República de Honduras
Secretaría de Educación

MATEMÁTICA IV

Guía del Docente

Undécimo grado

11

Bachillerato en Ciencias y Humanidades
Educación Media

Nota: Cualquier observación encontrada en esta obra, por favor escribir a la Dirección General de Tecnología Educativa de la Secretaría de Educación, para ser rectificado y mejorado en las próximas ediciones, nuestro correo electrónico es: **tecnologia.educativa@se.gob.hn**

Presentación

La Secretaría de Educación presenta la **"Guía del Docente"** de Matemática para Educación Media, que tiene su fundamento en el Plan de Estudio y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, misma que fue elaborada por un equipo técnico en el marco del Proyecto Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemáticas (PROMETAM FASE III).

Con esta Guía se pretende apoyar al docente en la intervención activa de mediación entre el contenido y las formas de aprendizaje. Además, brindar apoyo metodológico para favorecer los aprendizajes significativos que impacten en la motivación de los jóvenes y como consecuencia, se incremente la retención y aprobación, y se mejore el rendimiento académico de los estudiantes en los centros educativos.

En la búsqueda del cambio hacia una nueva Honduras, el recurso humano es el único capaz de generar riquezas a través de la aplicación de sus conocimientos, competencias y acciones; por lo que se espera que los docentes realicen una labor educativa con calidad y pertinencia y la Secretaría de Educación a su vez, se compromete para que la población tenga acceso a una educación, que mejore en cada generación.

Secretaría de Estado
en el Despacho de Educación

Instructivo de uso
“Guía del Docente”

Esta Guía está diseñada para orientar a los docentes cómo enseñar los contenidos para cada grado, prescritos en el Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas, usando como parte del proceso el Libro del Estudiante.

Hay un plan de estudio para todas las clases y se espera que el docente lo ajuste según el rendimiento y el entorno de sus estudiantes.

En el Libro del Estudiante hay una diversidad de ejercicios para garantizar el trabajo individual. Muchos de éstos podrán ser utilizados como tareas para resolver en casa y deben ser revisados individualmente o en forma colectiva, siempre dirigida por el docente para afianzar el conocimiento.

Para mayor información véase la “Estructura y Aplicación de la Guía del Docente”.

Índice

Estructura y aplicación de la Guía del Docente

Desarrollo de Clases de cada Unidad

ESTRUCTURA Y APLICACIÓN DE LA GUÍA DEL DOCENTE

1. Objetivo de la Guía del Docente

Este libro es una guía que explica el plan anual de estudio y el desarrollo de las clases basado en el contenido del Plan de Estudios y Programas Curriculares, Área de Matemáticas. Si el Docente aprovecha esta Guía, le ayudará a desarrollar su clase de manera efectiva y eficientemente para que el rendimiento de los estudiantes mejore.

2. Estructura de la Guía del Docente

Estructura Global: Está formada por dos partes: la "Estructura y aplicación de la Guía del Docente" que explica el contenido de la Guía y la forma como se utiliza y el "Desarrollo de Clases de cada Unidad" que describe los pasos a seguir para alcanzar los objetivos de cada clase.

Estructura de la Unidad: En cada unidad se desarrolla paso a paso los contenidos conceptuales tomados del Plan de Estudios y Programas Curriculares (PEPC). La estructura de cada unidad se explica detalladamente en el instructivo.

3. Instructivo para el uso de la Guía del Docente y del Libro del Estudiante

Esta Guía del Docente (GD) fue diseñada para enseñar los contenidos indicados en el PEPC, utilizando eficazmente el Libro del Estudiante (LE), para explicar los principios de cada tema y la manera de desarrollar la clase.

Aunque se indica la manera de usar el LE, no necesariamente se describe una forma única de desarrollar la clase, sin embargo, se ha intentado que los docentes puedan dar la clase sin dedicar mucho tiempo a los preparativos. El docente podrá hacer las modificaciones adecuadas cuando lo crea necesario.

En la GD se presenta la Programación Semestral y Desarrollo de Clases de cada Unidad.

4. Programa Semestral

Es la lista de los contenidos del grado indicados en el PEPC, con el número de clases asignadas a cada tema. Con la misma, los docentes deben conocer qué tienen que enseñar, y hacer su plan semestral de modo que se cumplan todos los temas.

Desarrollo de Clases de cada Unidad

Está divida en cinco secciones:

1) Competencias de la unidad: Presenta las competencias que se pretenden desarrollar en el estudiante en el desarrollo de la unidad.

2) Relación y desarrollo: Muestra el flujo de los contenidos del grado por semestre, relacionándolos con contenidos de grados anteriores y con las matemáticas siguientes.

3) Plan de estudio de la unidad: Presenta la distribución de las clases en cada lección.

4) Puntos de lección: Presenta aspectos importantes a considerar en el desarrollo de cada lección.

5) Desarrollo de clase: Presenta el objetivo, la evaluación y el proceso de enseñanza.

1) Competencias de la unidad

Se presentan las competencias para cada unidad, tal y como están descritas en el PEPC Área de Matemáticas.

2) Relación y desarrollo

Se muestran los contenidos de la unidad y su relación con otras unidades (ya sean de este grado, o anteriores). Los docentes deben diagnosticar si los estudiantes tienen dominio sobre los contenidos relacionados de los grados anteriores, de lo contrario dependiendo del nivel de insuficiencia en el manejo, se puede hacer lo siguiente:

(a) Si la mayoría de los estudiantes carecen de comprensión, de tal modo que no se puede enseñar el contenido del grado, se les da un repaso de dos o tres horas clase. Para el menor manejo del contenido, es mejor darles tareas al mismo tiempo que la enseñanza del contenido del grado.

(b) Si la mayoría entiende bien se le puede dar orientación individual a los que lo necesiten.

3) Plan de estudio

Se indica la distribución de las horas y el contenido. Como el tiempo total de la clase de matemáticas es limitado, se recomienda seguir los lineamientos indicados en la Guía.

4) Puntos de lección

Como cada unidad está dividida en lecciones, en esta parte se explican los puntos en que se deben prestar mayor atención durante el desarrollo de la clase. Los docentes deben entender la idea central por lo cual se desarrolla el plan de clase.

5) Desarrollo de clase

Está descrito el plan de cada clase para 45 minutos e incluye los objetivos, la evaluación y el proceso de enseñanza. No es recomendable prolongar la hora de clase, salvo en el caso donde los estudiantes hacen una tarea especial o el horario así lo exige.

a. Objetivo

Se representa el objetivo de la clase (hay casos donde un sólo aplica a dos o más clases seguidas). Es necesario tener éste claro para cada clase.

b. Evaluación

Se indican los ejercicios que el estudiante debe realizar en forma independiente o grupal considerando la estrategia que decida el docente con el propósito de verificar el logro del objetivo.

En caso de que existan dificultades en la mayoría de los estudiantes el docente debe reforzar esa parte.

c. Proceso de enseñanza

Se proponen actividades que el docente debe realizar durante la clase siguiendo el orden propuesto en el Libro del Estudiante.

La propuesta se basa en comenzar la clase planteando un ejemplo y tratar de que los estudiantes lo resuelvan sin consultar el LE, por lo que se debe garantizar el tiempo suficiente para que piensen y propongan sus ideas, luego los docentes tienen que darles explicaciones de forma concisa y con pocas palabras tratando de no hablar mucho, y considerando las ideas de los estudiantes concluir en la regla, definición, principio, etc. de la clase, para luego realizar la ejercitación.

En este proceso de enseñanza en algunas clase se utiliza la simbología M, RP y *.

M: Significa preguntas o indicaciones de los docentes a los estudiantes.

No es recomendable hace preguntas que los estudiantes pueden contestar con respuestas breves como “si” y “no”. Son muy importantes las preguntas que hacen pensar a los estudiantes, sobre todo en cada clase se necesita una pregunta principal que los concentre en el tema de la clase.

RP: Significa reacciones previsibles de los estudiantes.

Hay que preveer las reacciones de los estudiantes, incluyendo las respuestas equivocadas. Para corregir las respuestas equivocadas, no es bueno decir solamente <<esta mala>> y enseñar la respuesta correcta o hacer que contesten otros niños.

Hay que dar tiempo para que piensen porque está equivocada, al mismo tiempo los docentes tienen que pensar por qué se han equivocado y reflexionar sobre su manera de enseñar y preguntar. Además las respuestas de sus estudiantes pueden ser indicadores para evaluar el nivel de entendimiento.

***:** Hace referencia a los puntos y sugerencias de la clase y actividades del docente. Se refiere a puntos importantes que el docente debe tomar en cuenta para que el desarrollo de la clase sea exitoso.

En algunos casos en el LE aparecen ciertas clase utilizando asterisco (*) esto significa que son clases o ejemplos, ejercicios opcionales que el docente puede desarrollar dependiendo el nivel de entendimiento de los estudiantes.

Para ser más práctico el uso de esta GD en el aula de clases se da una descripción general, por lo tanto, no se les indica a los docentes todas las acciones a realizar, así que según la necesidad hay que agregar más o modificarlas. En forma general se aplican las siguientes acciones.

- La GD no dice nada sobre la evaluación continua porque ésta corresponde al objetivo, sin embargo, propone como se puede evaluar éste, a través de la ejercitación. La evaluación debe hacerse durante la clase y al final de la misma según la necesidad.
- No está indicado el repaso de la clase. Éste se hace según la necesidad.
- Cuando se les dan los ejercicios, los docentes deben recorrer el aula identificando los errores de los estudiantes y ayudándoles a corregirlos.
- Cuando la cantidad de ejercicios es grande, se hace la comprobación y corrección de errores cada 5 ejercicios, o una adecuada cantidad, para que los estudiantes no repitan el mismo tipo de equivocación.
- Preparar tareas como ser ejercicios complementarios para los estudiantes que terminan rápido.
- La orientación individual no está indicada, sin embargo, es imprescindible. Los docentes pueden realizarla en las ocasiones siguientes:
  - Cuando recorren el aula después de dar los ejercicios.
  - En el receso después de la clase.
  - En la revisión del cuaderno (hay que tener el cuidado que los estudiantes no pierdan el tiempo haciendo fila para que el docente corrija)

En la Guía del Docente se indica en la página del Libro del Estudiante las partes punteadas que se sugieren que el docente debe tener en la pizarra, sin embargo cada uno puede hacer su propia estructura de uso de la pizarra.

La estructura del LE y su uso

El docente puede comenzar cada unidad con un repaso de lo aprendido anteriormente. Esta parte no está indicada en las horas de clase y los docentes asignan el tiempo para trabajar según su criterio.

La unidad está dividida en lecciones, clases, ejercicios de la lección (algunas unidades no tienen ejercicios de lección). Cada clase tiene ejemplos y ejercicios.

Los ejemplos corresponden a los temas importantes de la clase. En la orientación de estos ejemplos es importante hacer que los estudiantes piensen por sí mismos; por lo tanto, para presentarlos, los docentes lo escriben en la pizarra para que los estudiantes no vean la respuesta en el LE antes de tratar de resolverlo.

Para resaltar los puntos importantes de la clase estos se remarcan.

En el LE se proponen ejercicios de lección esto con el objetivo de suministrar suficientes ejercicios para que el estudiante pueda resolver en el aula o como tarea en casa. El docente deberá utilizarlos de acuerdo a conveniencia ya que no se tiene tiempo estipulado para esta sección.

La página del LE tiene dos columnas. Una columna de contenidos y otra columna de recordatorios, sugerencias o notas. En el desarrollo de cada clase se encuentran varios iconos, que a continuación se explica cada uno.

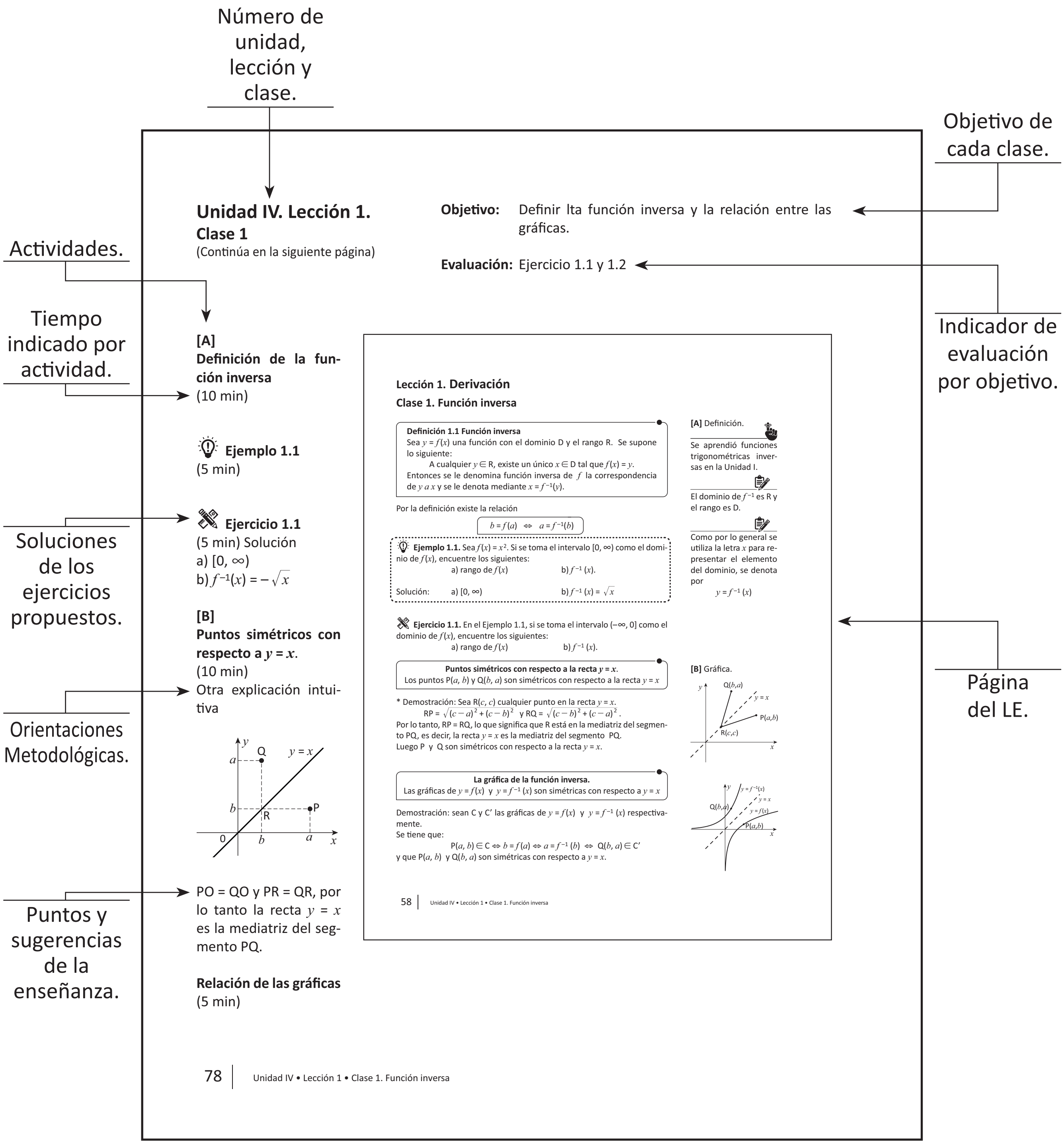
Cada ícono representa:

Icono	Explicación
	El desarrollo de un ejemplo.
	La propuesta de ejercicios o problemas.
	Aclaraciones o ampliaciones de conceptos trabajados en el libro a la vez algunos aspectos que se deben tener especial cuidado cuando se está estudiando un tema.
	Recordatorios de temas, fórmulas, conceptos, etc., vistos en años o clases anteriores.
	Conceptos, fórmulas, principios, reglas, etc., que es necesario que se memoricen para lograr mejor comprensión de los contenidos.
	Sugerencias que se proporcionan al momento de resolver un ejercicio o problema.

La GD lleva la solución de los ejercicios propuestos en el LE. Los docentes tienen que tomar en cuenta que en el caso de ejercicios y problemas con respuestas abiertas puede haber otras respuestas.

A continuación se explica el significado y simbología de la página del desarrollo de clases.

Significado de cada expresión y simbología en la página del desarrollo de clases.



Unidad IV. Lección 1.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Definir lta función inversa y la relación entre las gráficas.

Evaluación: Ejercicio 1.1 y 1.2

[A]
Definición de la función inversa
(10 min)

Ejemplo 1.1
(5 min)

Ejercicio 1.1
(5 min) Solución
a) $[0, \infty)$
b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

[B]
Puntos simétricos con respecto a $y = x$.
(10 min)
Otra explicación intuitiva

PO = QO y PR = QR, por lo tanto la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento PQ.

Relación de las gráficas
(5 min)

Lección 1. Derivación
Clase 1. Función inversa

Definición 1.1 Función inversa
Sea $y = f(x)$ una función con el dominio D y el rango R. Se supone lo siguiente:
A cualquier $y \in$ R, existe un único $x \in$ D tal que $f(x) = y$.
Entonces se le denomina función inversa de f la correspondencia de y a x y se le denota mediante $x = f^{-1}(y)$.

Por la definición existe la relación
$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = x^2$. Si se toma el intervalo $[0, \infty)$ como el dominio de $f(x)$, encuentre los siguientes:
a) rango de $f(x)$ b) $f^{-1}(x)$.

Solución: a) $[0, \infty)$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Ejercicio 1.1. En el Ejemplo 1.1, si se toma el intervalo $(-\infty, 0]$ como el dominio de $f(x)$, encuentre los siguientes:
a) rango de $f(x)$ b) $f^{-1}(x)$.

Puntos simétricos con respecto a la recta $y = x$.
Los puntos P(a, b) y Q(b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$

* Demostración: Sea R(c, c) cualquier punto en la recta $y = x$.
RP = $\sqrt{(c-a)^2 + (c-b)^2}$ y RQ = $\sqrt{(c-b)^2 + (c-a)^2}$.
Por lo tanto, RP = RQ, lo que significa que R está en la mediatriz del segmento PQ, es decir, la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento PQ.
Luego P y Q son simétricos con respecto a la recta $y = x$.

La gráfica de la función inversa.
Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a $y = x$

Demostración: sean C y C' las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ respectivamente.
Se tiene que:
$$P(a, b) \in C \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow Q(b, a) \in C'$$
y que P(a, b) y Q(b, a) son simétricas con respecto a $y = x$.

[A] Definición.
Se aprendió funciones trigonométricas inversas en la Unidad I.

El dominio de f^{-1} es R y el rango es D.

Como por lo general se utiliza la letra x para representar el elemento del dominio, se denota por
$y = f^{-1}(x)$

[B] Gráfica.

58 | Unidad IV • Lección 1 • Clase 1. Función inversa

78 | Unidad IV • Lección 1 • Clase 1. Función inversa

4. Programación Semestral:

Unidad (horas)	Contenido	Pág. de GD (Pág. de LE)
I. Trigonometría (8 horas)	Teorema de la adición	2 – 15 (2 – 12)
II. Limite y continuidad (3 y *10 horas)	Límite de funciones	17 – 34 (14 – 26)
	Continuidad de funciones	35 – 38 (27 – 30)
	Asíntotas	38 – 39 (30 – 31)
III. Diferenciación e integrales de funciones polinómicas (22 horas)	Derivada de funciones polinómicas	40 – 48 (34 – 38)
	Aplicación de las derivadas	49 – 59 (39 – 45)
	Integrales	60 – 73 (46 – 55)
IV. Derivada de funciones trascendentales (*21 horas)	Derivación	74 – 82 (58 – 62)
	Derivada de las funciones trascendentales	83 – 88 (63 – 68)
	Aplicación de derivada	89 – 103 (69 – 77)

Desarrollo de Clases

Matemáticas IV
Unidad I

Trigonometría

1. Competencias de la Unidad

1. Aplicar las funciones trigonométricas para resolver problemas científico tecnológico.
2. Resolver ecuaciones trigonométricas.
3. Valorar la importancia de las funciones trigonométricas para resolver problemas de la ciencia y la tecnología.

