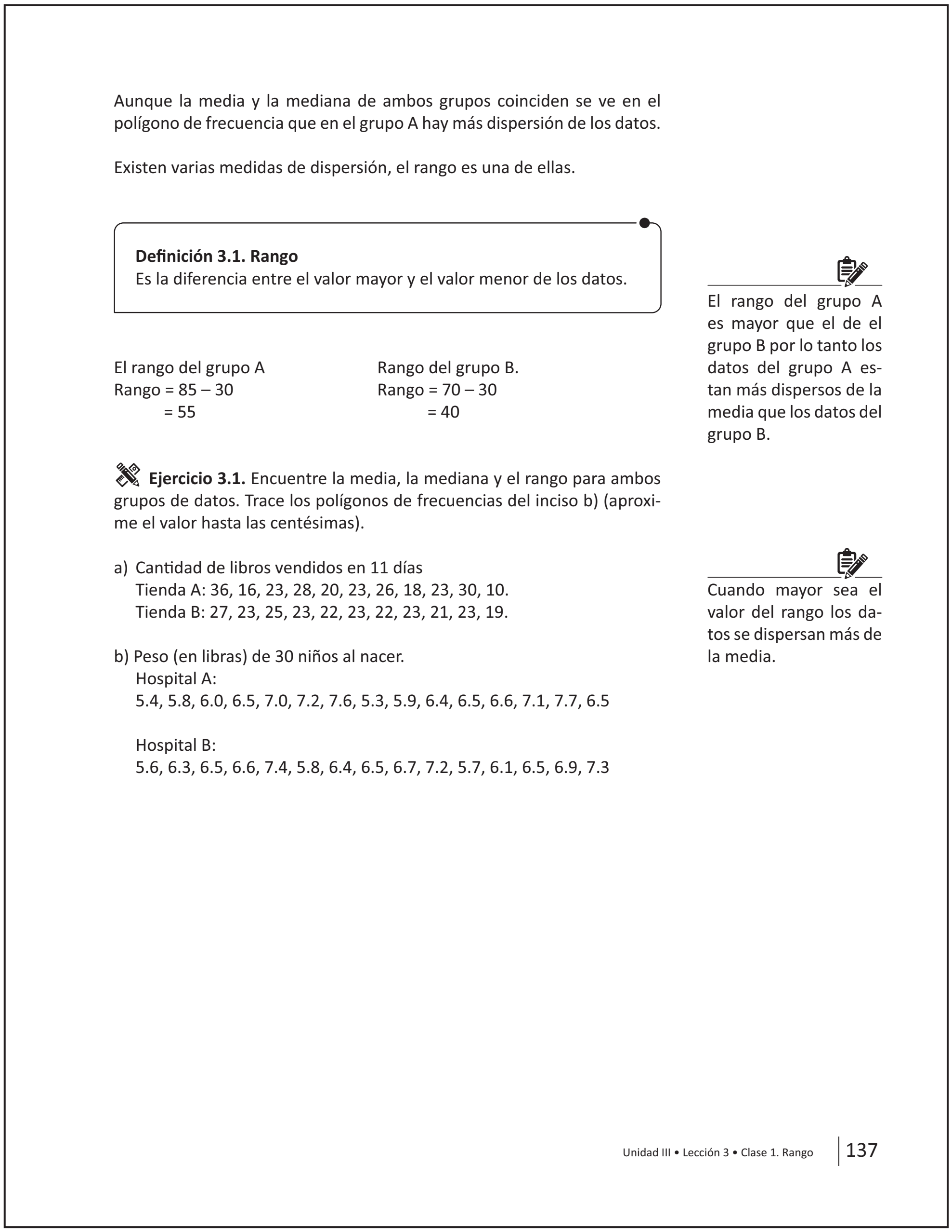
136 Unidad III • Lección 3 • Clase 1. Rango

Concluye: Aunque ambos grupos de datos tienen la misma media y la misma mediana y que estas son iguales entre sí, la distribución de los datos es distinta.

Objetivo: **[A]** Calculan el rango de un conjunto de datos.

Clase 1
(Continuación)

Evaluación: Ejercicio 3.1



Aunque la media y la mediana de ambos grupos coinciden se ve en el polígono de frecuencia que en el grupo A hay más dispersión de los datos.

Existen varias medidas de dispersión, el rango es una de ellas.

Definición 3.1. Rango
Es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de los datos.

El rango del grupo A es mayor que el de el grupo B por lo tanto los datos del grupo A estan más dispersos de la media que los datos del grupo B.

El rango del grupo A
Rango = 85 – 30
= 55

Rango del grupo B.
Rango = 70 – 30
= 40

Ejercicio 3.1. Encuentre la media, la mediana y el rango para ambos grupos de datos. Trace los polígonos de frecuencias del inciso b) (aproxime el valor hasta las centésimas).

a) Cantidad de libros vendidos en 11 días
Tienda A: 36, 16, 23, 28, 20, 23, 26, 18, 23, 30, 10.
Tienda B: 27, 23, 25, 23, 22, 23, 22, 23, 21, 23, 19.

b) Peso (en libras) de 30 niños al nacer.
Hospital A:
5.4, 5.8, 6.0, 6.5, 7.0, 7.2, 7.6, 5.3, 5.9, 6.4, 6.5, 6.6, 7.1, 7.7, 6.5

Hospital B:
5.6, 6.3, 6.5, 6.6, 7.4, 5.8, 6.4, 6.5, 6.7, 7.2, 5.7, 6.1, 6.5, 6.9, 7.3

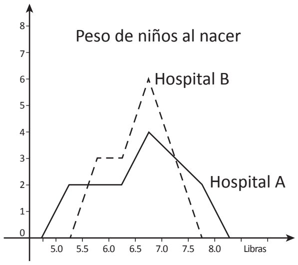
Cuando mayor sea el valor del rango los datos se dispersan más de la media.