2. Relación y Desarrollo

Matemáticas 9º

Semejanza de triángulos
- Criterio de semejanza de triángulos rectángulos

Matemática I

Unidad I: Fundamentos de aritmética y álgebra
- Lección 3: Coordenadas planas
  - Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Unidad II: Introducción a la trigonometría

Matemática II

Unidad II: Funciones trascendentales
- Lección 3: Resolución de triángulos
- Lección 4: Las gráficas de las funciones trigonométricas

Matemática IV

Unidad I: Trigonometría
- Lección 1: Teorema de adición

Matemática IV

Unidad II: Límites y continuidad

Unidad IV: Derivadas de funciones trascendentales

3. Plan de Estudio de la Unidad (8 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1 Teorema de adición	1	Demostración del teorema de adición de seno y coseno	
	2	Demostración del teorema de adición de tangente, ejemplos	
	3	Simples ejemplos del teorema de adición	
	4	Demostración y simples ejemplos de la fórmula del ángulo doble	$\mathrm{sen}^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$
	5	Demostración y simples ejemplos de la fórmula del ángulo medio	
	6	Ecuaciones trigonométricas (uso de la relación entre seno y coseno)	
	7	Ecuaciones trigonométricas (uso de la fórmula del ángulo doble)	
	8	Funciones trigonométricas inversas	
		Ejercicios de la lección	
Problemas de la Unidad		Problemas de la Unidad A	
		Problemas de la Unidad B	

Puntos de lección

Lección 1: Teorema de adición

Las soluciones de las ecuaciones del libro que utilizan el teorema de adición son los ángulos especiales, por lo tanto, no hay necesidad de usar la calculadora.

Los estudiantes tienen que memorizar las fórmulas de la clase 1 y deben ser capaces de deducir las demás tomando como base las anteriores. Para lograr esta meta, una manera es escribir el proceso de deducción repetidas veces, primero consultando el Libro del Estudiante, luego sin él.

Unidad I. Lección 1.
Clase 1

Objetivo: Entender la demostración del teorema de adición de seno y coseno.

Evaluación: Memorizar las fórmulas.

Presentación de las fórmulas. (8 min)

Demostración de las fórmulas. (30 min)

El punto es aplicar la fórmula de la distancia y demostrar primero la fórmula del inciso d).

En la secuencia de la deducción d) → c) → b) → a), hay que recordar a los estudiantes las fórmulas aprendidas en Matemática I Unidad II.

Resumen (7 min)

Lección 1. Teorema de adición

Clase 1. Teorema de adición de seno y coseno

Teorema 1.1. Teorema de adición de seno y coseno

a) $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$
b) $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta$
c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$
d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

Demostración de d). En la Fig. 1.1

$$\begin{aligned}(PQ)^2 &= (\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\beta-\text{sen}\alpha)^2\\ &= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\\ &\quad + \text{sen}^2\beta - 2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + \text{sen}^2\alpha\\ &= 2(1-\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta)\end{aligned}$$

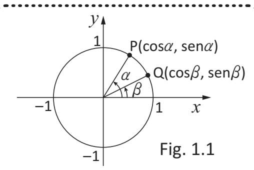


Fig. 1.1

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
I. II. Clase 2.5

Se obtiene la Fig. 1.2, rotando $-\beta$ a los puntos P y Q de la Fig. 1.1.

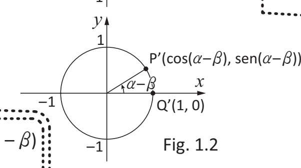


Fig. 1.2

$$\begin{aligned}(P'Q')^2 &= (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\text{sen}(\alpha-\beta)-0)^2\\ &= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \text{sen}^2(\alpha-\beta)\\ &= 2(1-\cos(\alpha-\beta))\end{aligned}$$

Como (por construcción) PQ = P'Q', se tiene que:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

Demostración de c). En d) sustituyendo $-\beta$ en β, se tiene que:

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \text{sen}\alpha\,\text{sen}(-\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$
$\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\beta$
I. II. Clase 2.8

Demostración de b). En c) sustituyendo $\frac{\pi}{2} - \beta$ en β, se tiene que:

$$\cos\left(\alpha + \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right) = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

$$-\text{sen}(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha\cos\beta$$

Luego $\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\beta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right) = -\text{sen}(\alpha-\beta)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \text{sen}\beta$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\beta$
I. II. Clase 2.9

Demostración de a). En b) sustituyendo $-\beta$ en β, se tiene que:

$$\text{sen}(\alpha-(-\beta)) = \text{sen}\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\,\text{sen}(-\beta)$$

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

2 | Unidad I • Lección 1 • Clase 1. Teorema de adición de seno y coseno

Objetivo: **[A]** Entender la demostración del teorema de adición de tangente.
[B] Aplicar las fórmulas en ángulos especiales.

Evaluación: [A] Memorizar las fórmulas, [B] Ejercicio 1.1

Unidad I. Lección 1.
Clase 2

Clase 2. Teorema de adición de tangente, ejemplos

Teorema 1.2. Teorema de adición de tangente

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

b) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Demostración

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

$= \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ Dividiendo el denominador y el numerador entre $\cos\alpha\cos\beta$

$= \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

b) En a) sustituyendo $-\beta$ en β, se tiene que:

$\tan(\alpha+(-\beta)) = \dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$, luego

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

Ejemplo 1.1. Utilizando la relación: 75° = 45° + 30°, encuentre los valores de sen75°, cos75° y tan75°

Solución

sen75° = sen(45° + 30°)
= sen 45° cos 30° + cos45° sen30°

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

cos75° = cos(45° + 30°)
= cos45° cos30° – sen45° sen30°

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

tan75° = tan(45° + 30°)

$= \dfrac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$

Ejercicio 1.1. Utilice el teorema de adición para encontrar los valores:
a) sen15°; b) cos15°; c) tan15°; d) sen105°; e) cos105°; f) tan105°

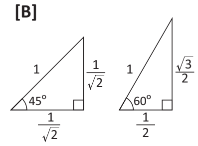
[A]

$\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$

$\tan(-\beta) = -\tan\beta$
I. II. Clase 2.8

[B]



La otra manera es

$\tan75^\circ = \dfrac{\operatorname{sen}75^\circ}{\cos75^\circ}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$= 2+\sqrt{3}$

Unidad I • Lección 1 • Clase 2. Teorema de adición de tangente, ejemplos | 3

105° = 60° + 45°

d) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e) $-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

f) $-2-\sqrt{3}$

Otra manera: [105° = 15° + 90°
sen105° = sen(15° + 90°) = cos15°
cos105° = cos(15° + 90°) = –sen15°
$\tan105^\circ = \tan(15^\circ+90^\circ) = -\dfrac{1}{\tan15^\circ}$]

[A]
Presentación de las fórmulas. (5 min)

Demostración (10 min)
En la demostración se utiliza la relación

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

[B]

Ejemplo 1.1
(12 min)
Los estudiantes deben tener memorizadas las razones de las medidas de los lados de los triángulos especiales.

Ejercicio 1.1
(18 min) Solución
15° = 60° – 45° ó
45° – 30°

a) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $2-\sqrt{3}$

Unidad I. Lección 1.
Clase 3

Objetivo: Aplicar el teorema de adición de manera directa.

Evaluación: Ejercicio 1.2, Ejercicio 1.3

Ejemplo 1.2
(20 min)

Ejercicio 1.2
(10 min) Solución

$\text{sen}(\alpha - \beta)$

$= \text{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \,\text{sen}\beta$

$= \dfrac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$

$\cos(\alpha - \beta)$

$= \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

$= \dfrac{-3\sqrt{5} + 8}{15}$

$\tan(\alpha - \beta)$

$= \dfrac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$

$= \dfrac{108 + 50\sqrt{5}}{19}$

Ejercicio 1.3
(15 min) Solución:

a) $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{sen}\beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\text{sen}(\alpha + \beta) = \dfrac{2\sqrt{10} - 2}{9}$

$\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{-4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{9}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$; $\text{sen}\beta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\text{sen}(\alpha - \beta) = \dfrac{3 - \sqrt{105}}{16}$ $\quad \cos(\alpha + \beta) = \dfrac{-3\sqrt{15} + \sqrt{7}}{16}$

Clase 3. Simples ejemplos del teorema de adición

Ejemplo 1.2. Sean $90° < \alpha < 180°$ y $0° < \beta < 90°$.
Cuando $\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{3}$ y $\cos\beta = \frac{3}{5}$, encuentre los siguientes valores:
a) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\tan(\alpha + \beta)$

Solución
Como $90° < \alpha < 180°$, $\cos\alpha < 0$. Por lo tanto,

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como $0° < \beta < 90°$, $\text{sen}\,\beta > 0$. Por lo tanto,

$\text{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{6 - 4\sqrt{5}}{15}$ $\quad \left(= \frac{2}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{15}\right)$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

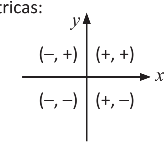
$= -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3\sqrt{5} + 8}{15}$ $\quad \left(= -\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{8}{15}\right)$

c) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

$= \frac{6 - 4\sqrt{5}}{15} \div \left(-\frac{3\sqrt{5} + 8}{15}\right) = -\frac{6 - 4\sqrt{5}}{15} \cdot \frac{15}{3\sqrt{5} + 8}$

$= -\dfrac{(6 - 4\sqrt{5})(8 - 3\sqrt{5})}{(8 + 3\sqrt{5})(8 - 3\sqrt{5})} = \dfrac{-108 + 50\sqrt{5}}{19}$

La condición del ángulo define el signo de las funciones trigonométricas:



$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Otra manera
$\tan(\alpha + \beta)$

$= \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

$= \dfrac{-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{4}{3}}$

$= \dfrac{-6 + 4\sqrt{5}}{8 + 3\sqrt{5}}$

Ejercicio 1.2. En el Ejemplo 1.2 encuentre los valores de $\text{sen}(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$.

Ejercicio 1.3.
a) Sean $180° < \alpha < 270°$ y $270° < \beta < 360°$. Cuando $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \frac{2}{3}$, encuentre los valores de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$.

b) Sean $270° < \alpha < 360°$ y $90° < \beta < 180°$. Cuando $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, encuentre los valores de $\text{sen}(\alpha - \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$.

4 | Unidad I • Lección 1 • Clase 3. Simples ejemplos del teorema de adición

---

Objetivo: Deducir la fórmula del ángulo doble del teorema de adición.

Unidad I. Lección 1.
Clase 4

Evaluación: Ejercicio 1.4 a) y b)

Clase 4. Fórmulas del ángulo doble

Teorema 1.3. Fórmulas del ángulo doble
a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$
b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$
c) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

En b) la segunda y la tercera se utilizarán con más frecuencia.

Demostración. Del teorema de adición se tiene que:

a) $\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

b) $$\begin{aligned}\cos2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\\ &\begin{cases} = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1\\ = (1-\operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\end{cases}\end{aligned}$$

c) $\tan2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

Ejemplo 1.3. Sean $90° < \alpha < 180°$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$. Encuentre los siguientes valores:
a) $\operatorname{sen}2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\tan 2\alpha$

De $90° < \alpha < 180°$, se sabe el signo de $\cos\alpha$.

Solución:
De $90° < \alpha < 180°$, se tiene que $\cos\alpha < 0$, por lo tanto,

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

a) $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

c) $\tan 2\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos2\alpha} = \left(-\frac{24}{25}\right) \div \frac{7}{25} = -\frac{24}{25}\cdot\frac{25}{7} = -\frac{24}{7}$

Note que para el cálculo de $\cos2\alpha$, basta el valor de $\operatorname{sen}\alpha$.

Ejercicio 1.4. Encuentre los valores de $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\tan 2\alpha$ en los siguientes casos.
a) $180° < \alpha < 270°$ y $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$
b) $270° < \alpha < 360°$ y $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
* c) $0° < \alpha < 180°$ y $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

En c) identifique el cuadrante al que pertenece el ángulo α.

Teorema 1.3 (15 min)
Los estudiantes tienen que ser capaces de deducir estas fórmulas del teorema de adición.

Ejemplo 1.3
(10 min)

Ejercicio 1.4
(20 min)

a) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$
$\operatorname{sen}2\alpha = \frac{24}{25}$,
$\cos2\alpha = -\frac{7}{25}$
$\tan2\alpha = -\frac{24}{7}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$
$\operatorname{sen}2\alpha = -\frac{24}{25}$,
$\cos2\alpha = \frac{7}{25}$
$\tan2\alpha = -\frac{24}{7}$

*c) De $0° < \alpha < 180°$ y $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ se sabe que $0° < \alpha < 90°$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{sen}2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos2\alpha = \frac{3}{5}$, $\tan2\alpha = \frac{4}{3}$

Unidad I. Lección 1.
Clase 5

Objetivo: Deducir la fórmula del ángulo medio de la fórmula del ángulo doble.

Evaluación: Ejercicio 1.5, Ejercicio 1.6

Teorema 1.4. (10 min)
Que los estudiantes deduzcan estas fórmulas de la fórmula del ángulo doble. No deben memorizarlos.

Ejemplo 1.4
(8 min)
Hay que decidir el signo, según el cuadrante al que pertenece el ángulo.

Ejercicio 1.5
(8 min) Solución

$$\cos 22.5° = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22.5° = \frac{\operatorname{sen} 22.5°}{\cos 22.5°}$$
$$= \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$
$$\left(= \sqrt{2}-1\right)$$

Ejemplo 1.5
(10 min)

Ejercicio 1.6
(9 min)

a) $90° < \frac{\alpha}{2} < 180°$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{5}{6}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$$

Clase 5. Fórmulas del ángulo medio

Teorema 1.4. Fórmulas del ángulo medio

a) $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ b) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ c) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

Demostración:

a) De la fórmula del ángulo doble $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$, se tiene que:

$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ … despejando para $\operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ … sustituyendo α por $\frac{\alpha}{2}$

b) De $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, se tiene que:

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ … despejando para $\cos^2\alpha$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ … sustituyendo α por $\frac{\alpha}{2}$

c) $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \div \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Ejemplo 1.4. Encuentre el valor de sen 22.5°.

Utilice $22.5° = \frac{45°}{2}$

Solución

$$\operatorname{sen}^2 22.5° = \operatorname{sen}^2\frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Como $\operatorname{sen}22.5° > 0$, se tiene que: $\operatorname{sen} 22.5° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Ejercicio 1.5. Encuentre los valores de cos 22.5° y tan 22.5°.

Ejemplo 1.5. Sean $0° < \alpha < 180°$ y $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Encuentre los siguientes valores: a) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ c) $\tan\frac{\alpha}{2}$

Solución. Como $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$, se tiene que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} > 0$ y $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.
Luego:

a) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\left(= \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

c) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 1.6. Encuentre los valores de $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\tan\frac{\alpha}{2}$ en los siguientes casos:

a) $180° < \alpha < 360°$ y $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ *b) $-180° < \alpha < 0°$ y $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$

6 | Unidad I • Lección 1 • Clase 5. Fórmulas del ángulo medio

*b) $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$ y $-90° < \frac{\alpha}{2} < 0°$

cuando $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$$

cuando $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = -3$$

Objetivo: Aplicar la relación entre seno y coseno a la solución de ecuaciones.
Evaluación: Ejercicios 1.7
Objetivo: Aplicar la fórmula del ángulo doble a la solución de ecuaciones.
Evaluación: Ejercicios 1.8, Ejercicios 1.9

Unidad I. Lección 1.
Clase 6
Clase 7
(Continúa en la siguiente página)

Clase 6. Ecuaciones trigonométricas (uso de la relación entre seno y coseno)

Ejemplo 1.6. Encuentre los valores de θ ($0° \le \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación: $2\cos^2\theta - \text{sen}\theta - 1 = 0$
Solución. Sustituyendo $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$, se tiene que:
$2(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}\theta - 1 = 0$,
$2\text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta - 1 = 0$
$(2\text{sen}\theta - 1)(\text{sen}\theta + 1) = 0$
$\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$ o $\text{sen}\theta = -1$. Como $0° \le \theta < 360°$,
cuando $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = 30°$ o $150°$
cuando $\text{sen}\theta = -1$, $\theta = 270°$

Entonces $\theta = 30°, 150°, 270°$

Convierta la ecuación en una ecuación de segundo grado de $\text{sen}\theta$.

$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ o $B = 0$

Ejercicio 1.7. Encuentre los valores de θ ($0° \le \theta < 360°$), que satisfacen la ecuación:
a) $2\cos^2\theta + \text{sen}\theta - 1 = 0$ b) $2\text{sen}^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$
c) $2\cos^2\theta - 3\text{sen}\theta - 3 = 0$ d) $4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\theta - 7 = 0$

Clase 7. Ecuaciones trigonométricas (uso de las fórmulas del ángulo doble)

Ejemplo 1.7. Encuentre los valores de θ ($0° \le \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación: $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$

Solución. $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$
$(2\cos^2\theta - 1) - 3\cos\theta + 2 = 0$ sustituyendo $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$
$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$ factorizando
$\cos\theta = \frac{1}{2}$ o $\cos\theta = 1$. Como $0° \le \theta < 360°$,
cuando $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = 60°$ o $300°$
cuando $\cos\theta = 1$, $\theta = 0°$

Entonces $\theta = 0°, 60°, 300°$

Convierta la ecuación en la ecuación de segundo grado de $\cos\theta$.

Ejercicio 1.8. Encuentre los valores de θ ($0° \le \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación:
a) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ b) $\cos 2\theta + \text{sen}\theta = 0$
c) $\cos 2\theta - 3\text{sen}\theta - 2 = 0$

Ejemplo 1.6
(10 min)

Ejercicio 1.7
(35 min) Solución
a) $2(1 - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}\theta - 1 = 0$
$2\text{sen}^2\theta - \text{sen}\theta - 1 = 0$
$(2\text{sen}\theta + 1)(\text{sen}\theta - 1) = 0$
$\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}, 1$
$\theta = 90°, 210°, 330°$

b) $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$
$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$
$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}, 1$
$\theta = 0°, 60°, 300°$

c) $2(1 - \text{sen}^2\theta) - 3\text{sen}\theta - 3 = 0$
$2\text{sen}^2\theta + 3\text{sen}\theta + 1 = 0$
$(2\text{sen}\theta + 1)(\text{sen}\theta + 1) = 0$
$\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}, -1$
$\theta = 210°, 270°, 330°$

d) $4(1 - \text{sen}^2\theta) + 4\sqrt{3}\,\text{sen}\theta - 7 = 0$
$4\text{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\theta + 3 = 0$
$(2\text{sen}\theta - \sqrt{3})^2 = 0$
$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\theta = 60°, 120°$

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Ejemplo 1.7
(10 min)

Ejercicio 1.8.
(12 min) Solución
a) $(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta = 0$
$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}, -1$; $\theta = 60°, 180°, 300°$.

b) $(1 - 2\text{sen}^2\theta) + \text{sen}\theta = 0$
$(2\text{sen}\theta + 1)(\text{sen}\theta - 1) = 0$
$\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}, 1$; $\theta = 90°, 210°, 330°$.

c) $(1 - 2\text{sen}^2\theta) - 3\text{sen}\theta - 2 = 0$
$(2\text{sen}\theta + 1)(\text{sen}\theta + 1) = 0$
$\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}, -1$ $\theta = 210°, 270°, 330°$.

Unidad I. Lección 1.

Clase 7
(Continuación)

Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender las funciones inversas de y = sen$x$, y = cos$x$, e y = tan$x$.

Evaluación: Ejercicio 1.10, Ejercicio 1.11

Ejemplo 1.8
(10 min)

Ejercicio 1.9
(13 min) Solución

a) $2\text{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta = 0$
$(2\text{sen}\theta + 1)\cos\theta = 0$
$\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}$, $\cos\theta = 0$
$\theta = 90°, 210°, 270°, 330°$

b) $2\text{sen}\theta\cos\theta - \text{sen}\theta = 0$
$(2\cos\theta - 1)\text{sen}\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\text{sen}\theta = 0$
$\theta = 0°, 60°, 180°, 300°$

c) $2\text{sen}\theta\cos\theta - \sqrt{3}\ \text{sen}\theta = 0$
$(2\cos\theta - \sqrt{3})\text{sen}\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\theta = 0$,
$\theta = 0°, 30°, 180°, 330°$.

d) $2\text{sen}\theta\cos\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$
$(2\text{sen}\theta + \sqrt{2})\cos\theta = 0$
$\text{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = 0$
$\theta = 90°, 225°, 270°, 315°$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

Definición de $y = \text{sen}^{-1}x$
(10 min)

Ejemplo 1.8. Encuentre los valores de θ ($0° \le \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación: $\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\theta = 0$.

Solución. $\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\theta = 0$
$2\,\text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}\theta = 0$ sustituyendo $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$
$\text{sen}\theta(2\cos\theta + 1) = 0$ factorizando
$\text{sen}\theta = 0$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Como $0° \le \theta < 360°$,
cuando $\text{sen}\theta = 0$, $\theta = 0°$ o $180°$
cuando $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = 120°$ o $240°$
$\theta = 0°, 120°, 180°, 240°$

Ejercicio 1.9. Encuentre los valores de θ ($0° \le \theta < 360°$) que satisfacen la ecuación:
a) $\text{sen}\,2\theta + \cos\theta = 0$
b) $\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\theta = 0$
c) $\text{sen}\,2\theta - \sqrt{3}\,\text{sen}\theta = 0$
d) $\text{sen}\,2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$

Clase 8. Funciones trigonométricas inversas

La Figura 1.3, muestra una parte de la gráfica de y = sen$x$ que corresponde a los valores de x: $-90° \le x \le 90°$. En esta parte a cada valor β que satisface $-1 \le \beta \le 1$, existe el único valor α que satisface $-90° \le \alpha \le 90°$ y β = sen α.

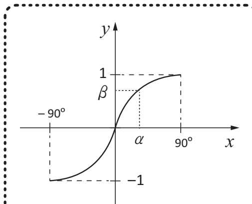


Fig. 1.3

Lo importante es que si $-90° \le \alpha < \alpha' \le 90°$, entonces sen$\alpha \ne$ senα'.

La correspondencia de β a α es una función. Se le denomina **arcoseno** y se denota mediante $y = \text{sen}^{-1}x$.

$y = \text{sen}^{-1}x \Leftrightarrow x = \text{sen}\,y$; $-90° \le y \le 90°$

Generalmente cuando existe este tipo de relación entre dos funciones, se dice que una es la **función inversa** a la otra.

$y = \text{sen}^{-1}x$
Dominio: $\{x, -1 \le x \le 1\}$
Rango: $\{y, -90° \le y \le 90°\}$

La Fig. 1.4, muestra la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}x$.

Ejemplo 1.9. Encuentre el valor de $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$.
Solución.
$\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \text{sen}\,\alpha$; $-90° \le \alpha \le 90°$,
por lo tanto $\alpha = 30°$

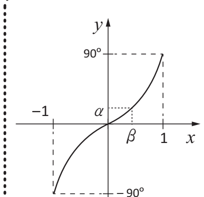


Fig. 1.4

$\alpha = 150°$ no es la respuesta, porque no satisface $-90° \le \alpha \le 90°$.

8 | Unidad I • Lección 1 • Clase 8. Funciones trigonométricas inversas

Se puede definir la inversa $y = f^{-1}(x)$ de la función $y = f(x)$ siempre que se cumpla que:
Si $\alpha \ne \alpha'$,
entonces $f(\alpha) \ne f'(\alpha)$.

En ese caso $y = f^{-1}(x) \leftrightarrow x = f(y)$. El dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.
Como y = sen$x$ es una función periódica, se puede tomar otro dominio, por ejemplo:
$\{x, 90° \le x \le 270°\}$ En este caso el rango de $y = \text{sen}^{-1}x$ es $\{y, 90° \le y \le 270°\}$

Ejemplo 1.9 (10 min)

Ejercicio 1.10. (5 min) Solución

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{sen}^{-1} x$	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

Clase 8
(Continuación)

Ejercicio 1.10. Complete la tabla.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{sen}^{-1} x$									

De la misma manera se definen las funciones inversas de las otras funciones trigonométricas.

arcocoseno

$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$
$0° \leq y \leq 180°$

Dominio: $\{x, -1 \leq x \leq 1\}$
Rango: $\{y, 0° \leq y \leq 180°\}$

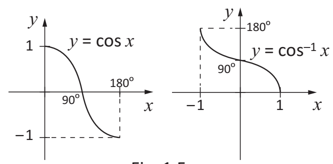


Fig. 1.5

arcotangente

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$
$-90° < y < 90°$

Dominio: El conjunto de los números reales
Rango: $\{y, -90° < y < 90°\}$

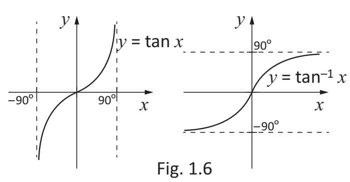


Fig. 1.6

Ejemplo 1.10. Encuentre los siguientes valores.

a) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ b) $\tan^{-1} \sqrt{3}$

Solución: a) $\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $0° \leq \alpha \leq 180°$

Por lo tanto, $\cos^{-1} \frac{1}{2} = 60°$

b) $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{3}$ y $-90° < \alpha < 90°$

Por lo tanto, $\tan^{-1} \sqrt{3} = 60°$

Ejercicio 1.11. Complete la tabla

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos^{-1} x$									

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$							

Definición de $y = \cos^{-1}x$
(5 min)

Definición de $y = \tan^{-1}x$
(5 min)

Ejemplo 1.10
(5 min)

Ejercicio 1.11
(5 min) Solución

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos^{-1} x$	$180°$	$150°$	$135°$	$120°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$

Unidad I. Lección 1.
Ejercicios de la lección

Objetivo: Fortalecer los conocimientos adquiridos de la lección.

Ejercicios de la lección

1. Utilizando el teorema de adición, encuentre los valores de sen 165°, cos 165° y tan 165° — Clase 2 Ejemplo 1.1

2. Sean $90° < \alpha < 180°$ y $270° < \beta < 360°$. Cuando $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\beta = \frac{2}{3}$, encuentre los siguientes valores. — Clase 3 Ejemplo 1.2
   a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ b) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ c) $\cos(\alpha+\beta)$
   d) $\cos(\alpha-\beta)$ e) $\tan(\alpha+\beta)$ f) $\tan(\alpha-\beta)$

3. Encuentre los valores de $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos2\alpha$ y $\tan2\alpha$ en cada caso: — Clase 4 ejemplo 1.3
   a) $0° < \alpha < 180°$ y $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ b) $90° < \alpha < 270°$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

4. Sean $360° < \alpha < 540°$ y $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Encuentre los valores de $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\tan\frac{\alpha}{2}$. — Clase 5 Ejemplo 1.5

5. Sea $0° \le \theta < 360°$. Resuelva: — Clase 6 Ejemplo 1.6
   a) $4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 5 = 0$ b) $2\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$
   c) $\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$ d) $\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$
   e) $4\operatorname{sen}^2\theta - 4\sqrt{3}\cos\theta - 7 = 0$

6. Sea $0° \le \theta < 360°$. Resuelva: — Clase 7 Ejemplo 1.7, 1.8
   a) $2\cos2\theta + 4\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$ b) $\cos2\theta + 4\cos\theta + 3 = 0$
   c) $\operatorname{sen}2\theta - 2\cos\theta = 0$ d) $\operatorname{sen}2\theta + \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = 0$

10 | Unidad I • Lección 1 • Ejercicios de la lección

1) $\operatorname{sen}165° = \operatorname{sen}(120° + 45°)$
$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\cos165° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,
$\tan165° = -2 + \sqrt{3}$

2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ y
$\operatorname{sen}\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
a) $\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$ b) $\frac{6-4\sqrt{5}}{15}$
c) $\frac{-8+3\sqrt{5}}{15}$ d) $\frac{-8-3\sqrt{5}}{15}$
e) $-\frac{108+50\sqrt{5}}{19}$
f) $-\frac{108-50\sqrt{5}}{19}$

3)
a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}2\alpha = \frac{24}{25}$
$\cos2\alpha = \frac{7}{25}$, $\tan2\alpha = \frac{24}{7}$
b) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}2\alpha = -\frac{24}{25}$
$\cos2\alpha = \frac{7}{25}$, $\tan2\alpha = -\frac{24}{7}$

4) $180° < \frac{\alpha}{2} < 270°$
$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$= -\frac{3}{\sqrt{10}}$
$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$= -\frac{1}{\sqrt{10}}$
$\tan\frac{\alpha}{2} = 3$

5)
a) $(2\operatorname{sen}\theta - 1)^2 = 0$.
$\theta = 30°, 150°$.
b) $(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$
$\theta = 30°, 90°, 150°$.
c) $(\cos\theta - 1)^2 = 0$ $\theta = 0°$
d) $(\operatorname{sen}\theta + 1)^2 = 0$ $\theta = 270°$
e) $(2\cos\theta + \sqrt{3})^2 = 0$, $\theta = 150°, 210°$.

6) a) $(2\operatorname{sen}\theta - 1)^2 = 0$ $\theta = 30°, 150°$.
b) $(\cos\theta + 1)^2 = 0$ $\theta = 180°$.
c) $2(\operatorname{sen}\theta - 1)\cos\theta = 0$ $\theta = 90°, 270°$.
d) $(2\cos\theta + \sqrt{2})\operatorname{sen}\theta = 0$ $\theta = 0°, 135°, 180°, 225°$,

Unidad I. Lección 1.
Problemas de la Unidad A

1) (1) + (2) sen(α+30°) + sen(α − 30°) = $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

Del teorema de adición se tiene que: 2senαcos30° = $\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

Luego senα = $\frac{3}{5}$.

(1) – (2) sen(α + 30°) – sen(α – 30°) = $\frac{4}{5}$

2cosαsen30° = $\frac{4}{5}$. Luego cosα = $\frac{4}{5}$

Problemas de la unidad A

1. El ángulo α satisface las siguientes igualdades:
   sen (α + 30°) = $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ ...(1), sen (α - 30°) = $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ ...(2).
   Encuentre senα y cosα.
2. Encuentre todas las soluciones. No hay restricciones en θ.
   a) sen 2θ − $\sqrt{3}$ cosθ = 0 b) cos 2θ − senθ − 1 = 0
3. Sean 0° < α < 90°, senα = $\frac{3}{5}$ y cos(α + β) = − $\frac{4}{5}$.
   Encuentre los valores de senβ, cosβ y tanβ.
4. Sea 0° ≤ θ < 360°. Resuelva:
   a) $\cos^2\theta + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\operatorname{sen}\theta - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) = 0$
   b) cos2θ + (2 − $\sqrt{3}$) cosθ + (1 − $\sqrt{3}$) = 0
5. Aplicando el Teorema 1.1, demuestre las siguientes fórmulas.
   a) senα cosβ = $\frac{1}{2}$ {sen(α + β) + sen (α − β)}
   b) cosα senβ = $\frac{1}{2}$ {sen(α + β) − sen (α − β)}
   c) cosα cosβ = $\frac{1}{2}$ {cos(α + β) + cos(α − β)}
   d) senα senβ = −$\frac{1}{2}$ {cos(α + β) − cos(α − β)}
6. Utilizando las fórmulas del problema 5, demuestre las siguientes:
   a) sen A + sen B = 2 sen $\frac{A+B}{2}$ cos $\frac{A-B}{2}$
   b) sen A − sen B = 2 cos $\frac{A+B}{2}$ sen $\frac{A-B}{2}$
   c) cos A + cos B = 2 cos $\frac{A+B}{2}$ cos $\frac{A-B}{2}$
   d) cos A − cos B = −2 sen $\frac{A+B}{2}$ sen $\frac{A-B}{2}$

Conversión de producto en suma.

Conversiones de suma en producto.

En 5 escriba $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$

Unidad I • Lección 1 • Problemas de la unidad A | 11

2)
a) (2senθ − $\sqrt{3}$)cosθ = 0
θ = 60° + 360°n, 120° + 360°n
90° + 360°n, 270° + 360°n
(n: número entero)

b) senθ(2senθ + 1) = 0
θ = 360°n, 180° + 360°n,
210° + 360°n, 330° + 360°n
(Las dos primeras se pueden representar como 180°n)

3) cosα = $\frac{4}{5}$
cos(α + β)
= $\frac{4}{5}$cosβ − $\frac{3}{5}$senβ = −$\frac{4}{5}$

Por lo tanto cosβ
= $\frac{3}{4}$senβ − 1…(1)

Sustituyendo (1) en sen$^2\beta$ + cos$^2\beta$ = 1, se tiene que sen$^2\beta$ + ($\frac{3}{4}$senβ − 1)^2 = 1

Luego senβ = 0, $\frac{24}{25}$

De (1) se tiene que senβ = 0 y cosβ = –1 ó senβ = $\frac{24}{25}$ y cosβ = −$\frac{7}{25}$

tanβ = 0 ó −$\frac{24}{7}$ respectivamente.

4) a) (senθ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$)(senθ − 1) = 0
θ = 45°, 90°, 135°.

b) (2cosθ − $\sqrt{3}$)(cosθ + 1) = 0.
θ = 30°, 180°, 330°.

5) a) $\frac{1}{2}${a) + b) del teorema 1.1}
b) $\frac{1}{2}${a) − b) del teorema 1.1}
c) $\frac{1}{2}${c) + d) del teorema 1.1}

d) −$\frac{1}{2}${c) − d) del teorema 1.1}

6) a) Sea α + β = A y α − β = B. Entonces α = $\frac{A+B}{2}$ y β = $\frac{A-B}{2}$.

Se sustituyen estas expresiones en las fórmulas del problema 5, y se multiplican por 2 ambos lados.

Unidad I. Lección 1.

Problemas de la Unidad B

(Continúa en la siguiente página)

1 a) AB = $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ (= secα), AC = $\dfrac{1}{\cos\beta}$ (=secβ), BH = tanα, CH = tanβ.

b) De la ley de los senos se tiene que: $\dfrac{\text{BC}}{\text{sen}A} = \dfrac{\text{AC}}{\text{sen}B}$, sen$A$ = $\dfrac{\text{BC}}{\text{AC}}senB$.

Por lo tanto $\text{sen}(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta) \div \dfrac{1}{\cos\beta}\text{sen}(90° - \alpha)$

$= (\tan\alpha + \tan\beta)\cos\beta\cos\alpha$

$= \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$

c) De la ley de los cosenos se tiene que:

$\cos A = \dfrac{\text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \text{BC}^2}{2\text{AB}\cdot\text{AC}}$

$= \dfrac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\beta}\right.$

$\left.-\tan^2\alpha - 2\tan\alpha\tan\beta - \tan^2\beta\right)$

Utilizando la relación

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

se tiene que:

$\cos(\alpha+\beta)$

$= \dfrac{1}{2}\cos\alpha\cos\beta(2 - 2\tan\alpha\tan\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

2 a) De a) del problema A6 se tiene que:

$2\text{sen}\dfrac{(\theta+30°)+2\theta}{2}$

$\cos\dfrac{(\theta+30°)-2\theta}{2} = 0.$

Por lo tanto $\text{sen}\left(\dfrac{3}{2}\theta + 15°\right) = 0$

ó $\cos\left(-\dfrac{\theta}{2} + 15°\right) = 0$

Como $15° \leq \dfrac{3}{2}\theta + 15° < 555°$,

$\text{sen}\left(\dfrac{3}{2}\theta + 15°\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\theta + 15°$

$= 180°, 360°, 540°$

$\Leftrightarrow \theta = 110°, 230°, 350°.$

Como $-15° \leq \dfrac{\theta}{2} - 15° < 165°$,

$\cos\left(-\dfrac{\theta}{2} + 15°\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\theta}{2} - 15°\right) = 0$

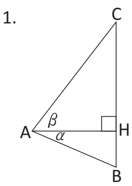
$\Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} - 15° = 90°$

$\Leftrightarrow \theta = 210°.$

Respuesta: θ = 110°, 210°, 230°, 350°.

Problemas de la unidad B

1. Sean 0° < α < 90° y 0° < β < 90°. En la figura AH = 1.
   a) Represente AB, AC, BH y CH con α o β.
   b) Aplicando la ley de los senos al ΔABC, demuestre a) del Teorema 1.1.
   c) Aplicando la ley de los cosenos al ΔABC, demuestre c) del Teorema 1.1.



Representar con α quiere decir usar senα, cosα y/o tanα.

2. Sea 0° ≤ θ < 360°. Resuelve:
   a) sen (θ + 30°) + sen 2θ = 0 b) cos (θ – 60°) + cos (3θ + 20°) = 0

Utilice la fórmula del problema A 6.

3. Sea $y = -\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x$ ...(1) una función.
   a) Encuentre el número real positivo r y un ángulo α tales que: $-1 = r\cos\alpha$ y $\sqrt{3} = r\,\text{sen}\alpha$
   b) Aplicando el Teorema 1.1 a) exprese y en la forma de $y = r\,\text{sen}\,(x + \alpha)$.
   c) Encuentre el rango de esta función cuando el dominio es el conjunto de los números reales.

4. a) Exprese sen 3θ como un polinomio de senθ.
   b) Exprese cos 3θ como un polinomio de cosθ.

$3\theta = 2\theta + \theta$

12 | Unidad I • Lección 1 • Problemas de la unidad B

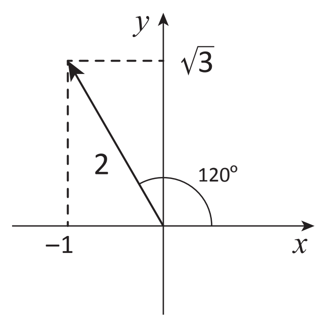
2 b) De c) del problema A6 se tiene que:

$$2\cos\frac{(\theta-60^\circ)+(3\theta+20^\circ)}{2}\cos\frac{(\theta-60^\circ)-(3\theta+20^\circ)}{2}=0.$$

Por lo tanto $\cos(2\theta-20°) = 0$ ó $\cos(-\theta-40°) = 0$. Como $-20° \leq 2\theta-20° < 700°$;
$\cos(2\theta-20°) = 0 \Leftrightarrow 2\theta-20° = 90°, 270°, 450°, 630° \Leftrightarrow \theta = 55°, 145°, 235°, 325°$

Como $40° \leq \theta + 40° < 400°$, $\cos(-\theta-40°) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta + 40°) = 0$
$\Leftrightarrow \theta + 40° = 90°, 270° \Leftrightarrow \theta = 50°, 230°$.

Respuesta $\theta = 50°, 55°, 145°, 230°, 235°, 325°$.