Calcular el rango
(5 min)
M: Piensen que los datos de un grupo están más distanciados que otro ¿Cuáles son las distancias?
M: En cada grupo tomen el valor mayor, el valor menor y encuentren la diferencia. ¿Cuáles son esos valores?
RP: Para el grupo A es 55
Para el grupo B es: 40
Llamar rango a este valor.
Concluye: Si el rango es mayor los datos se dispersan más de la media.

Definición 3.1

Ejercicio 3.1
(20 min) Solución
a) Media tienda A = $\frac{253}{11}$ = 23
Mediana tienda A: 23
Rango tienda A: 36 – 10 = 26
Media tienda B
= $\frac{251}{11}$ = 22.818 ≈ 22.82
Mediana tienda B: 23
Rango tienda B: 27 – 19 = 8

b)



b) Media hospital A = $\frac{97.5}{15}$ = 6.5
Mediana hospital A: 6.5
Rango hospital A: 2.4

Media hospital B = $\frac{97.5}{15}$ = 6.5
Mediana hospital B: 6.5
Rango hospital B: 1.8

Unidad III. Lección 3.

Clase 2, 3 y 4

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Calcular la desviación absoluta media de un conjunto de datos.

Evaluación: Ejercicio 3.2

Ejemplo 3.2

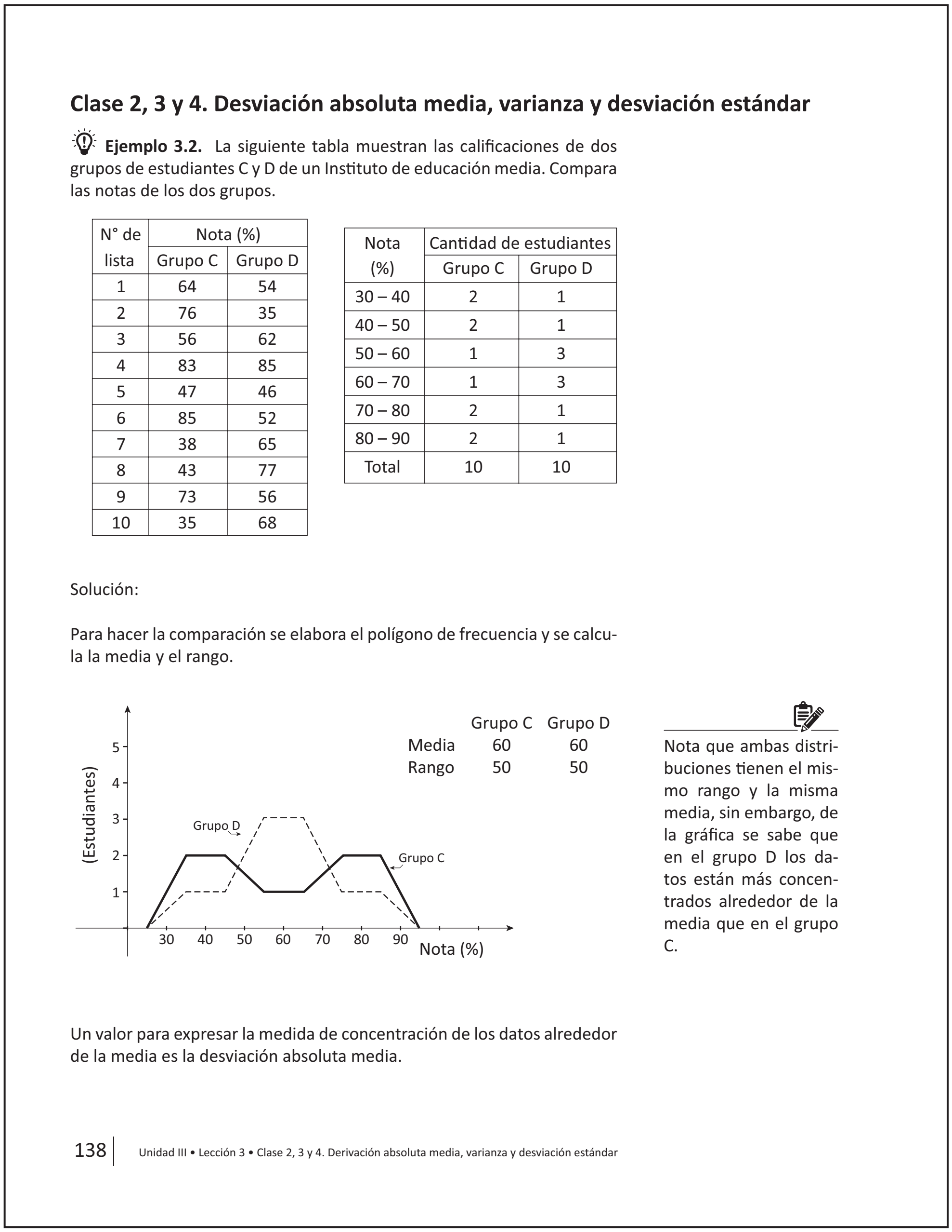
(20 min)

*Presentar en la pizarra las tablas de frecuencias y pedir a los estudiantes que grafiquen los datos mediante un polígono de frecuencias para cada grupo en solo eje de coordenadas cartesianas.

Calcular la media y la mediana de ambos grupos.

M: Observen cada uno de los polígonos y la tabla de frecuencia. ¿Qué se puede decir de ello?
RP: Las medias son iguales en ambos grupos, los rangos son iguales en ambos grupos.

*Hacer que los estudiantes noten que los datos del grupo D están más cerca de la media 60 que los del grupo C.
Concluye: El grupo D está más concentrado alrededor de la media.



Clase 2, 3 y 4. Desviación absoluta media, varianza y desviación estándar

Ejemplo 3.2. La siguiente tabla muestran las calificaciones de dos grupos de estudiantes C y D de un Instituto de educación media. Compara las notas de los dos grupos.

N° de lista	Nota (%)	
	Grupo C	Grupo D
1	64	54
2	76	35
3	56	62
4	83	85
5	47	46
6	85	52
7	38	65
8	43	77
9	73	56
10	35	68

Nota (%)	Cantidad de estudiantes	
	Grupo C	Grupo D
30 – 40	2	1
40 – 50	2	1
50 – 60	1	3
60 – 70	1	3
70 – 80	2	1
80 – 90	2	1
Total	10	10

Solución:

Para hacer la comparación se elabora el polígono de frecuencia y se calcula la media y el rango.

	Grupo C	Grupo D
Media	60	60
Rango	50	50

Nota que ambas distribuciones tienen el mismo rango y la misma media, sin embargo, de la gráfica se sabe que en el grupo D los datos están más concentrados alrededor de la media que en el grupo C.

Un valor para expresar la medida de concentración de los datos alrededor de la media es la desviación absoluta media.

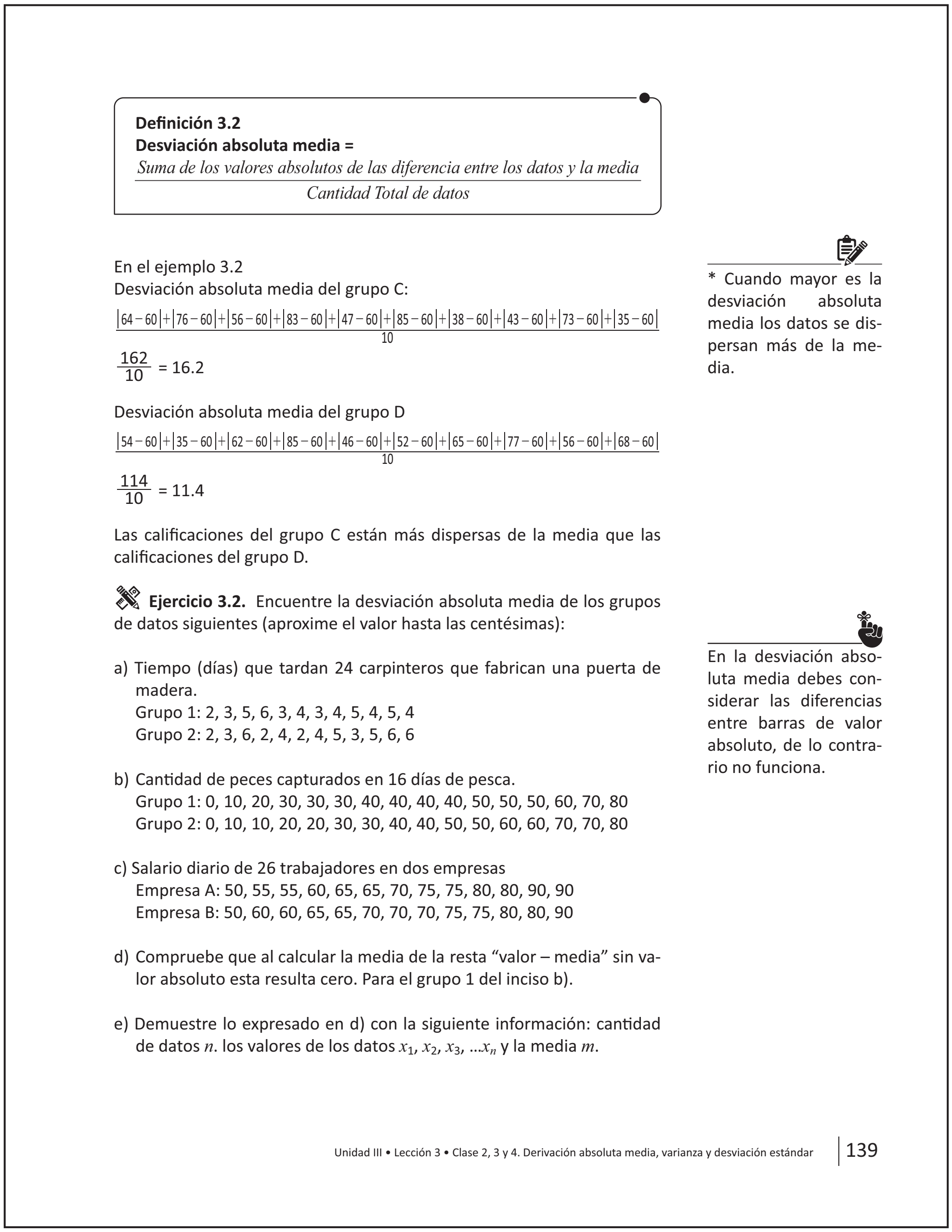
Objetivo: **[A]** Calculan la desviación absoluta media de un grupo de datos.