3 a) $r = 2$, $\theta = 120°$ (θ puede ser uno de los $120° + 360°n$ donde n es un número entero)

b) $y = -\text{sen}x + \sqrt{3}\cos x$
$= 2\cos120°\ \text{sen}x + 2\text{sen}120°\ \cos x$
$= 2(\text{sen}x\cos120° + \cos x\ \text{sen}120°)$
$= 2\text{sen}(x + 120°)$
Aplicando el teorema 1.1 a)

c) $[-2, 2]$

4 a) $\text{sen}3\theta = \text{sen}(2\theta + \theta)$
$= \text{sen}2\theta\cos\theta + \cos2\theta\ \text{sen}\theta$
$= 2\text{sen}\theta\cos\theta\cos\theta + (1 - 2\text{sen}^2\theta)\text{sen}\theta$
$= 2\text{sen}\theta(1\text{-}\text{sen}^2\theta) + (1 - 2\text{sen}^2\theta)\text{sen}\theta$
$= 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta$

b) $\cos3\theta = \cos(2\theta + \theta)$
$= \cos2\theta\cos\theta - \text{sen}\theta\ \text{sen}2\theta$
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - \text{sen}\theta2\text{sen}\theta\cos\theta$
$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$
$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Matemáticas IV
Unidad II

Límites y continuidad

1. Competencias de la Unidad

1. Calcular y analizar en una gráfica el límite de una función.
2. Determinar límites infinitos.
3. Determinar límites al infinito.
4. Determinar la continuidad en un punto y en un intervalo.
5. Aplicar las propiedades de la continuidad.
6. Aplicar el teorema del valor intermedio.

2. Relación y Desarrollo

Matemáticas 9º

Factorización

Matemática I

Unidad I: Fundamentos aritméticos y álgebra
- Lección 1: Números reales
  - Valor absoluto
  - Racionalización del denominador
- Lección 2: Ecuaciones e inecuaciones
  - Ecuaciones de segundo grado

Unidad II: Introducción a la trigonometría

Matemática II

Unidad I: Funciones algebraicas
- Lección 6: Gráficas de funciones polinomiales
- Lección 7: Expresiones algebraicas racionales

Unidad II: Funciones trascendentales
- Lección 1: Funciones exponenciales
- Lección 2: Funciones logarítmicas
- Lección 4: Las gráficas de las funciones trigonométricas

Matemáticas IV

Unidad II: Límites y continuidad
- Lección 1: Límite de funciones
- Lección 2: Continuidad de funciones
- Lección 3: Asíntotas

Matemática IV

Unidad IV: Derivadas de funciones trascendentales

3. Plan de Estudio de la Unidad (13 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1 Límite de funciones	1	Definición de límite de funciones	límite, $\lim_{x \to a} f(x)$
	2	Propiedad del límite	
	*3	Cálculo del límite donde el denominador converge a 0	
	*4	Divergencia	diverge al infinito positivo
	*5	Límites laterales	límite por la izquierda (derecha), $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$
	*6	Límites en el infinito	$\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
	*7	Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito	
	*8	Límite de funciones trigonométricas	
	*9	Aplicación del $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$	
		Ejercicios de la lección	
2 Continuidad de funciones	1	Continuidad en el punto	continua en un punto
	2	Continuidad en el intervalo, existencia del valor máximo y mínimo	continua en un intervalo. valor máximo (mínimo)
	3	Teorema del valor intermedio	
		Ejercicios de la lección	
3 Asíntotas	1	Asíntota	Asíntota
Problemas de la Unidad		Problemas de la Unidad A	
		Problemas de la Unidad B	

Puntos de lección

Lección 1: Límite de funciones

En el caso de que el tiempo sea insuficiente para estudiar la unidad IV, entonces el docente puede considerar enseñar únicamente las clases 1 y 2 y puede omitir el resto de lecciones.
Aun cuando se enseña la Unidad IV, es recomendable ir directo a la Unidad III después de la Clase 2 para después regresar a la Clase 3 de la Lección 1.

En la explicación del límite, se utiliza el valor absoluto, el tratamiento del cual es dificil para muchos estudiantes, por lo tanto, puede omitir este tipo de explicación. Basta que ellos entiendan intuitivamente utilizando la gráfica que el punto tiende a un punto.

En la Clase 7, en el inciso a) se demuestre la propiedad:

Si $0 < n \in \mathbb{Z}$ y $a > 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^x}{x^n} = \infty$

Demostración:

Sea $a = 1 + c$ $(c > 0)$ y $0 < l \in \mathbb{Z}$.

$a^{l+n+1} = (1+c)^{l+n+1} > \mathrm{C}(l+n+1, n+1) \cdot c^{n+1} = \dfrac{(l+n+1)(l+n)\ldots(l+1)}{(n+1)!} c^{n+1} > \dfrac{l^{n+1}}{(n+1)!} c^{n+1}$

Si $l + n + 2 > x \geq l + n + 1$, entonces se tiene que

$$\frac{a^x}{x^n} > \frac{a^{l+n+1}}{(l+n+2)^n} > \frac{1}{(l+n+2)^n} \cdot \frac{l^{n+1}}{(n+1)!} c^{n+1} \to \infty \qquad (l \to \infty).$$

Lección 2: Continuidad de funciones

La mayor parte de las funciones tratadas en el Libro del Estudiante son continuas y el énfasis está en dos características de ellas. Uno es la existencia del máximo y el mínimo en el intervalo cerrado y el otro es el teorema del valor intermedio.

Lección 3: Asíntotas

En la Unidad IV cuando se tratan las funciones racionales, aparece el término asíntotas oblicuas, por lo tanto, no se explica sobre ellas en esta unidad.

Unidad II. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender intuitivamente la definición de límite.

Evaluación: Ejercicio 1.1 y 1.2

Explicación 1
(20 min)
Basta que los estudiantes entiendan con la ayuda de la gráfica.

Dese cuenta que "$x \to a$" significa que x no toma el valor de a.

Ejercicio 1.1
(5 min) Solución
a) 2 b) 1 c) 0

Ejemplo 1.1
(5 min)
Se utiliza la gráfica.

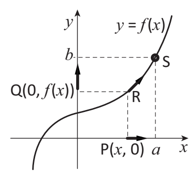
Nota: a partir de esta unidad se utiliza la unidad de medida radián para medir los ángulos.
Términos y notación: sean a y b números reales tal que $a < b$

Intervalo abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
Intervalo semi abierto	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

Lección 1. Límite de funciones

Clase 1. Definición de límite de funciones

Explicación 1. En la figura, en el eje x el punto P $(x, 0)$ tiende al punto $(a, 0)$, pero no alcanza a este punto. En la gráfica el punto R que corresponde al punto P tiende al punto S. En el eje y el punto Q $(0, f(x))$ que corresponde al punto R y representa el valor de $f(x)$ tiende al punto $(0, b)$.



En resumen, cuando x tiende sin límite a a tomando valores diferentes de a, $f(x)$ tiende sin límite a b.

Se expresa esta situación como: "$f(x)$ converge a b" y se denota mediante:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

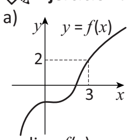
El valor de b se le llama **límite** de $f(x)$ cuando x tiende sin límite a a.

No es necesario que $f(x)$ esté definida en $x = a$.

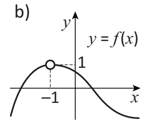
También se utiliza la siguiente notación:

$$\boxed{f(x) \to b \quad (a \to x)}$$

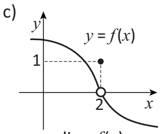
Ejercicio 1.1. Encuentre los límites:

a)


$\lim_{x \to 3} f(x)$

b)


$\lim_{x \to -1} f(x)$

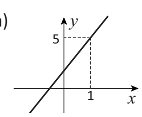
c)


$\lim_{x \to 2} f(x)$

En b) $f(x)$ no está definida en $x = -1$; en c) $f(2) = 1$.

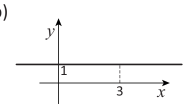
Ejemplo 1.1. Encuentre los límites: a) $\lim_{x \to 1} (2x + 3)$ b) $\lim_{x \to 3} 1$

Solución: a)



de gráfica se ve que
$\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

b)



$\lim_{x \to 3} 1 = 1$

De b) se ve que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} c = c \quad (c\text{: constante})}$$

14 | Unidad II • Lección 1 • Clase 1. Definición de límite de funciones

Objetivo: Entender y utilizar las propiedades del límite en el cálculo.

Evaluación: Ejercicio 1.3

Unidad II. Lección 1.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

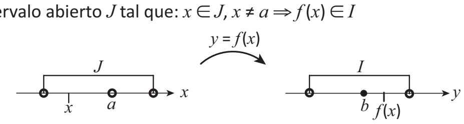
Ejercicio 1.2. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to 2}(x-3)$ b) $\lim_{x\to 2}(-5)$ c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \cos x$

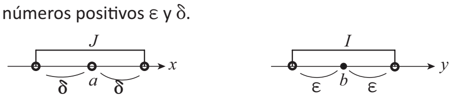
e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x$ f) $\lim_{x\to 2} 10^x$ g) $\lim_{x\to 1} \log_2 x$ h) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}$

*** Explicación 2.** $\lim_{x\to a} f(x) = b$ equivale lo siguiente:

Cuando está dado un intervalo abierto I que contiene el valor de b, existe un intervalo abierto J tal que: $x \in J,\ x \neq a \Rightarrow f(x) \in I$



En la figura de arriba puede limitarse I y J en la forma:
$I = (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R},\ |y-b| < \varepsilon\}$
$J = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-a| < \delta\}$
con los números positivos ε y δ.



Para el tratamiento más riguroso, hay que definir el límite de tal manera que explica el sentido de "tender sin límite".

Entonces la definición tiene la siguiente forma:

Definición de límite de funciones.
Sea $f(x)$ una función definida alrededor de $x = a$ salvo en a. Se denota $\lim_{x\to a} f(x) = b$ cuando se verifica lo siguiente:
Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que:
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

Esta forma es uno de los resultados de la actitud crítica del siglo XIX, hacia la base del cálculo infinitesimal que data del siglo XVII.

Clase 2. Propiedades del límite

Propiedades del límite:
Sean α, β y k números reales, $f(x)$ y $g(x)$ funciones. Se supone que existen $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$.

a) $\lim_{x\to a}\{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$

b) $\lim_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$

c) $\lim_{x\to a}\{kf(x)\} = k\alpha$

d) $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

e) Si $\beta \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

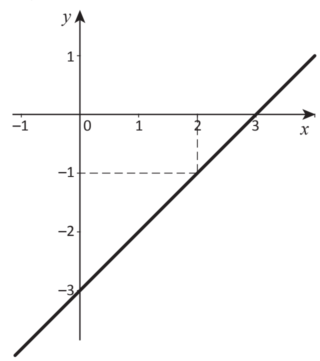
Para la demostración se utiliza la definición de la Explicación 2 de la Clase 1.

Unidad II • Lección 1 • Clase 2. Propiedades del límite | 15

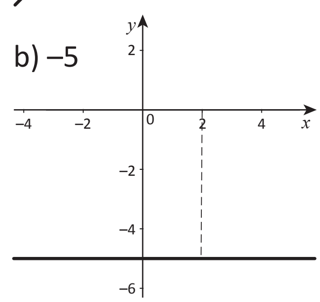
[Desde aquí Clase 2]

Propiedades del límite. (15 min)
Basta entender las propiedades intuitivamente.

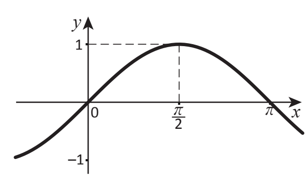
Ejercicio 1.2
(15 min) Solución
a) –1



b) –5



c) 1



Incisos d, e, f, g y h solución en pág. 33.

Explicación 2
Aquí se explica el sentido de la expresión "sin límite".
Si los estudiantes no pueden manejar el valor absoluto, deje la parte formal.

[Hasta aquí Clase 1]

Unidad II. Lección 1.

Clase 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender intuitivamente la definición de límite.

Evaluación: Ejercicio 1.4 y 1.5

*** Explicación**
Sólo para los alumnos, que pueden usar el valor absoluto.

Ejemplo 1.2
(15 min)
Se trata de justificación del cálculo del límite, utilizando las propiedades.
No se dibuja la gráfica.

En las funciones de esta clase siempre se verifica $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ porque son funciones continuas.

Ejercicio 1.3
(15 min) Solución

a) 2 b) 1

c) $\frac{4}{9}$ d) $-\frac{1}{2}$

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Ejemplo 1.3
(5 min)
Aunque parece que el denominador converge a 0, se puede calcular por simplificación.

Ejercicio 1.4
(10 min) Solución

Nota: Utilizando d) y e) repetidamente se tiene que:

f) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\}^n = \alpha^n$ (n: número entero)

*** Explicación 3:** sobre la demostración: se utilizan las siguientes relaciones:

a) $|\{f(x)+g(x)\}-(\alpha+\beta)| \le |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$

b) $|\{f(x)-g(x)\}-(\alpha-\beta)| \le |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta|$

c) $|kf(x)-k\alpha| = |k|\ |f(x)-\alpha|$

d) $|f(x)g(x)-\alpha\beta| \le |f(x)-\alpha|\,|g(x)| + |\alpha|\,|g(x)-\beta|$

e) $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right| \le \frac{|f(x)-\alpha||\beta|+|\alpha||g(x)-\beta|}{|\beta|\{|\beta|-|g(x)-\beta|\}}$

Donde $|g(x)-\beta| < |\beta|$

Tenga en cuenta las siguientes relaciones:
$|s+t| \le |s|+|t|$
$|s\,t| = |s|\,|t|$
$|g(x)| = |g(x)-\beta+\beta|$
$\le |g(x)-\beta| + |\beta|$
$|g(x)| = |g(x)-\beta+\beta|$
$\ge |\beta| - |g(x)-\beta|$
Cuando
$|\beta| \ge |g(x)-\beta|$

Ejemplo 1.2. Encuentre los límites: a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+4)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+4)$

$= \lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}4$ por a) y b)

$= (\lim\limits_{x\to 2}x)^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}4$ por f) y d)

$= 2^2 \quad - 3\,(2) \quad + 4$

$= 2$

b) $\lim\limits_{x\to 3}x = 3 \ne 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to 3}(x^2-1) \div \lim\limits_{x\to 3}x = \frac{8}{3}$

Este valor equivale a $f(2)$, donde $f(x) = x^2-3x+4$.

Nota: de a) se ve los siguientes:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ donde $f(x)$ es un polinomio de x

Ejercicio 1.3. Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}2x^3$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}x^3\,2^x$

Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

Ejemplo 1.3. Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

Solución. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$

Transforme la función en la forma donde el denominador no converge a 0.

Ejercicio 1.4. Encuentre el límite.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{2x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+3x}{x}$

*e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ *f) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x+3}$ *g) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}$

16 | Unidad II • Lección 1 • Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-2) = -3$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x+1)}{2x-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x+1) = \frac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^2-2x+3)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+3) = 3$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$

f) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}(x^2-3x+9) = 27$

g) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x^2-1) = 3$

Clase 3
(Continuación)

Ejemplo 1.4. Encuentre el límite: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución 1: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$

Solución 2: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$

En el Ejemplo 1.4 solución 1 aplique la racionalización del denominador.

En el Ejemplo 1.4 solución 2 aplique la factorización al numerador: $x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

Ejercicio 1.5. Encuentre el límite:

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ b) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$ *e) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+\sqrt{x}-2}$

Ejemplo 1.5. Encuentre el valor de a y b que satisfacen $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1} = 3$

Solución: $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b) = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{x^2+ax+b}{x-1}\cdot(x-1)\right\}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1} \quad \lim_{x\to 1}(x-1)$ por d) de la Clase 2.

$= 3\cdot 0 = 0.$

Por lo tanto, como x tiende a 1 (se sustituye convenientemente en x^2+ax+b)

$a+b+1=0.$

Luego, $x^2+ax+b = x^2+ax+(-a-1)$ Sustituyendo $b=-a-1$

$= (x-1)(x+a+1)$. Entonces,

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+a+1) = a+2,$

Por lo tanto, $a+2=3$, $a=1$. Respuesta: $a=1$, $b=-2$

Si el denominador converge a 0 y existe el límite, entonces el numerador converge en 0.

Ejercicio 1.6. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2} = 3$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax+b}{x+1} = -4$

c) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x+2} = 2$

Unidad II • Lección 1 • Clase 3. Cálculo del límite donde el denominador converge a 0 | 17

Ejemplo 1.4
(8 min)
También se trata de cancelar el denominador.

Ejercicio 1.5
(12 min) Solución

a) $\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$

$= \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2) = 4$

b) $\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$

$= \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = 6$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$

d) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)}$

$= \lim_{x\to -2}\frac{1}{\sqrt{x+3}+1} = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-\sqrt{x}-2)}{x^2-5x+4}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{2}{3}$

Ejemplo 1.5
(10 min)

Ejercicio 1.6
(Tarea en casa) Solución

a) $2a+b+4=0$. Luego $x^2+ax+b = (x-2)(x+a+2)$. Entonces $\lim_{x\to 2}(x+a+2) = a+4$. Por lo tanto $a+4=3$, $a=-1$, $b=-2$.

b) $-a+b+1=0$, Luego $x^2+ax+b = (x+1)(x+a-1)$. Entonces $\lim_{x\to -1}(x+a-1) = a-2$, Por lo tanto $a-2=-4$, $a=-2$, $b=-3$.

c) $-2a+b+4=0$. Luego $x^2+ax+b = (x+2)(x+a-2)$. Entonces $\lim_{x\to -2}(x+a-2) = a-4$. Por lo tanto $a-4=2$, $a=6$, $b=8$.

Unidad II. Lección 1.

Clase 4

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la definición y las propiedades de divergencia.

Evaluación: Ejercicio 1.7 y 1.8

Ejemplo 1.6

(5 min)
La solución muestra un ejemplo de la definición rigurosa de la divergencia.
No exige a los estudiantes hasta este nivel.

Definición de Divergencia

(5 min)

Ejercicio 1.7

(8 min) Solución
a) ∞
b) $-\infty$
c) 0
d) ∞
e) ∞
Diverge: a), b), d), y e)
Converge: c)

Propiedades de la divergencia

(6 min)
Basta entender intuitivamente.

Clase 4. Divergencia

Ejemplo 1.6. Describa el cambio del valor de $\frac{1}{x^2}$ cuando x tiende al 0.

Solución: si $x \to 0$, entonces $x^2 > 0$ y tiende al 0. Por lo tanto, el valor de $\frac{1}{x^2}$ aumenta sin límite.

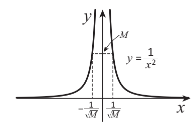
En efecto, a cualquier número positivo M, si se toma x en $(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0)$ o $(0, \frac{1}{\sqrt{M}})$, entonces se tiene que $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M$.

Si el valor de $f(x)$ aumenta sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito positivo** y se denota mediante

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$$

De la misma manera si el valor de $f(x)$ disminuye sin límite cuando $x \to a$, entonces se expresa que $f(x)$ **diverge al infinito negativo** y se denota mediante.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$



Cuando se escribe $x \to a$, x no toma el valor de a.

El símbolo ∞ no es un número, tampoco se llama límite.

Ejercicio 1.7. Investigue si converge o diverge.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ b) $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan^2 x$

Propiedades de divergencia

a) $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

$f(x) < 0$ y $\lim_{x\to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

b) $f(x) \leq g(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

$g(x) \leq f(x)$, $\lim_{x\to a} f(a) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{-f(x)\} = -\infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{-f(x)\} = \infty$

d) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o ∞, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = \infty$

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ o $-\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = -\infty$

e) $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha > 0$ o ∞, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \{f(x)\, g(x)\} = \infty$

f) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ o $-\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Se omite la demostración.

18 | Unidad II • Lección 1 • Clase 4. Divergencia

Objetivo: Entender el concepto de límite por la derecha y por la izquierda.

Evaluación: Ejercicio 1.10, 1.11 y 1.12

Unidad II. Lección 1.

Clase 4
(Continuación)

Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Ejemplo 1.7. Encuentre $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan^2 x$.

Solución: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2} > 0$ y $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan^2 x = \infty$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan^2 x = \infty$$

Se utiliza la propiedad e).