Evaluación: Ejercicio 3.2

Clase 2, 3 y 4

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)



Definición 3.2
Desviación absoluta media =

$$\frac{\textit{Suma de los valores absolutos de las diferencia entre los datos y la media}}{\textit{Cantidad Total de datos}}$$

En el ejemplo 3.2
Desviación absoluta media del grupo C:

$$\frac{|64-60|+|76-60|+|56-60|+|83-60|+|47-60|+|85-60|+|38-60|+|43-60|+|73-60|+|35-60|}{10}$$

$$\frac{162}{10} = 16.2$$

Desviación absoluta media del grupo D

$$\frac{|54-60|+|35-60|+|62-60|+|85-60|+|46-60|+|52-60|+|65-60|+|77-60|+|56-60|+|68-60|}{10}$$

$$\frac{114}{10} = 11.4$$

Las calificaciones del grupo C están más dispersas de la media que las calificaciones del grupo D.

* Cuando mayor es la desviación absoluta media los datos se dispersan más de la media.

Ejercicio 3.2. Encuentre la desviación absoluta media de los grupos de datos siguientes (aproxime el valor hasta las centésimas):

a) Tiempo (días) que tardan 24 carpinteros que fabrican una puerta de madera.
  Grupo 1: 2, 3, 5, 6, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 4
  Grupo 2: 2, 3, 6, 2, 4, 2, 4, 5, 3, 5, 6, 6

b) Cantidad de peces capturados en 16 días de pesca.
  Grupo 1: 0, 10, 20, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, 50, 50, 50, 60, 70, 80
  Grupo 2: 0, 10, 10, 20, 20, 30, 30, 40, 40, 50, 50, 60, 60, 70, 70, 80

c) Salario diario de 26 trabajadores en dos empresas
  Empresa A: 50, 55, 55, 60, 65, 65, 70, 75, 75, 80, 80, 90, 90
  Empresa B: 50, 60, 60, 65, 65, 70, 70, 70, 75, 75, 80, 80, 90

d) Compruebe que al calcular la media de la resta "valor – media" sin valor absoluto esta resulta cero. Para el grupo 1 del inciso b).

e) Demuestre lo expresado en d) con la siguiente información: cantidad de datos n. los valores de los datos x_1, x_2, x_3, ...x_n y la media m.

En la desviación absoluta media debes considerar las diferencias entre barras de valor absoluto, de lo contrario no funciona.

Unidad III • Lección 3 • Clase 2, 3 y 4. Derivación absoluta media, varianza y desviación estándar | 139

e) $$\frac{(x_1-m)+(x_2-m)+(x_3-m)+\cdots+(x_n-m)}{n} = \frac{(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)-(mn)}{n}$$

$$= \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n} - \frac{mn}{n} = m - \frac{mn}{n} = m - m = 0$$

[Hasta aquí Clase 2]

*Hacer que los estudiantes observen que en el polígono los datos del grupo D están más concentrados alrededor de la media.
Existe un valor que permite expresar la concentración de los datos alrededor de la media y se le conoce como desviación absoluta media

Definición 3.2. (5 min)
*Presentar el ejemplo calculando la desviación absoluta media usando la fórmula.

Ejercicio 3.2

(20 min) Solución

a) Grupo 1
  Desviación absoluta media = 0.833... ≈ 0.83
  Grupo 2
  Desviación absoluta media = 1.333... ≈ 1.33
b) Grupo 1
  Desviación absoluta media = 15
  Grupo 2
  Desviación absoluta media = 20
c) Empresa A
  Desviación absoluta media = 10.384... ≈ 10.38
  Empresa B
  Desviación absoluta media = 7.692... ≈ 7.69
d) –40 – 30 –20 –10 –10 –10 + 0 + 0 + 0 + 0 +10 + 10 + 10 + 20 + 30 + 40 = 0

Clase 2, 3 y 4

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[B]** Calcular la varianza de un conjunto de datos.
[C] Calcular la desviación estándar de un conjunto de datos.

Evaluación: Ejercicio 3.4

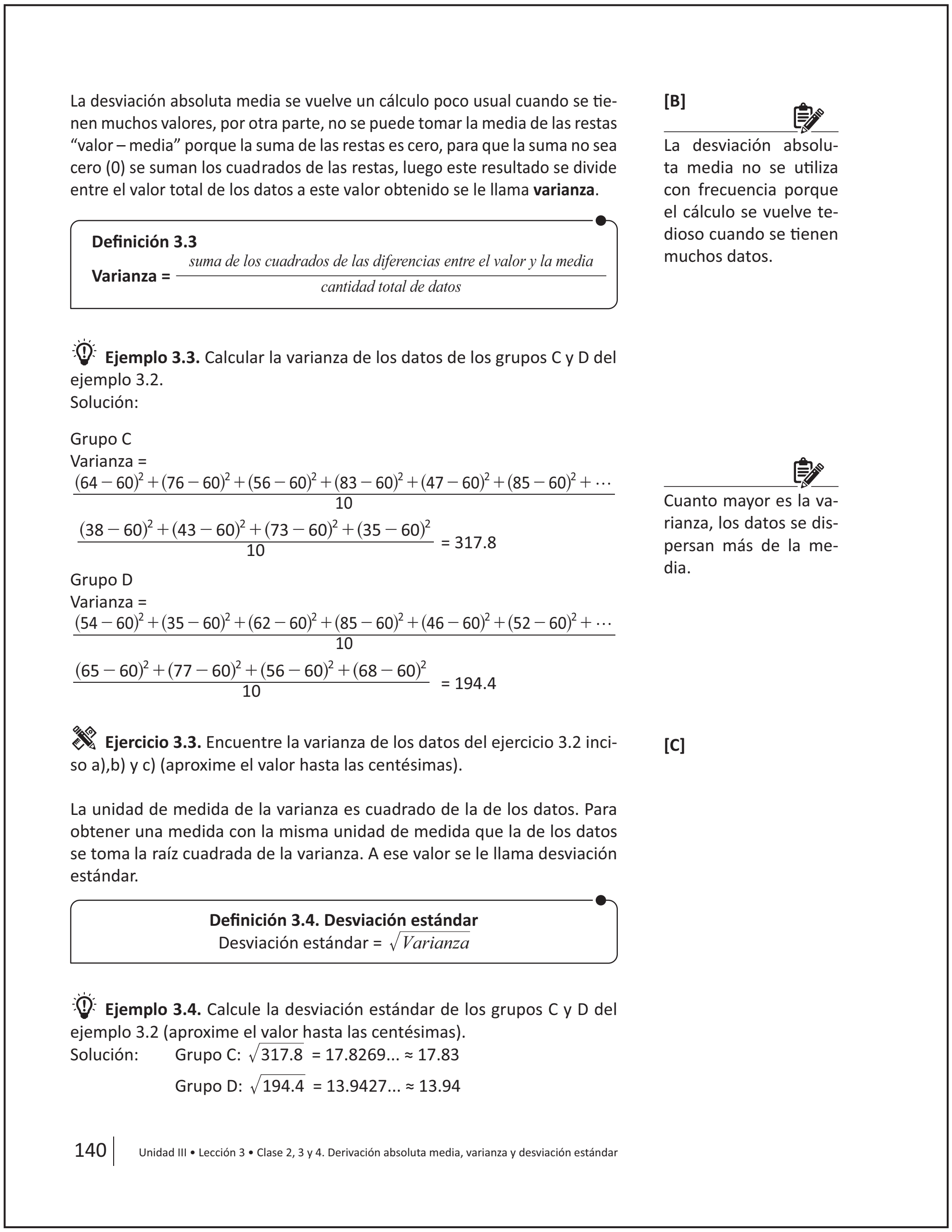
[Desde aquí Clase 3]

[B] (5 min)
¿Cuál es la dificultad en el cálculo de la desviación absoluta media?
Concluir que es posible equivocarse en el cálculo, en el signo, hay muchas restas involucradas.
*Hacer notar al estudiante que si no se utilizan los paréntesis se obtiene cero por lo que para evitar esa situación se eleva el cuadrado la diferencia luego sumar estos valores y dividir entre el total.
A este valor se le denomina varianza.

Definición 3.3. (10 min)
*Calcular la varianza para cada uno de los grupos.
*Concluir que la varianza es 317.8 para el grupo C y 194.4 para el grupo D.
M: ¿Qué datos están más dispersos?
Los del grupo C están más dispersos.
M: ¿Por qué?
Porque en la varianza del grupo C es mayor que las del grupo D.

Ejercicio 3.3

(15 min) solución
a) Grupo 1. Varianza
= 1.166... ≈ 1.17
Grupo 2. Varianza
= 2.333... ≈ 2.33
b) Grupo 1: 400
Grupo2: 550
c) Empresa A: 157.769...≈ 157.77
Empresa B: 100



La desviación absoluta media se vuelve un cálculo poco usual cuando se tienen muchos valores, por otra parte, no se puede tomar la media de las restas "valor – media" porque la suma de las restas es cero, para que la suma no sea cero (0) se suman los cuadrados de las restas, luego este resultado se divide entre el valor total de los datos a este valor obtenido se le llama **varianza**.

[B]

La desviación absoluta media no se utiliza con frecuencia porque el cálculo se vuelve tedioso cuando se tienen muchos datos.

Definición 3.3

Varianza = $\dfrac{\textit{suma de los cuadrados de las diferencias entre el valor y la media}}{\textit{cantidad total de datos}}$

Ejemplo 3.3. Calcular la varianza de los datos de los grupos C y D del ejemplo 3.2.
Solución:

Grupo C
Varianza =

$$\frac{(64-60)^2+(76-60)^2+(56-60)^2+(83-60)^2+(47-60)^2+(85-60)^2+\cdots}{10}$$

$$\frac{(38-60)^2+(43-60)^2+(73-60)^2+(35-60)^2}{10} = 317.8$$

Grupo D
Varianza =

$$\frac{(54-60)^2+(35-60)^2+(62-60)^2+(85-60)^2+(46-60)^2+(52-60)^2+\cdots}{10}$$

$$\frac{(65-60)^2+(77-60)^2+(56-60)^2+(68-60)^2}{10} = 194.4$$

Cuanto mayor es la varianza, los datos se dispersan más de la media.

Ejercicio 3.3. Encuentre la varianza de los datos del ejercicio 3.2 inciso a),b) y c) (aproxime el valor hasta las centésimas).

[C]

La unidad de medida de la varianza es cuadrado de la de los datos. Para obtener una medida con la misma unidad de medida que la de los datos se toma la raíz cuadrada de la varianza. A ese valor se le llama desviación estándar.

Definición 3.4. Desviación estándar
Desviación estándar = $\sqrt{Varianza}$

Ejemplo 3.4. Calcule la desviación estándar de los grupos C y D del ejemplo 3.2 (aproxime el valor hasta las centésimas).
Solución: Grupo C: $\sqrt{317.8}$ = 17.8269... ≈ 17.83
Grupo D: $\sqrt{194.4}$ = 13.9427... ≈ 13.94

140 | Unidad III • Lección 3 • Clase 2, 3 y 4. Derivación absoluta media, varianza y desviación estándar

[C]
Conocer la fórmula de la desviación estándar (7 min)

M: La unidad de la varianza esta elevada al cuadrado y para eliminar el exponente 2 se aplica raíz cuadrada.