Ejercicio 1.8. Calcule:

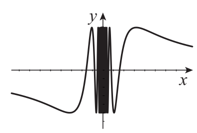
a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}$ b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-2}{\cos^2 x}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\operatorname{sen}^2 x}$ d) $\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{(x-3)^2}$

Ejemplo 1.8. Investigue los valores de $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

Solución: $|\operatorname{sen}\frac{1}{x}| \leq 1$. Por otra parte, para cada número $b \in [-1, 1]$, hay valores de x en cualquier cercanía del 0 que satisface $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = b$

Del Ejemplo 1.8 se sabe que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no converge cuando $x \to 0$.

En este caso se dice que $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ **diverge** cuando $x \to 0$.



$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Ejercicio 1.9. Investigue si $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ converge o no.

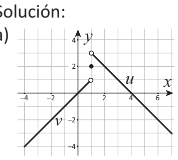
Clase 5. Límites laterales

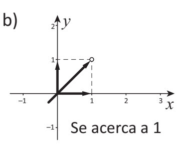
Ejemplo 1.9. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

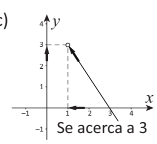
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{cuando } x < 1 \\ 2 & \text{cuando } x = 1 \\ -x+4 & \text{cuando } 1 < x \end{cases}$$

a) Dibuje la gráfica de $y = f(x)$.
b) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $x < 1$ y se acerca a 1.
c) Investigue el valor de $f(x)$ cuando $1 < x$ y se acerca a 1.

Solución:

a)


b)


c)


En b) del Ejemplo 1.9, al número 1 se le llama **límite por la izquierda** y se denota mediante $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

En c) al número 3 se le llama **límite por la derecha** y se denota mediante $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$.

Se aplica la notación similar cuando la función diverge. Se verifican las mismas propiedades que el límite anterior.

Ambas se les llama **límite lateral**.

Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Límites laterales | 19

Ejemplo 1.7
(3 min)
Se trata de aplicar las propiedades.

Ejercicio 1.8
(8 min) Solución
a) ∞ b) $-\infty$
c) ∞ d) ∞

Ejemplo 1.8
(5 min)
Explique con la gráfica.

Ejercicio 1.9
(5 min) Solución
No converge.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

Ejemplo 1.9
(6 min)

Definición de límite lateral
(3 min)

Clase 5
(Continuación)

Ejemplo 1.10
(4 min)

Ejercicio 1.10
(5min) Solución

a) ∞

b) $-\infty$

c) $-\infty$

d) ∞

Ejemplo 1.11
(7 min)

Ejercicio 1.11
(6 min)

Solución:

a) 2	b) 3
c) -3	d) -2
e) -1	f) 0
*g) 1	*h) 0

Relación entre el límite y el límite lateral (2 min)

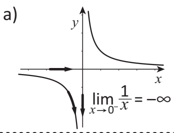
Ejemplo 1.12
(5 min)

Encuentre el límite sin gráfica.

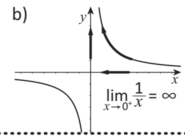
En este ejemplo $x^3 - x^2$ y $x^2 + 3x - 6$ son continuas y tienen el mismo valor en $x = 2$. Por lo tanto $f(x)$ es continua y existe el límite.

Ejemplo 1.10. Calcule. a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

Solución: a)



b)



Ejercicio 1.10. Encuentre los límites.

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$

Ejemplo 1.11. Se define una función que se denota mediante $[\![x]\!]$ como lo siguiente:

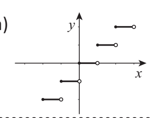
$$[\![x]\!] = n \quad \text{si} \quad n \in \boldsymbol{Z} \text{ y } n \le x < n+1$$

Es decir $[\![x]\!]$ representa el número entero máximo que no sobrepasa x.

a) Dibuje la gráfica de $y = [\![x]\!]$.

b) Encuentre $\lim\limits_{x\to 1^-} [\![x]\!]$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} [\![x]\!]$.

Solución: a)



b) $\lim\limits_{x\to 1^-} [\![x]\!] = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} [\![x]\!] = 1$

Se le llama esta función "función de parte entera".
Ejemplo: $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.9]\!] = 2$, $[\![-1.3]\!] = -2$

Ejercicio 1.11. Encuentre el límite lateral.

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} [\![x]\!]$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} [\![x]\!]$ c) $\lim\limits_{x\to -2^-} [\![x]\!]$ d) $\lim\limits_{x\to -2^+} [\![x]\!]$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} [\![x]\!]$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} [\![x]\!]$ *g) $\lim\limits_{x\to -1^-} [\![x^2]\!]$ *h) $\lim\limits_{x\to -1^+} [\![x^2]\!]$

Para g) y h) contruya la gráfica de $f(x) = [\![x^2]\!]$.

Entre el límite y el límite lateral existe la siguiente relación:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existen y coinciden.

En este caso $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Ejemplo 1.12. Se define la función $f(x)$ como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 3x - 6 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

Solución: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^3 - x^2) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 + 3x - 6) = 4$

Concuerdan, luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe.

Ejercicio 1.12. La función $f(x)$ está definida como lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 4x & \text{si } -2 \le x \end{cases}$$

Investigue si $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe.

20 | Unidad II • Lección 1 • Clase 5. Límites laterales

Ejercicio 1.12. (7 min) Solución:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-x^3 + x) = 6$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (-x^2 - 4x) = 4$$

Como son diferentes, el límite no existe.

Objetivo: Entender el concepto de límite en el infinito.

Evaluación: Ejercicio 1.13, 1.14 y 1.15

Unidad II. Lección 1.
Clase 6
(Continúa en la siguiente página)

Clase 6. Límites en el infinito

Ejemplo 1.13. Investigue el cambio de valor de $\frac{1}{x}$ cuando:

a) x aumenta sin límite.

b) $x < 0$ y $|x|$ aumenta sin límite.

Solución: a) $\frac{1}{x} \to 0$ b) $\frac{1}{x} \to 0$

Se denota el fenómeno de a) mediante $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ y el b) mediante $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Se le llama a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito positivo y al $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ límite en el infinito negativo.

Ejercicio 1.13. Encuentre el límite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

Los límites en el infinito tienen las mismas propiedades que las de la Clase 2 y 4.

Ejemplo 1.14. Sean $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ y $g(x) = b_0 x^m + bx^{m-1} + \cdots + b_m$ $(b_0 \neq 0)$ polinomios.

Encuentre $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Solución: $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{n-m}\,\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = \infty$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n-m} = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ejercicio 1.14. En el Ejemplo 1.14, encuentre $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ en los siguientes casos:

a) $n > m$ b) $n = m$ c) $n < m$

Ejercicio 1.15. Encuentre el límite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x+2}{x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x}{3x^2-4x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-5}{3x^2-4x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x+1}{-x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+1}{3x^4+5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{-x^2+x}$

Ejemplo 1.13
(7 min)
Notación de límite en el infinito

Ejercicio 1.13
(5 min) Solución

a) 0 b) 0

c) 0 d) 0

Ejemplo 1.14
(7 min)
Si los estudiantes no entienden la notación del polinomio, se puede usar ejemplos como ser:

a) $n = 2$, $m = 1$

b) $n = 2$, $m = 2$

c) $n = 1$, $m = 2$

Ejercicio 1.14
(5 min) Solución:
Si $x < 0$, entonces el signo de x^{n-m} es igual al de $(-1)^{n-m}$. Se pone $(-1)^{n-m}\,\frac{a_0}{b_0} = s$.

a) ∞ si $s > 0$, $-\infty$ si $s < 0$

b) $\frac{a_0}{b_0}$

c) 0

Ejercicio 1.15. (7 min) Solución:

a) ∞ b) $\frac{2}{3}$ c) 0 d) $-\infty$ e) 0 f) -5

Unidad II. Lección 1.

Clase 6
(Continuación)

Clase 7
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender el movimiento de las funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito.

Evaluación: Ejercicio 1.19

Ejemplo 1.15
(4 min)

Ejercicio 1.16
(5 min) Solución:
a) $-\infty$
b) ∞
c) ∞

Ejemplo 1.16
(5 min)

Ejercicio 1.17
(Tarea en casa)
Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}$
= 0

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$
= ∞

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
= 0

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Propiedades del límite en el infinito de las funciones.
(25 min)

Ejemplo 1.15. Calcule: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)$

Solución: $x^3-x^2=x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)=\infty$

Veáse Clase 4, inciso e)

Ejercicio 1.16. Calcule.
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x^2)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})$

Ejemplo 1.16. Encuentre el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=0$

Aplique la racionalización del denominador.

Ejercicio 1.17. Encuentre el límite:
a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

La siguiente propiedad es fundamental:

a) Sea n número entero.
Si $a>1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n a^x=\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n a^x=0$

De a) se deduce las siguientes fórmulas:

Sea n número entero,

b) Si $0<a<1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n a^x=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n a^x=\begin{cases}\infty & n\text{: par}\\ -\infty & n\text{: impar}\end{cases}$

c) Si $1<c$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\log_c x=\begin{cases}\infty & (0\le n)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$

d) Si $0<c<1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\log_c x=\begin{cases}-\infty & (0\le n)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$

e) Si $1<c$, entonces $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\log_c x=\begin{cases}0 & (0<n)\\ -\infty & (n\le 0)\end{cases}$

f) Si $0<c<1$, entonces $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\log_c x=\begin{cases}0 & (0<n)\\ \infty & (n\le 0)\end{cases}$

*** Ejercicio 1.18.** Deduce b) a f) de a).

22 | Unidad II • Lección 1 • Clase 7. Funciones exponenciales y logarítmicas en el infinito

---

*** Ejercicio 1.18**
Solución (Véase Página 33)

Objetivo: Entender la propiedad del límite 2 y el Teorema 1.1

Evaluación: Ejercicio 1.21

Unidad II. Lección 1.

Clase 7
(Continuación)

Clase 8
(Continúa en la siguiente página)

Ejemplo 1.17. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)\,3^x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}$

Solución:

a) $(x^3-x^2)\,3^x=(1-\frac{1}{x})(x^3\,3^x)$. Como $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})=1$

y $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3\,3^x)=\infty$, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2)\,3^x=\infty$.

b) $\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}=\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}\,\dfrac{\log_3 x}{x^2}$. Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}=1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2}=0$,

Se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2+3x}=1\cdot 0=0$.

Veáse Clase 4 inciso e)

Veáse Clase 6 inciso c)

Ejercicio 1.19. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^4-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+2x)\,2^x$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)\log_2 x$

Clase 8. Límite de funciones trigonométricas

Propiedad del límite 2

a) Sean $f(x)\le g(x)$ en la cercanía del número a, salvo en a. Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

b) Sean $g(x)\le f(x)\le h(x)$ en la cercanía del número a, salvo en a. Si existen $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Se omite la demostración.

*** Ejercicio 1.20.** Dé un ejemplo en que $f(x)<g(x)$ en la cercanía de a salvo en a y que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

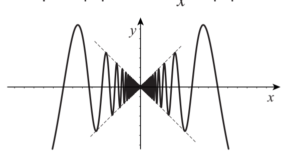
Ejemplo 1.18. Encuentre $\lim\limits_{x\to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

Solución: Como $-1\le \text{sen } \frac{1}{x}\le 1$, se tiene que $-|x|\le x \text{ sen } \frac{1}{x}\le |x|$

Ahora $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}=0$

[Por la propiedad b)]



$-1\le \text{sen } \frac{1}{x}\le 1$, $0<|x|$

$\Rightarrow -|x|\le|x| \text{ sen } \frac{1}{x}\le|x|$.

Si $x>0$

$-|x|\le x \text{ sen } \frac{1}{x}\le|x|$.

Si $x<0$

$-|x|\le -x \text{ sen } \frac{1}{x}\le|x|$.

Luego $|x|\ge x \text{ sen } \frac{1}{x}\ge -|x|$.

Ejemplo 1.17
(10 min)

Ejercicio 1.19
(10 min)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^4}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}$

$=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}$

$=0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\cdot x^4\,2^x$

$=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)x\log_2 x$

$=0$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

Propiedad del límite 2
(7 min)

*** Ejercicio 1.20**

Solución:

Ejemplo

$f(x)=1-|x-a|$

$g(x)=1+|x-a|$

Ejemplo 1.18
(8 min)

Es una aplicación típica de la propiedad de límite 2.

Clase 8
(Continuación)

Ejercicio 1.21
(10 min) Solución

a) Como $-|x| \leq x\cos\frac{1}{x} \leq |x|$,

$\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$

b) Como $-|x| \leq x\text{sen}\frac{1}{x^2} \leq |x|$,

$\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen}\frac{1}{x^2} = 0.$

c) Como $-|x|^2 \leq x^2\cos\frac{1}{2x} \leq |x|^2$,

$\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{2x} = 0.$

d) Como

$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\text{sen}x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$,

$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0.$

Teorema 1.1
(20 min)

Ejercicio 1.21. Calcule.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}\frac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\text{sen}\,x}{x}$

Teorema 1.1. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$

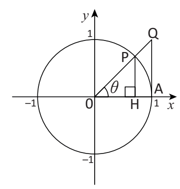
Este Teorema es el fundamento del cálculo infinitesimal de las funciones trigonometricas. Es esencial que la unidad de medida del ángulo sea radián.

Demostración: En la figura $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, PH = sen θ y QA = tan θ. Por lo tanto, se tiene que:

El área S1 del ΔOPA = $\frac{1}{2}$ sen θ.

El área S2 del sector circular OPA es $\frac{1}{2}\theta$.

El área S3 del ΔOAQ = $\frac{1}{2}$ tan θ.



Como S1 < S2, se tiene que sen $\theta < \theta$ ... (1)

Como S2 < S3, se tiene que $\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ ... (2)

Ahora, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, por lo tanto $0 < \cos\theta$.

Luego de (1) y (2) se tiene que,

$\cos\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1$ ... (3)

Cuando $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, se tiene que $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y

sustituyendo $-\theta$ en (3), se tiene que;

$\cos(-\theta) < \frac{\text{sen}(-\theta)}{-\theta} < 1$, es decir $\cos\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1$.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$

Es decir, se verifica (3) para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$.

Ahora $\lim\limits_{x\to 0}\cos\theta = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Luego por la propiedad b)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1.$$

Objetivo: Aplicar el teorema 1.1.

Evaluación: Ejercicio 1.22, 1.23,1.24

Unidad II. Lección 1.

Clase 9

(Continúa en la siguiente página)

Clase 9. Aplicando el Teorema 1.1

Ejemplo 1.19. Calcule: $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}$

Solución: $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1\cdot 1 = 1.$

Veáse Clase 2 inciso d)

Ejercicio 1.22. Calcule.

a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}$

De ahora en adelante se utilizará el resultado de a) y el Teorema 1.1 indistintamente.
La variable puede ser cualquier letra.

Ejemplo 1.20. Calcule $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

Solución: Sea $\frac{\pi}{2}-x=t$. Entonces $x\to\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t\to 0$ y

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \operatorname{sen} t,$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

Ejercicio 1.23. Calcule. a) $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{\pi-x}$ b) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

Ejemplo 1.21. Calcule. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

Solución: a) Sea $2x=\theta$. Entonces $x\to 0\Leftrightarrow\theta\to 0$. Por lo tanto,

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\cdot 2 = 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 2\cdot 1 = 2$

b) Sea $2x=\alpha$ y $3x=\beta$. Entonces $x\to 0\Leftrightarrow\alpha\to 0\Leftrightarrow\beta\to 0$. Por lo tanto,

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{2}{3}$

$= \frac{2}{3}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{3}$

Si se puede, calcule sin utilizar α y β: $\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}$

$= \frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{3}$

Ejercicio 1.24. Calcule.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 4x}$ e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos 2x}$

Unidad II • Lección 1 • Clase 9. Aplicando el teorema 1 | 25

Ejemplo 1.19
(5 min)

Ejercicio 1.22
(8 min) Solución:

a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}$

$= 1 \div \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

$= 1 \div 1$

$= 1$

Nota: De ahora en adelante se usará el resultado del inciso a) y el teorema 1.1 indistintamente.

b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\tan\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta$

$= 1\cdot 1$

$= 1$

Ejemplo 1.20
(5 min)
En este ejemplo se hace un cambio de variable.

Ejercicio 1.23
(7 min)
Solución en pág. 34

Ejemplo 1.21
(10 min)

Ejercicio 1.24. (10 min)
Solución en pág. 34

Unidad II. Lección 1.
Ejercicios de la lección

Ejercicios de la lección

1. Encuentre el límite. (Clase 2)

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^3+2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{\sqrt{x-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\log_3\dfrac{x^3-x+2}{x^2+1}$

2. Calcule. (Clase 3)

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}$

3. Encuentre el valor de a y b que satisfacen la igualdad. (Clase 3)

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=4$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{5}$

*c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2+ax+b}=\dfrac{3}{10\sqrt{5}}$

4. Calcule. (Clase 4)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{|\cos x|}$

5. Calcule. (Clase 5)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x(x-1)}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$

6. Calcule. (Clase 6)

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-x}{2x^3-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+x}{x^3-x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+x}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

7. Calcule. (Clase 7)

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x}{x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 3^x$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\log_2 x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log_2 x$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3^x}{\log_2 x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}(2^x-x^3)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\log_{\frac{1}{3}} x\right)$

8. Calcule. (Clase 8)

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\log_2 x}$

9. Calcule. (Clase 9)

a) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\tan x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} 4x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} 3x}$ e) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

26 | Unidad II • Lección 1 • Ejercicios de la lección

---

1) a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\sqrt{3}$ c) 3 d) 0

2)

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+1)}=5$

c)

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+x-6)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x^2-1)-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

3) a) $3a+b+9=0$,
x^2+ax+b
$=(x-3)(x+a+3)$,
$\lim\limits_{x\to 3}(x+a+3)$
$=a+6=4$,
$a=-2,\quad b=-3$

b) $-3a+b+9=0$,
x^2+ax+b
$=(x+3)(x+a-3)$,
$\lim\limits_{x\to -3}(x+a-3)$
$=a-6=-5$,
$a=1,\quad b=-6$

c) $2a+b+4=0$,
x^2+ax+b
$=(x-2)(x+a+2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x+a+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\frac{3}{2(a+4)\sqrt{5}}=\frac{3}{10\sqrt{5}}.$$

$a=1,\quad b=-6$

4) a) ∞ b) ∞

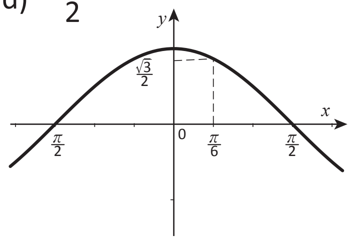
5) a) 0 b) 0 c) ∞ d) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}=-\infty$

6) a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+x+3)-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=-\dfrac{1}{2}$

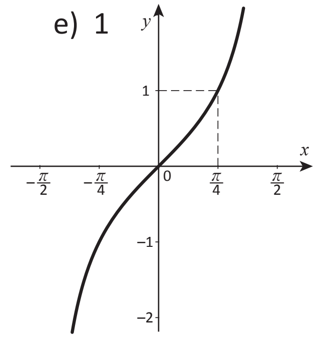
Incisos 7, 8 y 9 ver solución en página 34

Unidad II. Lección 1. Ejercicio 1.2. Pág. 21. Incisos d, e, f, g y h. Solución

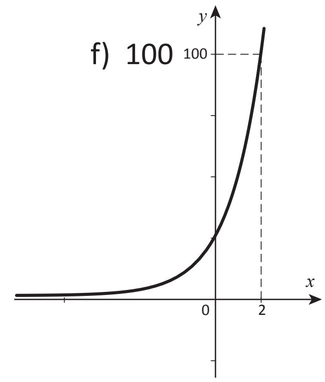
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



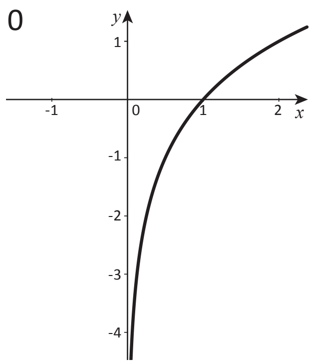
e) 1



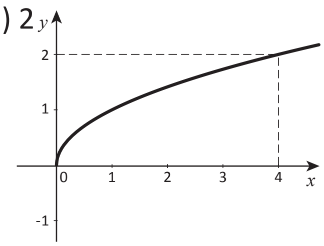
f) 100



g) 0



h) 2



Unidad II. Lección 1. * Ejercicio 1.18. Pág. 28.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^n \left(\frac{1}{a}\right)^x = (-1)^n \lim\limits_{x\to-\infty} x^n \left(\frac{1}{a}\right)^x = 0$ por a), porque $1 < \frac{1}{a}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n a^x = \lim\limits_{x\to\infty} (-x)^n \left(\frac{1}{a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} (-1)^n x^n \left(\frac{1}{a}\right)^x = \begin{cases} \infty & n: \text{par} \\ -\infty & n: \text{impar} \end{cases}$ por a) y Clase 1.4 c)

c) Sea $\log_c x = t$. Entonces $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_c x = \lim\limits_{t\to\infty} (c^t)^n \cdot t = \lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t$.

Si $n > 0$, entonces $c^n > 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t = \infty$ por a).

Si $n = 0$, entonces $c^n = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t = \lim\limits_{t\to\infty} t = \infty$

Si $n < 0$, entonces $0 < c^n < 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to\infty} t\,(c^n)^t = 0$ por b).

d) $\log_c x = -\log_{\frac{1}{c}} x$ y $1 < \frac{1}{c}$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_c x = -\lim\limits_{x\to\infty} x^n \log_{\frac{1}{c}} x$ $\begin{cases} -\infty & (0 \leq \mathrm{n}) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$ por c) y Clase 1.4

e) Sea $\log_c x = t$. Entonces $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to -\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \lim\limits_{t\to-\infty} (c^t)^n\, t = \lim\limits_{t\to-\infty} t\,(c^n)^t$.

Si $n > 0$, entonces $c^n > 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to-\infty} t(c^n)^t = 0$

Si $n = 0$, entonces $c^n = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to-\infty} t(c^n)^t = \lim\limits_{t\to\infty} t = -\infty$

Si $n < 0$, entonces $0 < c^n < 1$, por lo tanto $\lim\limits_{t\to-\infty} t(c^n)^t = -\infty$ por b).

f) $\log_c x = -\log_{\frac{1}{c}} x$ y $1 < \frac{1}{c}$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \log_c x = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^n \log_{\frac{1}{c}} x) = \begin{cases} 0 & (0 < n) \\ \infty & (n \leq 0) \end{cases}$ Por e) y Clase 4 c)

Unidad II. Lección 1. Ejercicio 1.23. Pág. 31. Solución:

a) Sea $\pi - x = t$. $x \to \pi \Leftrightarrow t = 0$ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\text{sen}x}{\pi - x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}(\pi - t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}\, t}{t} = 1$

b) Sea $x + \frac{\pi}{2} = t$. $x \to -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\text{sen}\, t} = 1$

Unidad II. Lección 1. Ejercicio 1.24. Pág. 31. Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 3\,\frac{\text{sen}\,3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\text{sen}\,2x}\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\text{sen}\,5x}\cdot\frac{3}{5} = 1\cdot 1\cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,4x}\cdot\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{4}\cdot\frac{\text{sen}\,2x}{2x}\cdot\frac{4x}{\text{sen}\,4x}\cdot\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \frac{2}{4}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$

e) Sea $\frac{\pi}{2} - 2x = t$. $x \to \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t \to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos 2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\text{sen}t} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Unidad II. Lección 1. Ejercicios de la lección. Pág. 32. Incisos 7,8 y 9 Solución:

7) a) ∞ b) 0 c) 0 d) 0 e) ∞ f) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\left(1-\frac{x^3}{2^x}\right) = \infty$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\log_{\frac{1}{3}}x}{x}\right) = \infty$

8) a) 0 b) 0

9) a) Sea $x + \pi = t$. $x \to -\pi \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}(t-\pi)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(-\frac{\text{sen}\, t}{t}\right) = -1$

b) Sea $x - \pi = t$. $x \to \pi \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan(t+\pi)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}\, t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\,\frac{4x}{\text{sen}\,4x} = \frac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6}{3}\,\frac{\text{sen}\,6x}{6x}\,\frac{3x}{\text{sen}\,3x} = 2$

e) Sea $x - \pi = t$. $x \to \pi \Leftrightarrow t \to 0$ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\text{sen}3(t+\pi)}{\text{sen}2(t+\pi)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{-\text{sen}3t}{\text{sen}2t} = -\lim\limits_{t\to 0}\frac{3}{2}\,\frac{\text{sen}3t}{3t}\,\frac{2t}{\text{sen}2t} = -\frac{3}{2}$

Objetivo: Entender la definición y la propiedad de la continuidad en el punto.

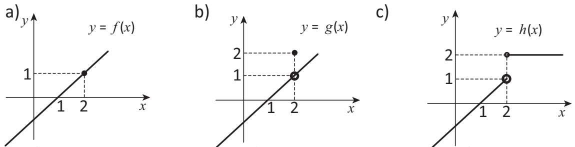
Evaluación: Ejercicio 2.1

Unidad II. Lección 2.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Lección 2. Continuidad de funciones
Clase 1. Continuidad en el punto

Ejemplo 2.1. Encuentre lo que se pide.

a) b) c)



$\lim_{x\to 2} f(x)$ $\qquad \lim_{x\to 2} g(x)$ $\qquad \lim_{x\to 2} h(x)$

$f(2)$ $\qquad g(2)$ $\qquad h(2)$

Solución: a) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ b) $\lim_{x\to 2} g(x) = 1$ c) $\lim_{x\to 2} h(x)$ no existe

$f(2) = 1$ $\qquad g(2) = 2$ $\qquad h(2) = 2$

El signo "∘" significa que el punto no pertenece a la gráfica. El signo "•" significa que sí pertenece a la gráfica.

$\lim_{x\to 2^-} h(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 2$

En el Ejemplo 2.1 solo $f(x)$ es continua en 2.

$f(x)$ debe ser definida en a y su alrededor.

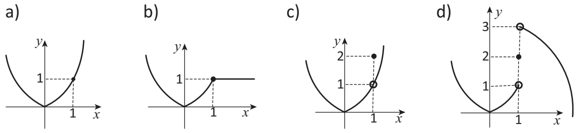
Definición. Continuidad en el punto

Sea $y = f(x)$ una función, $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Nota: Aplicando la Explicación 2 de la Clase 1.1 de la Lección 1, la definición tiene la forma siguiente: $f(x)$ es continua en el punto a, cuando se verifica lo siguiente: Para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe número $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Ejercicio 2.1. Elija las gráficas de funciones que son continuas en $x = 1$

a) b) c) d)



Propiedad de la continuidad

Si $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas en $x = a$, entonces las siguientes son continuas en $x = a$:

a) $y = f(x) + g(x)$

b) $y = f(x) - g(x)$

c) $y = kf(x)$, (k: número real)

d) $y = f(x)g(x)$

e) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (g(a) \neq 0)$

Ejemplo 2.1
(10 min)

Definición de continuidad en el punto
(5 min)

Ejercicio 2.1
(5 min) Solución:
a) y b)

Propiedad de la Continuidad
(10 min)
Todas se deducen de la propiedad del límite.

Unidad II. Lección 2.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: **[A]** Entender la definición y los ejemplos típicos de la función continua.
[B] Entender la definición del valor máximo y mínimo.

Evaluación: [A] Mencionar los ejemplos de la función continua.
[B] Ejercicio 2.3

Ejercicio 2.2
(15 min)
Para $f(x) - g(x)$, se utiliza b) de la clase 1.2,
Para $kf(x)$, c),
Para $f(x)g(x)$, d),
Para $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, e).

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Definición de continuidad en el intervalo.
(5 min)

Propiedad de las funciones continúas.
(5 min)
No es necesario dar una explicación rigurosa.

Ejemplos de funciones continuas
(10 min)
Dé unos ejemplos de cada inciso. Puede ser:
1. $y = 2x^3 - x + 1$
2. $y = \dfrac{x^3+5}{x^2-x-1}$ en su dominio.
3. $y = \operatorname{sen} x$,
$y = \cos(x - \dfrac{\pi}{5})$
$y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{4})$
$y = \operatorname{sen}^{-1} x$
4. $y = -3^{-x}$
$y = \log_2(x+1)$

Demostración de que $y = f(x) + g(x)$ es continua.
De hipótesis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.
De a) de la Clase 1.2, se tiene que:
$$\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a).$$

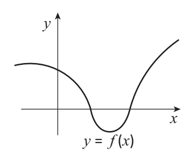
Ejercicio 2.2. Demuestre la continuidad de los demás casos de la propiedad.

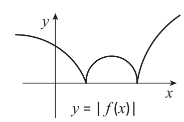
Clase 2. Continuidad en el intervalo

Definición de continuidad en el intervalo
$f(x)$ es continua en $x = a$ del intervalo $[a, b)$ cuando $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
$f(x)$ es continua en $x = b$ del intervalo $(a, b]$ cuando $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.
Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo, cuando es continua en todos los puntos del intervalo

[A]

Intuitivamente la continuidad significa que la gráfica no está cortada.





Propiedad de las funciones continuas.
Funciones continuas tienen la misma propiedad que se explicó en la clase 1. Además:

f) Si $f(x)$ es continua, entonces $|f(x)|$ lo es.
g) Si $f(x)$ es continua, entonces $\sqrt{f(x)}$ lo es donde $f(x) \geq 0$.
h) Si $f(x)$ es continua y tiene su inversa f^{-1}, entonces f^{-1} lo es.

Ejemplos de funciones continuas:
1. Funciones polinómicas
2. Funciones racionales
3. Funciones trigonométricas y sus inversas
4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Definición Valor máximo y mínimo
El valor M (respectivamente m) es el máximo (respectivamente mínimo) de la función $y = f(x)$ cuando:
$f(x) \leq M$ [respectivamente $m \leq f(x)$] en su dominio.
Existe un valor $x = a$ en su dominio tal que $f(a) = M$ (respectivamente $f(a) = m$).

Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.
Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado, entonces esta función tiene valor máximo y mínimo en este intervalo.

[B]

La condición "cerrado" es crucial como se ve en el Ejemplo 2.2.
Se omite demostración.

28 | Unidad II • Lección 2 • Clase 2. Continuidad en el intervalo

Definición de valor máximo y mínimo
(5 min)
Lo importante es que si algún valor es el valor máximo o/y mínimo, la función toma este valor en su rango.

Teorema Valor máximo y mínimo de la función continua.
(5 min)

Objetivo: Entender el teorema del valor intermedio y aplicarlo a la ecuación.

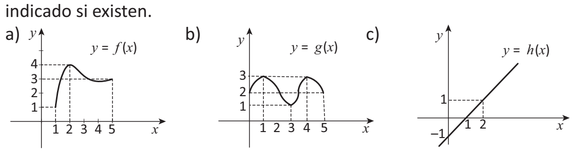
Evaluación: Ejercicio 2.4

Unidad II. Lección 2.

Clase 2
(Continuación)

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Ejemplo 2.2. Encuentre el valor máximo y/o mínimo en el intervalo indicado si existen.



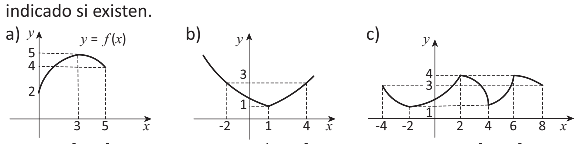
En [1, 5]   En [0, 5]   En [0, 2], (0, 2], (0, 2)

Solución: a) máximo $f(2) = 4$, mínimo $f(1) = 1$
b) máximo $g(1) = g(4) = 3$, mínimo $g(3) = 1$
c) En [0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo $h(0) = -1$
En (0, 2] máximo $h(2) = 1$, mínimo no existe.
En (0, 2) máximo no existe, mínimo no existe.

Cuando se trata de máximo y mínimo se indica el valor de x donde la función toma estos valores.

El mínimo no existe porque $h(x)$ toma valores mayores que -1 y que están en cualquier cercanía de -1.

Ejercicio 2.3. Encuentre el valor mínimo y/o máximo en el intervalo indicado si existen.



En [0, 5]   En (-2, 4]   En [-4, 8]

Clase 3. Teorema del valor intermedio

Teorema del valor intermedio
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$. Sea $f(a) \neq f(b)$ y $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = k$.

Se omite la demostración, para la cual hay que definir el conjunto de números reales de manera rigurosa.

Ejemplo 2.3. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo (1, 2).

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$. La función $y = f(x)$ es continua en [1, 2].
Por otra parte $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$.
Como $f(1) < 0 < f(2)$, por el Teorema del valor medio existe c en (1, 2) tal que $f(c) = 0$.

Ejercicio 2.4. Demuestre que cada ecuación tiene solución en el intervalo indicado.

a) $2x^3 + x^2 - 4 = 0$ (1, 2)   b) $\log_2 x + x - 2 = 0$ (1, 2)

c) $2^x - 3x = 0$ (3, 4)   d) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

Unidad II • Lección 2 • Clase 3. Teorema del valor intermedio | 29

Ejemplo 2.2
(9 min)

Ejercicio 2.3
(6 min) Solución
a) máximo 5 ($x = 3$)
mínimo 2 ($x = 0$)

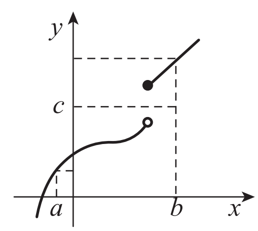
b) máximo 3 ($x = 4$)
mínimo 1 ($x = 1$)

c) máximo 4 ($x = 2, 6$)
mínimo 1 ($x = -2, 4$)

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Teorema del Valor Intermedio.
(10 min)
Si la función no es continua, no verifica el teorema.



Ejemplo 2.3
(15 min)

Ejercicio 2.4
(20 min) Solución
Se expresa el lado izquierdo de la ecuación por $f(x)$.

a) $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 16$

b) $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 1$

c) $f(3) = -1 < 0 < f(4) = 4$

d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{4} > 0 > f(\pi) = 1 - \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto en cada caso existe un número c en cada intervalo tal que $f(c) = 0$.

Unidad II. Lección 2.
Ejercicios de la lección

Unidad II. Lección 3.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Entender la definición de la asíntota.

Evaluación: Ejercicio 3.1

Soluciones:
1) Se expresa el lado izquierdo por $f(x)$.
a) $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 1$
b) $f(1) = -1 < 0 < f(4) = 3$
c) $f(0) = 1 > 0 > f(1) = -\frac{5}{3}$
d) $f(0) = 1 > 0 > f\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto por el teorema del valor intermedio existe un número c en cada intervalo tal que $f(c) = 0$.

[Hasta aquí Clase 3 de Lección 2]

[Desde aquí Clase 1 de Lección 3]

Definición de asíntota.
(5 min)

Ejemplos de asíntotas verticales.
(10 min)

Ejemplos de asíntotas horizontales
(10 min)

Ejercicios de la lección

1. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado. Clase 3
   a) $x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0$ (1, 2) b) $\log_{\frac{1}{2}} x + 2x - 3 = 0$ (1, 4)
   c) $(\frac{1}{3})^x - 2x = 0$ (0, 1) d) $\cos x - 2x = 0$ $(0, \frac{\pi}{4})$

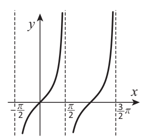
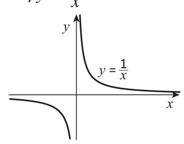
Lección 3. Asíntotas
Clase 1. Asíntotas

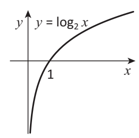
Se le denomina **asíntota** a una recta a la cual la gráfica se acerca sin límite y sin tocarla.

Este tipo de asíntotas aparece en el límite del dominio de la función.

Ejemplos de asíntotas verticales:

a) $y = \tan x$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = \log_2 x$



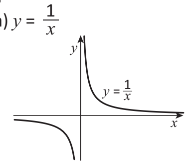
Asíntotas verticales

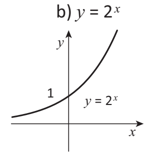
$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n: número entero) $x = 0$ $x = 0$

En b) $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Ejemplos de asíntotas horizontales.

a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = 2^x$





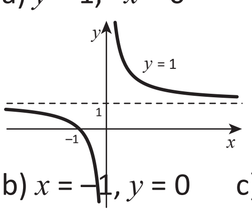
Asíntotas horizontales

$y = 0$ $y = 0$

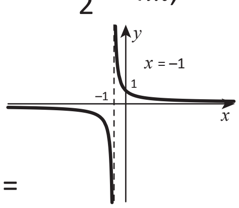
En la Unidad IV, se aprenderán otro tipo de asíntotas.

Ejercicio 3.1. Dibuje la gráfica. Encuentre la ecuación de la asíntota.
a) $y = \frac{1}{x} + 1$ b) $y = \frac{1}{x+1}$ c) $y = \sec x$ d) $y = 3^x - 1$ e) $y = \log_3 (x + 1)$

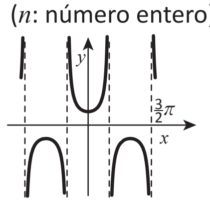
Ejercicio 3.1
(20 min) Solución
a) $y = 1$, $x = 0$



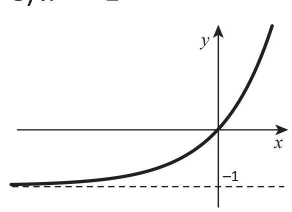
b) $x = -1$, $y = 0$



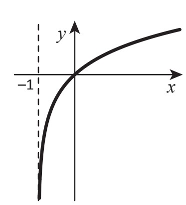
c) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, (n: número entero)



d) $y = -1$



e) $x = -1$



Unidad II. Lección 2.
Problemas de la Unidad

Problemas de la Unidad A

Solución

1. a) Sea $\sqrt{x} = t$.

Entonces $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log_2 x$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} t\log_2 t^2$

$= 2\lim\limits_{t\to 0^+} t\log_2 t = 0$

(Clase 1.7 e))

Problemas de la unidad A

1. Calcule. Clase 1.7
   a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log_2 x$
   b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$
   c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}}}{x^2}$
2. Demuestre que la ecuación tiene solución en el intervalo indicado. Clase 2.3
   a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 2x = 0$ $\quad\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
   b) $\tan x = 3x \operatorname{sen} x$ $\quad\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

Problemas de la unidad B

1. Demuestre que para cada número negativo k, la ecuación $\log_2 x = kx$ tiene solución en el intervalo (0, 1).

Unidad II • Problemas de la Unidad | 31

b) Sea $\sqrt{x} = t$. Entonces $x \to \infty \Leftrightarrow t \to \infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 2^{-\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{t\to\infty} t^4 \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0$

(Clase 1.7 b))

c) Sea $\sqrt{x} = t$. Entonces $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3^{\sqrt{x}}}{x^2} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{3^t}{t^4}$

$= \infty$

2. a) Sea $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 2x$.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0 > f(1) = -2$.

Como $f(x)$ es continua en $[\frac{1}{3}, 1]$, por el teorema del valor intermedio, existe un número c en $(\frac{1}{3}, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Como $\operatorname{sen}x \neq 0$ y $\cos x \neq 0$ en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, la ecuación equivale a $x\cos x = \frac{1}{3}$.

$x\cos x$ es continua en $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} > \frac{1}{3} > \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Por el teorema del valor intermedio existe un número c en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $c\cos(c) = \frac{1}{3}$.

Problemas de la Unidad B

Solución:

1. Sea $f(x) = \log_2 x - kx$.

$f(1) = -k > 0$. Por otra parte, como $\lim\limits_{t\to 0^+} f(x) = -\infty$, existe un número a tal que $0 < a < 1$ y $f(a) < k$.