Ejemplo 3.4. (8 min)

[Hasta aquí Clase 3]

Objetivo: **[D]** Demostrar la fórmula alterna para calcular la varianza.

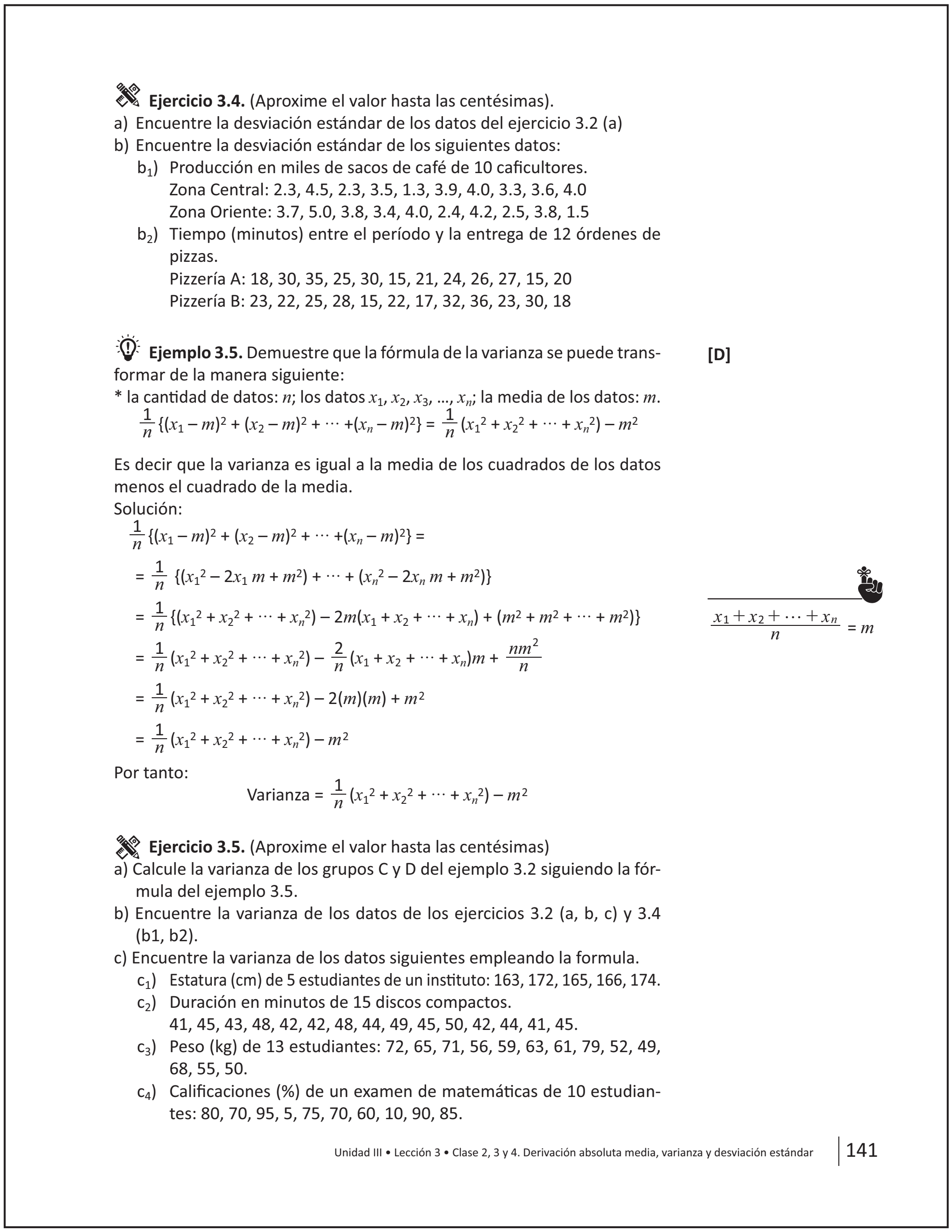
Evaluación: Ejercicio 3.5

Clase 2, 3 y 4

(Continuación)

(Continúa en la siguiente página)

[Desde aquí Clase 4]



Ejercicio 3.4. (Aproxime el valor hasta las centésimas).

a) Encuentre la desviación estándar de los datos del ejercicio 3.2 (a)

b) Encuentre la desviación estándar de los siguientes datos:

- b_1) Producción en miles de sacos de café de 10 caficultores.
  Zona Central: 2.3, 4.5, 2.3, 3.5, 1.3, 3.9, 4.0, 3.3, 3.6, 4.0
  Zona Oriente: 3.7, 5.0, 3.8, 3.4, 4.0, 2.4, 4.2, 2.5, 3.8, 1.5
- b_2) Tiempo (minutos) entre el período y la entrega de 12 órdenes de pizzas.
  Pizzería A: 18, 30, 35, 25, 30, 15, 21, 24, 26, 27, 15, 20
  Pizzería B: 23, 22, 25, 28, 15, 22, 17, 32, 36, 23, 30, 18

Ejemplo 3.5. Demuestre que la fórmula de la varianza se puede transformar de la manera siguiente: **[D]**

* la cantidad de datos: n; los datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; la media de los datos: m.

$$\frac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-m^2$$

Es decir que la varianza es igual a la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media.