La función $f(x)$ es continua en $[a, 1]$ y $f(a) < k < f(1)$. Luego por el teorema del valor intermedio, existe un número c tal que $a < c < 1$ y $f(c) = 0$.

Matemáticas IV
Unidad III

Diferenciación e integrales de funciones polinómicas

1. Competencias de la Unidad

1. Establecer la definición de la derivada de una función polinómica.
2. Establecer la definición de recta tangente a una gráfica de una función polinómica.
3. Aplicar la derivada para hacer gráfica de una función polinómica.
4. Establecer la definición de la integral indefinida de una función polinómica.
5. Establecer la definición de la integral definida de una función polinómica.
6. Aplicar la integral definida para encontrar área.
7. Valorar la importancia de la derivada y la integral para resolver problemas de la ciencia y la tecnología.

2. Relación y Desarrollo

Matemática II

Unidad I: Funciones algebraicas
- Gráficas de funciones polinomiales

Matemática IV

Unidad II: Límites y continuidad
- Lección 1: Límite de funciones

Matemáticas IV

Unidad III: Diferenciación e integral de funciones polinómicas
- Lección 1: Derivada de funciones polinomiales
- Lección 2: Aplicación de derivada
- Lección 3: Integrales

Matemática IV

Unidad IV: Derivadas de funciones trascendentales

3. **Plan de Estudio de la Unidad** (22 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1 Derivadas de funciones polinómicas	1	Velocidad en el instante	
	2	Definición de derivada	derivada de $f(x)$, diferenciar, diferenciable (derivable), $f'(x)$
	3	Propiedad de derivada, derivada de monomios	
		Ejercicios de la lección	
2 Aplicación de derivada	1	Definición de la tangente, tangente en un punto de la gráfica, tangente que pasa por un punto fuera de la gráfica	tangente
	2	variación de la función, tabla de variación	creciente, decreciente
	3	Extremos relativos	máximo (mínimo) relativo, extremo relativo
	4	Gráfica de función de tercer grado con extremos relativos	
	5	Gráfica de función de tercer grado sin extremos relativos	
	6	Extremos de funciones	
	7	Aplicación de extremos	
	8	Encontrar el número de soluciones reales distintas de ecuación de tercer grado	
	9	Encontrar el número de soluciones reales distintas de ecuación de tercer grado donde los coeficientes contienen variable	
	10	Aplicación a la demostración de inecuación	
		Ejercicios de la lección	

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
3 Integrales	1	Definición de integral definida, función primitiva de potencia de x	función primitiva, integrar, constante de integración, integral indefinida $\int f(x)dx$
	2	Propiedad lineal de la integral indefinida	
	3	Definición de la integral definida, propiedad lineal de la integral definida	integral definida, límite superior (inferior), $\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b$
	4	Propiedad de la integral definida acerca de sus límites	
	5	Derivada de la integral definida con respecto a su límite	
	6	Representación del área de la parte comprendida entre una gráfica y el eje x con integral definida	
	7	Tipo básico del cálculo del área	
	8	Área de la parte comprendida entre dos gráficas	
	9	Cálculo del área delimitada por dos líneas	
		Ejercicios de la lección	
Problemas de la Unidad		Problemas de la Unidad A	
		Problemas de la Unidad B	

Puntos de lección

Lección 1: Derivadas de funciones polinómicas

El fundamento del cálculo infinitesimal es difícil para los estudiantes de bachillerato y en la mayoría de los casos no se enseña bien, la diferenciación y la integral de funciones polinómicas es muy fácil. Hay sólo dos fórmulas a memorizar: diferenciación $(x^n)' = nx^{n-1}$ integral $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$. Además, este aprendizaje proporciona a los estudiantes una buena oportunidad para conocer la eficacia de matemáticas.

La lección empieza la explicación acerca de la "velocidad en un instante" y la relaciona con la pendiente de la tangente de la gráfica. Se espera que los estudiantes entiendan el sentido manejando el ejemplo de valores concretos.

Aunque es importante que los estudiantes conozcan la definición de la derivada, una vez que aprendan la fórmula, no hay necesidad de recurrirse a ella.

Lección 2 Aplicación de derivada

La primera aplicación que se estudia es la tangente. El hecho de que su pendiente es igual al valor de la derivada viene de la propia definición de la derivada. Es fácil encontrar la tangente cuando está dado el punto de tangencia, pero encontrar la tangente que pasa por el punto dado que está fuera de la gráfica es un poco difícil. Los estudiantes encontraron la misma situación en Matemática III Unidad II.

La segunda aplicación es el cambio del valor de la función. La relación entre el cambio del valor y el signo de la derivada es demostrado utilizando el teorema del valor medio que se enseña en la Unidad IV (aún no está demostrado en esa unidad). Aquí basta la explicación con unos ejemplos y la gráfica. Hay que tener cuidado con el hecho de que $f'(a) = 0$ no siempre significa que $f(x)$ toma su extremo relativo en $x = a$. Utilizando la gráfica se puede encontrar el número de distintas soluciones reales de la ecuación y demostrar la inecuación.

Lección 3 Integrales

Después de la definición de la derivada, no hay mucha dificultad en el aprendizaje salvo el uso de las fracciones en el cálculo de integral definida. El Libro del Estudiante trata de evitarlo cuanto sea posible.

Unidad III. Lección 1.
Clase 1
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Aplicar el concepto de la velocidad en el instante para definir la pendiente de una función.

Evaluación: Explicar cómo encontrar la velocidad en el instante.

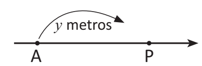
Ejemplo 1.1
(15 min)
El objetivo es entender que la velocidad corresponde a la pendiente de la gráfica de tiempo-recorrido.

Ejemplo 1.2
(30 min)
Si se agranda la vecindad del punto (1,1) de la gráfica $y = x^2$, se ve como una recta.
La pendiente corresponde a la velocidad en el instante de $x = 1$.
Para encontrar la pendiente, se toma un punto cerca de (1, 1) y calcula la pendiente de la recta que une este punto con (1, 1).
Luego se acerca este punto a (1, 1) y el límite es la pendiente.

Lección 1. Derivadas de funciones polinómicas

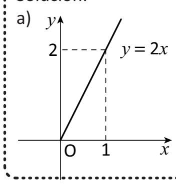
Clase 1. Velocidad en el instante

Ejemplo 1.1. En la recta numérica, un punto P sale del punto A y se mueve hacia la derecha. La distancia y metros, entre los puntos P y A después de x segundos está dada como $y = 2x$.



a) Haga la gráfica de la función $y = 2x$ ($x \geq 0$).
b) Encuentre la velocidad metros/segundo (m/s) del punto P.

Solución:
a)



b)

x	0	1
y	0	2
Δx	1	
Δy	2	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	2	

Respuesta:
2 metros/segundo ó
2m/s

[A] Relación entre la distancia, el tiempo y la velocidad.

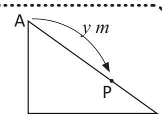
Δx, representa la diferencia (o cambio) de x. Se aplica lo mismo a Δy.

$\Delta x = 1 - 0 = 1$
$\Delta y = 2 - 0 = 2$

Nota: En este ejemplo, la velocidad no cambia y

velocidad = la pendiente de la gráfica.

Ejemplo 1.2. Una bolita P sale del punto A cae en la pendiente. La distancia y metros entre A y P después de x segundos está dada como $y = x^2$.



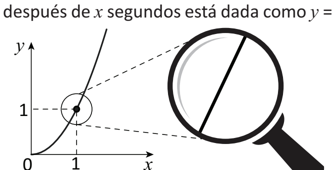


Figura 1.1

Ahora la gráfica de $y = x^2$ no es una recta, lo que quiere decir, la velocidad va cambiando. Sin embargo, si se agranda la parte alrededor del punto (1, 1) la gráfica parece casi una recta. Ahora se trata de encontrar su "pendiente".

Encuentre la pendiente completando la tabla.

x	1	2	1	1.1	1	1.01	1	1.001
y								
Δx								
Δy								
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$								

34 | Unidad III • Lección 1 • Clase 1. Velocidad en el instante

Objetivo: Entender la definición de derivada.

Evaluación: Ejercicio 1.1

x	0	1	0.9	1	0.99	1	0.999	1
y								
Δx								
Δy								
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$								

Solución:

x	1	2	1	1.1	1	1.01	1	1.001	
y	1	4	1	1.21	1	1.0201	1	1.002001	
Δx	1		0.1		0.01		0.001		
Δy	3		0.21		0.0201		0.002001		
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3		2.1		2.01		2.001		$\to 2$

x	0	1	0.9	1	0.99	1	0.999	1	
y	0	1	0.81	1	0.9801	1	0.998001	1	
Δx	1		0.1		0.01		0.001		
Δy	1		0.19		0.0199		0.001999		
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	1		1.9		1.99		1.999		$\to 2$

Respuesta: La "pendiente" es 2.

Este corresponde a la "velocidad en $x = 1$".

Clase 2. Definición de derivada

La Figura 1.2 muestra la gráfica de una función. Se toman dos puntos P(a, $f(a)$) y Q($a + h$, $f(a + h)$) en la gráfica. La pendiente de la recta PQ es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ahora el punto Q se acerca al punto P. Entonces la pendiente de la recta se acerca a la pendiente de la recta l, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{la pendiente de } l$$

La función que corresponde el valor de $x = a$, a este límite se llama **derivada** de $f(x)$.

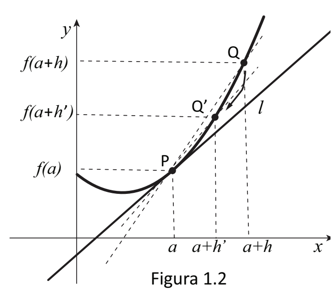


Figura 1.2

Si se calcula a mano, se entenderá mejor que el límite es 2.

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Clase 2
(Continuación)

Definición de Derivada
(20 min)
Se explica relacionando con el Ejemplo 1.2 de la Clase 1.
Que el punto Q tiende a P corresponde a que Δx tiende a 0 en el Ejemplo 1.2

Ejemplo de una función no diferenciable
(5 min)
Los estudiantes tienen que entender que la gráfica de función diferenciable es "suave".

Ejemplo 1.3
(5 min)

Ejercicio 1.1
(10 min) Solución

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)-x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$

$f'(1) = 1$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)-3x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3 = 3$

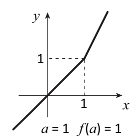
$f'(1) = 3$

Definición de derivada
Sea $f(x)$ una función. Cuando existe el límite $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se le denomina derivada de $f(x)$.

Se denomina **diferenciación** al encontrar la derivada.

Nota: Hay funciones que no tienen derivada.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \le x) \end{cases}$



$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1, \qquad \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$

Por lo tanto

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ no existe.

Ejemplo 1.3. Sea $f(x) = x^2$. Encuentre $f'(x)$.

Solución: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2x+1)h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (2x+h) = 2x$

Nota: Si se sustituye $x = 1$ en $f'(x)$, se obtiene $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, el valor que se ha obtenido en el Ejemplo 1.2.

Ejercicio 1.1. Encuentre $f'(x)$ y $f'(1)$.
a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 2$ d) $f(x) = x^2 + 3x$

Nota: $\boxed{\text{Una función diferenciable es una función continúa.}}$

* Demostración: $\lim\limits_{x\to a} \{f(x) - f(a)\} = \lim\limits_{h\to 0} \left\{ \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \right\}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \lim\limits_{h\to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0$

Luego $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Otras notaciones

$\dfrac{d}{dx} f(x)$.

Cuando se trata de la función $y = f(x)$

y', $\dfrac{dy}{dx}$ (derivada de y con respecto a x).

Cuando $f(x)$ tiene su derivada se dice que $f(x)$ es **diferenciable (derivable)**.

$f(1+h) = \begin{cases} 1+h & (h < 0) \\ 2(1+h)-1 & (0 \le h) \end{cases}$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1+h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h}{h}$

$= 1$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\{2(1+h)-1\}-1}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\cancel{2}+2\cancel{h}-\cancel{2}}{\cancel{h}} = 2$

Para encontrar $f'(1)$ basta sustituir $x = 1$ en $f'(x)$.

36 | Unidad III • Lección 1 • Clase 2. Definición de derivada

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0 \qquad f'(1) = 0$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\{(x+h)^2 + 3(x+h)\} - (x^2 + 3x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2xh + h^2 + 3h}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} (2x + h + 3) = 2x + 3 \qquad f'(1) = 2(1) + 3 = 5.$

Nota (5 min)

Objetivo: Derivar polinomios utilizando la propiedad de derivada.

Evaluación: Ejercicio 1.2, Ejercicio 1.3, Ejercicio 1.4

Unidad III. Lección 1.
Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Clase 3. Cálculo de la derivada

Propiedad de derivada

a) c es constante $\Rightarrow$ $(c)' = 0$

b) $\{kf(x)\}' = k f'(x)$ $\quad k$: constante

c) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

d) $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

$(c)'$ significa derivada de c como función de x.

Se verifica la inversa de a).

$f'(x) = 0$ en un intervalo $\Rightarrow f(x)$ es constante en este intervalo.

Se omite demostración.

Demostración: a) Sea $f(x) = c$. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

b) Sea $g(x) = kf(x)$; $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$

$$= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$$

c) y d) se demuestran utilizando Matemática IV, Unidad II, Lección 1, Clase 2.

IV, II, Clase 2.

De la propiedad anterior, se reduce el cálculo de la derivada de la función polinómica al de monomios. En cuanto a esto último, se tiene la siguiente:

Derivada de monomios

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad$ (n: número natural)

$(x)' = 1$
$(x^2)' = 2x$
$(x^3)' = 3x^2$

* Demostración. Primero se tiene la siguiente igualdad

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots + b^{n-1})$$
(n: número natural)

Para la demostración desarrolle el lado derecho.

Luego, sean $x + h = a$ y $x = b$.

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$$

$$= \lim_{h\to 0}(a^{n-1} + a^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

$a - x = h$
$\lim\limits_{h\to 0} a = x$

Ejemplo 1.4. Sea $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

Solución: $f'(x) = (2x^3 - 3x + 4)'$
$= (2x^3)' - (3x)' + (4)'$
$= 2(x^3)' - 3(x)'$
$= 2\cdot 3\cdot x^{3-1} - 3x^{1-1}$
$= 2\cdot 3x^2 - 3\cdot 1$
$= 6x^2 - 3$

$f'(2) = 6\cdot 2^2 - 3$
$= 21$

No siempre es necesario escribir el proceso tan detalladamente.

Unidad III • Lección 1 • Clase 3. Cálculo de la derivada | 37

Propiedad de la derivada (12 min)

Solución:

c) $\{f(x) + g(x)\}'$
$= f(x)' + g'(x)$

sea $d(x) = f(x) + g(x)$

$d'(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

d) $\{f(x) - g(x)\}'$
$= f'(x) - g'(x)$

sea $d(x) = f(x) - g(x)$

$d'(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) - g'(x)$$

Derivada de monomios (5 min)

* Demostración se puede omitir

Ejemplo 1.4 (5 min)

Unidad III. Lección 1.

Clase 3

(Continuación)

Ejercicios de la lección

Ejercicio 1.2

(5 min) Solución

a) $f'(x) = 12x^2 - 2$,
$f'(2) = 46$

b) $f'(x) = 6x + 4$,
$f'(2) = 16$

c) $f'(x) = -20x^3 - 6x + 4$
$f'(2) = -168$

d) $f'(x) = 6x^2$,
$f'(2) = 24$

Ejemplo 1.5

(4 min)

Ejercicio 1.3

(6 min) Solución

a) $y = 3x^2 + 5x + 2$,
$y' = 6x + 5$

b) $y = 4x^2 - 4x + 1$,
$y' = 8x - 4$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$,
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$

d) $f(x) = 4x^2 - 36$
$f'(x) = 8x$

Ejemplo 1.6

(4 min)

Ejercicio 1.4

(4 min) Solución

a) $\dfrac{d}{dr} f(r) = 2\pi r$

b) $\dfrac{d}{ds} g(s) = 6s - 1$

c) $\dfrac{dy}{dr} = 2\pi rh$

d) $\dfrac{dz}{dy} = -15y^2 + 6y$

Ejercicio 1.2. Encuentre $f'(x)$ y $f'(2)$.

a) $f(x) = 4x^3 - 2x + 5$ b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = -5x^4 - 3x^2 + 4x$ d) $f(x) = 2x^3 - 3$

Ejemplo 1.5. Sea $y = (2x - 1)(x + 3)$. Encuentre y'.

Solución: $y = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 5x - 3$

$y' = 4x + 5$

Ejercicio 1.3. Encuentre y' o $f'(x)$.

a) $y = (3x + 2)(x + 1)$ b) $y = (2x - 1)^2$

c) $f(x) = (x^2 + 2x)(x - 1)$ d) $f(x) = 4(x + 3)(x - 3)$

Ejemplo 1.6. Sea $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\dfrac{d}{dr}V(r)$.

Solución: $\dfrac{d}{dr}V(r) = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$

$\dfrac{d}{dr}$ quiere decir "derivar con respecto a r".

Ejercicio 1.4. Encuentre la derivada:

a) $f(r) = \pi r^2$, $\dfrac{d}{dr}f(r)$ b) $g(s) = 3s^2 - s$, $\dfrac{d}{ds}g(s)$

c) $y = \pi r^2 h$, $\dfrac{dy}{dr}$ d) $z = -5y^3 + 3y^2$, $\dfrac{dz}{dy}$

Ejercicios de la lección

1. Calcule la derivada aplicando la definición. Clase 2
   a) $f(x) = -2x$ b) $f(x) = x^2 - x$

2. Encuentre lo que piden. Clase 3
   a) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $f'(x)$, $f'(-1)$

   b) $g(x) = (2x + 3)(3x - 1)$ $g'(x)$, $g'(-2)$

   c) $h(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$ $\dfrac{d}{dt}h(t)$, $\dfrac{d}{dt}h(1)$

38 | Unidad III • Lección 1 • Ejercicios de la lección

Ejercicios de la Lección. Solución

1. a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2(x+h) - (-2x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(-2) = -2$

   b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2 - (x+h)\} - (x^2 - x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh + h^2 - h}{h}$

   $= \lim\limits_{h\to 0}(2x + h - 1) = 2x - 1$

Inciso 2 Veáse solución en la página 56

Objetivo: Definir la tangente de una función.

Evaluación: Ejercicio 2.1

Unidad III. Lección 2.

Clase 1

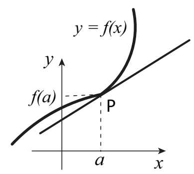
(Continúa en la siguiente página)

Lección 2. Aplicación de derivada

Clase 1. Tangente

Definición de tangente
Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Sea P$(a, f(a))$ un punto de su gráfica. La tangente de la gráfica en el punto P es la línea que pasa por P cuya pendiente es $f'(a)$.

Ecuación de tangente
La tangente de la gráfica $y = f(x)$ en el punto P$(a, f(a))$ es
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ... (1)



Demostración: la pendiente de (1) es $f'(a)$.
(1) pasa por el punto $(a, f(a))$.