Solución:

$$\frac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}=$$
$$=\frac{1}{n}\{(x_1^2-2x_1\,m+m^2)+\cdots+(x_n^2-2x_n\,m+m^2)\}$$
$$=\frac{1}{n}\{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2m(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(m^2+m^2+\cdots+m^2)\}$$
$$=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\frac{2}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)m+\frac{nm^2}{n}$$
$$=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2(m)(m)+m^2$$
$$=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-m^2$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=m$$

Por tanto:

$$\text{Varianza}=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-m^2$$

Ejercicio 3.5. (Aproxime el valor hasta las centésimas)

a) Calcule la varianza de los grupos C y D del ejemplo 3.2 siguiendo la fórmula del ejemplo 3.5.

b) Encuentre la varianza de los datos de los ejercicios 3.2 (a, b, c) y 3.4 (b1, b2).

c) Encuentre la varianza de los datos siguientes empleando la formula.

- c_1) Estatura (cm) de 5 estudiantes de un instituto: 163, 172, 165, 166, 174.
- c_2) Duración en minutos de 15 discos compactos.
  41, 45, 43, 48, 42, 42, 48, 44, 49, 45, 50, 42, 44, 41, 45.
- c_3) Peso (kg) de 13 estudiantes: 72, 65, 71, 56, 59, 63, 61, 79, 52, 49, 68, 55, 50.
- c_4) Calificaciones (%) de un examen de matemáticas de 10 estudiantes: 80, 70, 95, 5, 75, 70, 60, 10, 90, 85.

Unidad III • Lección 3 • Clase 2, 3 y 4. Derivación absoluta media, varianza y desviación estándar 141

Ejercicio 3.4

(15 min) Solución

a) Desviación estándar
= 1.081... ≈ 1.08
Desviación estándar
= 1.526... ≈ 1.53

b1) Desviación estándar:
zona central = 0.943... ≈ 0.94
zona oriente = 0.968... ≈ 0.97

b2) Desviación estándar:
Pizzería A = 5.983...≈ 5.98
Pizzería B = 6.029...≈ 6.03

[D]

Ejemplo 3.5.

(15 min)

*Presentar el ejemplo en la pizarra

¿Qué se pide demostrar?

RP: Que las dos fórmulas son equivalentes

M: ¿Cuál es el primer paso para la demostración?

*Hacer preguntas para desarrollar la demostración en conjunto

*Al aplicar esta fórmula se debe conocer los datos, la cantidad de datos y la media de estos datos.

Ejercicio 3.5.

Estas varianzas se calculan por la fórmula de Ejemplo 3.5.

(15 min) Solución

a) Varianza
Grupo C = 317.8
Grupo D = 194.4

b) Varianza 3.2
(a) grupo 1 = 1.166... ≈ 1.17
grupo 2 = 2.333... ≈ 2.33

Varianza 3.2 (b) grupo 1 = 400;
grupo 2 = 550

Varianza 3.2 (c)
Empresa A = 157.692... ≈ 157.69
Empresa B = 100

3.4) b_1) Zona central = 0.8901 ≈ 0.89
Zona oriente = 0.9381 ≈ 0.94

b_2) Pizzería A = 35.964... ≈ 35.96
Pizzería B = 36.354... ≈ 36.35

c_1)18 c_2) 8.106... ≈ 8.11

c_3)78.366... ≈ 78.37 c_4) 894

Unidad III. Lección 3.
Ejercicios de la lección

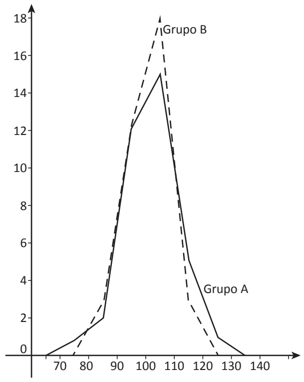
Objetivo: Aplican los conocimientos aprendidos en la lección.

Evaluación: Ejercicios de la lección

1.a) Grupo A: media = 100
mediana = 100
rango = 46
Grupo B: media 100
mediana = 100
rango = 30

1.b) Media y mediana son iguales, la diferencia es su rango grupo A = 46, grupo B = 30

1.c)



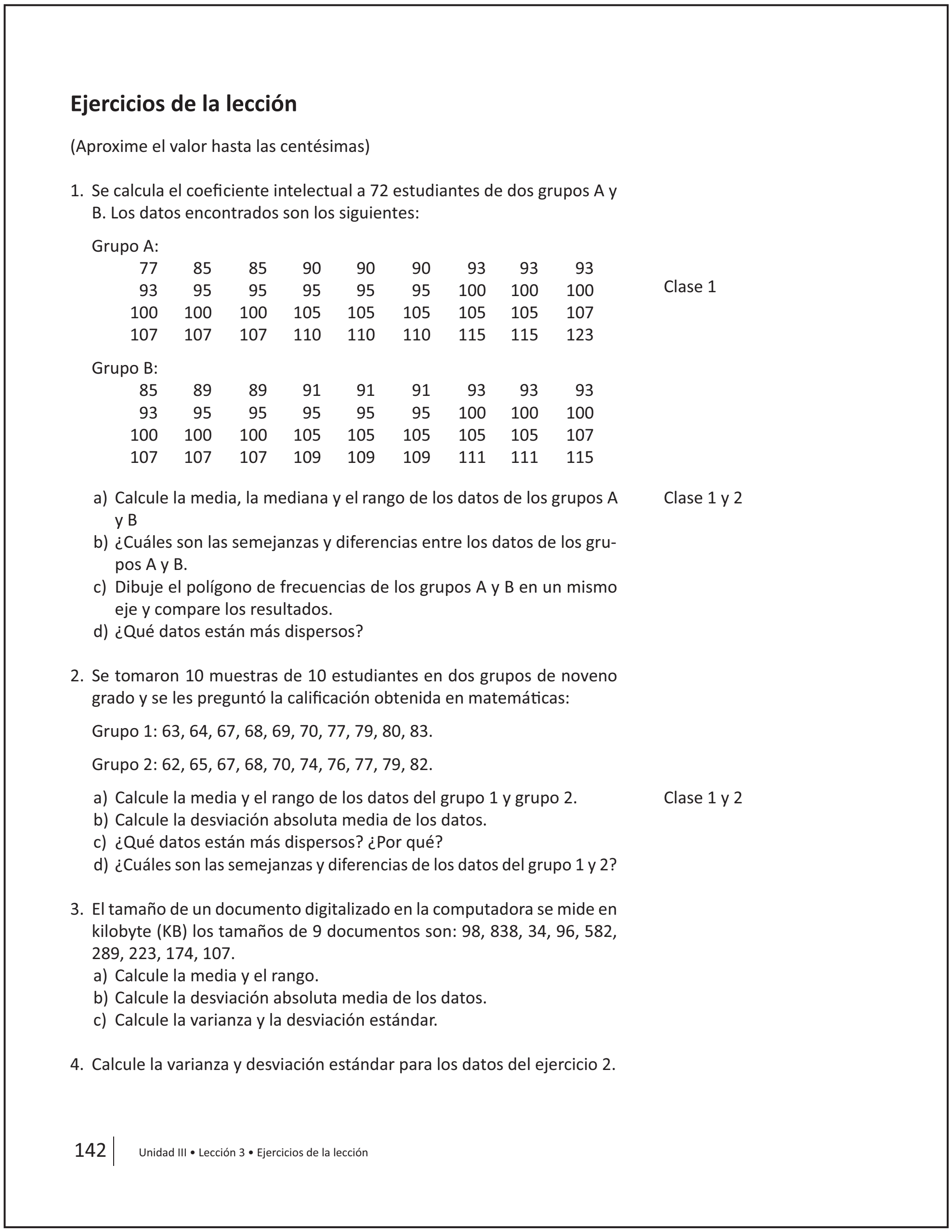
1.d) El grupo A se dispersa más de la media. El rango del grupo A es mayor que el rango del grupo B.

2.a) Grupo 1: media = 72, rango = 20
Grupo 2: media 72, rango = 20

2.b) Desviación absoluta de la media: grupo 1 = 6.2, grupo 2 = 5.6

2.c) El grupo 1 se dispersa más de la media porque 6.2 > 5.6

2.d) En ambos grupos, las medias son iguales y su rango también. Las desviaciones absolutas de la media son diferentes.



Ejercicios de la lección

(Aproxime el valor hasta las centésimas)

1. Se calcula el coeficiente intelectual a 72 estudiantes de dos grupos A y B. Los datos encontrados son los siguientes:

Grupo A:

77	85	85	90	90	90	93	93	93	
93	95	95	95	95	95	100	100	100	Clase 1
100	100	100	105	105	105	105	105	107	
107	107	107	110	110	110	115	115	123	

Grupo B:

85	89	89	91	91	91	93	93	93
93	95	95	95	95	95	100	100	100
100	100	100	105	105	105	105	105	107
107	107	107	109	109	109	111	111	115

a) Calcule la media, la mediana y el rango de los datos de los grupos A y B — Clase 1 y 2
b) ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias entre los datos de los grupos A y B.
c) Dibuje el polígono de frecuencias de los grupos A y B en un mismo eje y compare los resultados.
d) ¿Qué datos están más dispersos?

2. Se tomaron 10 muestras de 10 estudiantes en dos grupos de noveno grado y se les preguntó la calificación obtenida en matemáticas:

Grupo 1: 63, 64, 67, 68, 69, 70, 77, 79, 80, 83.

Grupo 2: 62, 65, 67, 68, 70, 74, 76, 77, 79, 82.

a) Calcule la media y el rango de los datos del grupo 1 y grupo 2. — Clase 1 y 2
b) Calcule la desviación absoluta media de los datos.
c) ¿Qué datos están más dispersos? ¿Por qué?
d) ¿Cuáles son las semejanzas y diferencias de los datos del grupo 1 y 2?

3. El tamaño de un documento digitalizado en la computadora se mide en kilobyte (KB) los tamaños de 9 documentos son: 98, 838, 34, 96, 582, 289, 223, 174, 107.
a) Calcule la media y el rango.
b) Calcule la desviación absoluta media de los datos.
c) Calcule la varianza y la desviación estándar.

4. Calcule la varianza y desviación estándar para los datos del ejercicio 2.

Estas varianzas se calculan por la fórmula de Ejemplo 3.5.

3.a) Media = 271.222... ≈ 271.22
rango = 804.
b) desviación absoluta de la media
= 198.962... ≈ 198.96
c) varianza = 63764.044... ≈ 63764.04
desviación estándar
= 252.515... ≈ 252.52

4) Grupo 1: varianza 45.8
desviación estándar = 6.767... ≈ 6.77
Grupo 2: varianza = 38.8
desviación estándar = 6.228... ≈ 6.23

10

MATEMÁTICA II

Guía del Docente

ESTELA B

Prisma labrada de forma cuagrandular, tallada en roca de toba volcánica, representa en su cara principal a un personaje ricamente vestido y ataviado con ornamentos. Se trata de la representación de décimo tercer gobernante de Copán, Uaxadajuun Ub'aah K'awiil, también conocido como 18 Conejo.

Los ricos atavíos de este personaje al parecer representan un rito relacionado con el inframundo.

Fotografía: © José Antonio Ramos Cartagena.

República de Honduras
Secretaría de Educación