La línea que pasa por (a, b) y cuya pendiente es m es:
$y - b = m(x - a)$
[Matemática I. Unidad IV]

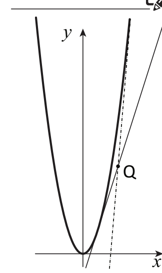
Ejemplo 2.1. Encuentre la tangente a la gráfica de $y = x^2 - x + 3$ en el punto (2, 5) de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2 - x + 3$.
$f'(x) = 2x - 1.$ $f'(2) = 3$

La tangente es una línea que pasa por (2,5) y cuya pendiente es 3.
Por lo tanto,
$y - 5 = 3(x - 2),$ $y = 3x - 1$ (Respuesta)

Ejercicio 2.1. Encuentre la tangente de las siguientes gráficas en el punto dado.

a) $y = x^2 - 3x + 4,$ (1, 2) b) $y = -3x^2 + 4x + 1,$ (1,2)
c) $y = -x^3 + 2x^2 + 1,$ (−1, 4) d) $y = x^3 - 3x,$ (−1, 2)



*** Ejemplo 2.2.** Encuentre la tangente de la gráfica $y = x^2$ que pasa por el punto Q(3,8) fuera de la gráfica.

Solución: Sea $f(x) = x^2$. Sea (a, a^2) el punto de tangencia.
La pendiente de la tangente es $f'(a) = 2a$.
Como pasa por el punto (a, a^2), la tangente es:
$y = 2a(x - a) + a^2,$ $y = 2ax - a^2$ ...(1)
Esta línea pasa por el punto (3, 8), por lo tanto, sustituyendo (3,8) en (1):
$8 = 2a \cdot 3 - a^2,$ $a^2 - 6a + 8 = 0,$ $(a - 2)(a - 4) = 0$
$a = 2$ y 4
Sustituyendo $a = 2$ en (1), se obtiene que: $y = 4x - 4$
Sustituyendo $a = 4$ en (1), se obtiene que: $y = 8x - 16$
Respuesta: $y = 4x - 4$ y $y = 8x - 16$

Los puntos de tangencia: sustituyendo, $a = 2, 4$ en (a, a^2)
(2, 4) y (4, 16)

Unidad III • Lección 2 • Clase 1. Tangente | 39

*** Ejemplo 2.2**

Definición de tangente
(10 min)
En el Ejemplo 1.2, la tangente de $y = x^2$ en (1, 1) corresponde a la imagen de la derecha en la Fig. 1.1.

Ecuación de tangente
(5 min)
El aspecto importante es que la pendiente de la tangente es el valor de la derivada en el punto de tangencia.

Ejemplo 2.1
(10 min)

Ejercicio 2.1
(20 min) Solución

a) Sea $f(x) = x^2 - 3x + 4$
$f'(x) = 2x - 3, f'(1) = -1$
tangente $y - 2 = -(x - 1),$
$y = -x + 3$

b) $y' = -6x + 4,$
pendiente -2
tangente $y - 2 = -2(x - 1),$
$y = -2x + 4$

c) $y' = -3x^2 + 4x,$
pendiente -7
tangente $y - 4 = -7(x + 1),$
$y = -7x - 3$

d) $y' = 3x^2 - 3,$
pendiente 0
tangente $y - 2 = 0(x + 1),$
$y = 2$

Unidad III. Lección 2.

Clase 1
(Continuación)

Clase 2
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Establecer la relación entre el signo de la derivada y el cambio del valor de la función.

Evaluación: Ejercicio 2.3 y 2.4

*** Ejercicio 2.2**

Solución:

Sea a la coordenada x del punto de tangencia.

a) tangente $y = 2a(x-a)+a^2$
$y = 2ax - a^2$.
Sustituyendo (2, 3)
$a^2 - 4a + 3 = 0$, $a = 1, 3$
$y = 2x - 1$, y $y = 6x - 9$.

b) tangente $y = (-2a + 3)(x - a) + (-a^2 + 3a)$.
Sustituyendo (2, 3),
$a^2 - 4a + 3 = 0$
$a = 1, 3$ $\quad y = x + 1$,
$y = -3x + 9$

c) tangente
$y = -2a(x-a) - a^2$
Sustituyendo (2, 5)
$a^2 - 4a - 5 = 0$
$a = 5, -1$ $\quad y = -10x + 25$,
$y = 2x + 1$

d) tangente $y = 6a(x - a) + 3a^2 - 1$.
Sustituyendo (1, −1)
$3a^2 - 6a = 0$
$a = 0, 2$ $\quad y = -1$,
$y = 12x - 13$

[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Definición: creciente y decreciente (2 min)

Ejemplo (4 min)

Teorema (4 min)

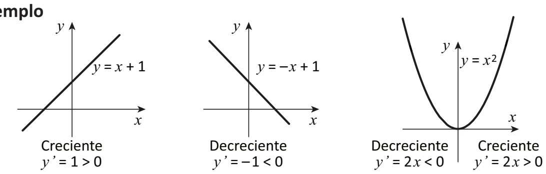
*** Ejercicio 2.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto dado.

a) $y = x^2$, (2, 3) b) $y = -x^2 + 3x$, (2, 3)
c) $y = -x^2$, (2, 5) d) $y = 3x^2 - 1$, (1, −1)

Clase 2. Tabla de variación

Definición: En un intervalo una función $f(x)$ es:
Creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ejemplo



Como se ve en este ejemplo, hay una relación entre el cambio del valor de una función y el signo de su derivada.

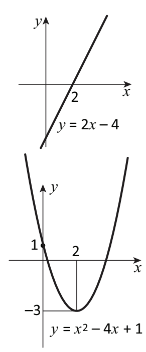
Teorema: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).
$f'(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es creciente en $[a, b]$
$f'(x) < 0$ en $(a, b) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $[a, b]$

Para la demostración se utiliza el Teorema del valor medio que se aprenderá en la Unidad IV.

Ejemplo 2.3. Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Investigue el signo de $f'(x)$ y el cambio de valor de $f(x)$.

Solución: $f'(x) = 2x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Por lo tanto, se tiene que:
$x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$
$2 < x \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.



La siguiente tabla representa el resultado del Ejemplo 2.3.

x	$x < 2$	2	$2 < x$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	− 3	↗

En este libro se le llama a esta tabla: tabla de variación.

↘ significa decreciente.

↗ significa creciente.

40 Unidad III • Lección 2 • Clase 2. Tabla de variación

Ejemplo 2.3. (4 min)

Tabla de Variación (3 min)
El término “Tabla de Variación” se utiliza sólo en este Libro. Generalmente puede significar otra cosa.

Objetivo: Definir e identificar los extremos relativos de una función.

Evaluación: Ejercicio 2.5

Unidad III. Lección 2.

Clase 2

(Continuación)

Clase 3

(Continúa en la siguiente página)

Ejercicio 2.3. Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = 3x^2 - 6x$

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ d) $f(x) = -x^2 + 4$

Ejemplo 2.4. Haga la tabla de variación de $f(x) = x^3 - 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0, \quad x = -1$ y 1

x	$x<-1$	-1	$-1<x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

Los signos $x<-1$, $-1<x<1$ y $1<x$ se pueden omitir.

Ejercicio 2.4. Haga la tabla de variación.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x$ d) $f(x) = -x^3 - 6x^2$

Clase 3. Extremos Relativos

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en el punto x_0 de su dominio. Se le denomina a $f(x_0)$:

máximo relativo si $f(x) \leq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

mínimo relativo si $f(x) \geq f(x_0)$ para valores de x aproximados a x_0

Se llama también: máximo local, mínimo local.

Ambos se llaman extremo relativo (local).

Ejemplo 2.5. Haga la tabla de variación de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$ y encuentre los extremos relativos.

Solución: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$
$= -3(x-3)(x+1) = 0, \quad x = 3$ y -1

x		-1		3	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−5	↗	27	↘

máximo relativo $f(3) = 27$
mínimo relativo $f(-1) = -5$

En general

x		a	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

↑ máximo relativo

x		a	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

↑ mínimo relativo

Ejercicio 2.5. Haga la tabla de variación y encuentre los extremos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2$ b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$

c) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x$ d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

Dése cuenta del cambio de signo de la derivada.

Unidad III • Lección 2 • Clase 3. Extremos relativos | 41

Ejercicio 2.3

(10 min) Solución:

a)

x	$x<3$	3	$3<x$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	−9	↗

b)

x	$x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	−3	↗

c)

x	$x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	1	↘

d)

x	$x<0$	0	$0<x$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	4	↘

Ejemplo 2.4

(5 min)

Ejercicio 2.4

(13 min)

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x$
$= 6x(x+1)$

x		-1		0	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

c) $f'(x) = -3x^2 + 3$
$= -3(x+1)(x-1)$

x		-1		1	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−2	↗	2	↘

d) $f'(x) = -3x^2 - 12x$
$= -3x(x+4)$

x		-4		0	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−32	↗	0	↘

[Hasta aquí Clase 2]

[Desde aquí Clase 3]

Definición de Extremos relativos
(5 min)

Ejemplo 2.5 (7 min)

Para ser extremo relativo, la derivada tiene que cambiar el signo.

Ejercicio 2.5

(33 min) Solución. Veáse en página 56

Unidad III. Lección 2.
Clase 4
Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Dibujar la gráfica de la función de tercer grado.
Evaluación: Ejercicio 2.6

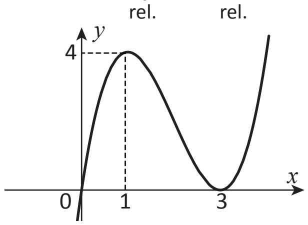
Objetivo: Identificar las funciones que no tienen extremos relativos.
Evaluación: Ejercicio 2.7

Ejemplo 2.6
(10 min)

Ejercicio 2.6
(35 min)

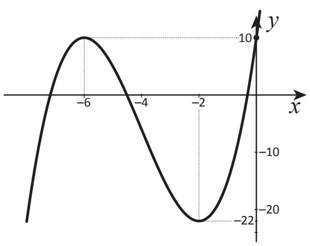
a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$= 3(x-1)(x-3)$

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗
		máx. rel.		mín. rel.	



b) $f'(x) = 3x^2 + 24x + 36$
$= 3(x+2)(x+6)$

x		−6		−2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	10	↘	−22	↗
		máx. rel.		mín. rel.	



Incisos c y d véase solución en la página 56.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

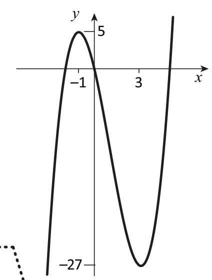
Ejemplo 2.7
(5 min) La gráfica debe tener la tangente horizontal en (1,1).

Clase 4. Gráfica de función de tercer grado (1)

Ejemplo 2.6. Encuentre los extremos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ y haga la gráfica.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
$= 3(x-3)(x+1) = 0$
$x = 3$ y -1

x		−1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	−27	↗
		Máximo relativo		Mínimo relativo	



Ejercicio 2.6. Encuentre los extremos relativos y haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
b) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x + 10$
c) $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$
d) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$

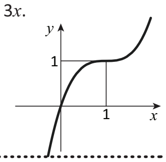
"La gráfica de $f(x)$" quiere decir la gráfica de $y = f(x)$.
Para dibujar la gráfica se necesitan los extremos relativos, si existen.
Para dibujar la gráfica hay que unir los puntos que corresponden a los extremos relativos, el intercepto en y y cuando se pueda los interceptos en x.
De igual forma se deben hacer los trazos siguiendo el comportamiento de $f(x)$ cuando crece o decrece.

Clase 5. Gráfica de función de tercer grado (2)

Ejemplo 2.7. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

x		1	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	1	↗



Esta función no tiene extremos relativos.
En (1, 1) la tangente es horizontal.

Nota: $f'(a) = 0$, no siempre significa que $f(x)$ tiene su extremo relativo en $x = a$. Hay que investigar el signo del valor alrededor de $x = a$.

Hay cuatro casos:

x		a	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

mínimo relativo

x		a	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

máximo relativo

x		a	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(a)$	↗

x		a	
$f'(x)$	−	0	−
$f(x)$	↘	$f(a)$	↘

No son extremos relativos

Nota (10 min)
Hay que distinguir los cuatro casos.

Objetivo: Encontrar los extremos de las funciones de tercer grado utilizando la tabla de variación o la gráfica.
Evaluación: Ejercicio 2.8

Objetivo: Aplicar la manera de encontrar los extremos de funciones de tercer grado al problema.
Evaluación: Ejercicio 2.9

Unidad III. Lección 2.

Clase 5 (Continuación)

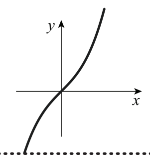
Clase 6

Clase 7

Ejemplo 2.8. Haga la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0$

x	
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗



Esta función no tiene extremos relativos.

Ejercicio 2.7. Haga la gráfica.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ b) $y = -x^3$ c) $y = x^3 + x$ d) $y = -x^3 - 3x$

Clase 6. Extremos de funciones

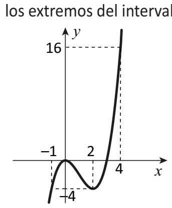
Ejemplo 2.9. Encuentre el máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo [– 1, 4].

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$, $x = 0, 2$

x	– 1		0		2		4
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	– 4	↗	0	↘	– 4	↗	16

máximo 16 ($x = 4$)
mínimo – 4 ($x = -1, 2$)

Comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

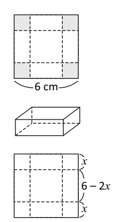


Ejercicio 2.8. Encuentre el máximo y el mínimo en el intervalo dado.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$, [–2, 2] b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$, [0, 4]

Clase 7. Aplicación de los extremos

Ejemplo 2.10. Hay una chapa de zinc de forma cuadrada cuyo lado mide 6 cm. Cortando los cuadrados del mismo tamaño de las cuatro esquinas, se hace un recipiente sin tapa de la forma paralelepípedo rectangular. Para que la capacidad sea la mayor posible, ¿cuánto deben medir los lados de los cuadrados que se cortan?



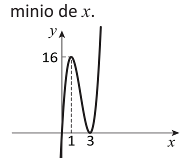
Solución: Sea x cm la medida de los lados de los cuadrados, x debe pertenecer al intervalo (0, 3). Sea y cm³ la capacidad del recipiente elaborado.
La base del recipiente tiene la forma de cuadrado cuyo lado mide: $(6 - 2x)$ cm. La altura mide x cm, por lo tanto: $y = (6 - 2x)^2 x = 4(x^3 - 6x^2 + 9x)$

$$y' = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x-1)(x-3) = 0$$
$$x = 1, 3$$

x	0		1		3
y'		+	0	–	
y		↗	16	↘	

Respuesta 1 cm.

Hay que aclarar el dominio de x.



Ejercicio 2.9. En el Ejemplo 2.10, si la chapa mide 5 cm de ancho y 8 cm de largo, ¿cuánto deben medir los lados de loa cuadrados que se cortan?

Unidad III • Lección 2 • Clase 6. Extremos de funciones • Clase 7. Aplicación de los extremos | 43

Ejemplo 2.8
(5 min)
Hay que distinguir esta gráfica de la del Ejemplo 2.7.

Ejercicio 2.7
(25 min) Solución
Veáse en página 56.

Hasta que se aprenda la concavidad de la gráfica en la Unidad IV, no se puede esperar que los estudiantes hagan las gráficas bien hechas.

[Hasta aquí Clase 5]
[Desde aquí Clase 6]

Ejemplo 2.9
(10 min)

Ejercicio 2.8
(35 min) Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

x	–2		0		2
$f'(x)$	0	–	0	+	
$f(x)$	4	↘	0	↗	20

máx. 20 ($x = 2$) mín. 0 ($x = 0$)

b) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$
$= -3(x-1)(x-3)$

x	0		1		3		4
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$	2	↘	–2	↗	2	↘	–2

máx. 2 ($x = 0, 3$) mín. –2 ($x = 1, 4$)

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Ejemplo 2.10. (20 min)
Hay que saber el dominio de la variable según la situación.

Ejercicio 2.9. (25 min) Solución
Veáse en página 57.

Unidad III. Lección 2.
Clase 8

Clase 9
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Determinar la relación que hay entre el número de solución real de $f(x) = 0$ y el número de interceptos en x de la gráfica $y = f(x)$.

Evaluación: Ejercicio 2.10

Objetivo y Evaluación: Véase la parte de abajo izquierda

Ejemplo 2.11
(20 min)

Ejercicio 2.10
(25 min) Solución

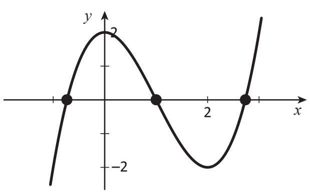
Sea $f(x)$ el lado izquierdo de la ecuación.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x - 2)$

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

3 soluciones reales.



Solución a incisos b, c y d véase en página 57.

[Hasta aquí Clase 8]

[Desde aquí Clase 9]

Objetivo:
Entender la relación entre el número de distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$ y el número de puntos comunes de dos gráficas. $y = f(x)$ y $y = a$.

Evaluación:
Ejercicio 2.11

Clase 8. Aplicación a las ecuaciones (1)

Ejemplo 2.11. Encuentre el número de distintas soluciones reales de la siguiente ecuación:

$x^3 - 3x + 1 = 0$

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Para un número real a,

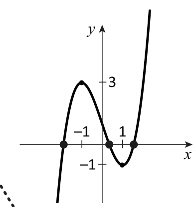
$x = a$ es una solución de $f(x) = 0$

⇔ el punto $(a, 0)$ está en la gráfica de $y = f(x)$, por lo tanto:

(el número de distintas soluciones reales de $f(x) = 0$) =
(el número de distintos puntos que la gráfica de $y = f(x)$ tiene común con el eje x).

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1) = 0, \quad x = 1, -1$

x		−1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗



Como la gráfica tiene tres puntos distintos comunes con el eje x, la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Ejercicio 2.10. Encuentre el número de distintas soluciones reales.

a) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$ c) $x^3 + 9x^2 + 24x + 16 = 0$ d) $2x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 0$

Clase 9. Aplicación a las ecuaciones (2)

Ejemplo 2.12. Sea a un número real. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación

$x^3 - 3x^2 - a = 0 \quad$ ... (1)

Solución: (1) es equivalente a: $x^3 - 3x^2 = a$

Las soluciones reales de (1) corresponde a los puntos comunes entre $y = x^3 - 3x^2$ y $y = a$.

Por lo tanto:

(el número de las distintas soluciones reales de $f(x) - a = 0$) =
(el número de los puntos comunes entre dos gráficas $y = f(x)$ y $y = a$)

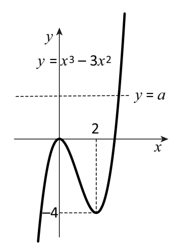
Sea $f(x) = x^3 - 3x^2$

$y = x^3 - 3x^2$

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

Valores de a	Número de distintas soluciones reales
$a < -4$	1
$a = -4$	2
$-4 < a < 0$	3
$a = 0$	2
$0 < a$	1



44 | Unidad III • Lección 2 • Clase 8 y 9. Aplicación a las ecuaciones

Ejemplo 2.12. (20 min)
Se debe transformar la ecuación en la forma $f(x) = a$, donde $f(x)$ no tienen coeficientes desconocidos.

Objetivo: Demostrar la inecuación utilizando la gráfica.

Evaluación: Ejercicio 2.12

Unidad III. Lección 2.
Clase 9 (Continuación)
Clase 10
Ejercicios de la lección

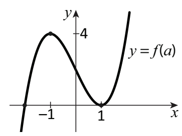
Ejercicio 2.11. Investigue la relación entre el valor de a y el número de distintas soluciones reales de la ecuación:
a) $x^3 + 6x^2 - a = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 15x - a = 0$ c) $x^3 - 9x^2 + 15x + a = 0$ d) $x^3 + 6x^2 + 9x + a = 0$

Clase 10. Aplicación a la demostración de inecuación

Ejemplo 2.13. Demuestre que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.
Solución: Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



Se puede omitir la parte que corresponde a $(-\infty, 1)$.

De la gráfica se sabe que $x^3 - 3x + 2 > 0$ en $(1, \infty)$.

Ejercicio 2.12. Demuestre la inecuación en el intervalo dado.
a) $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$ b) $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$
c) $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$ d) $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la tangente de la gráfica en el punto P. Clase 1
   a) $y = 2x^2 - 4x + 1$, P(2,1) b) $y = -2x^2 + 5x - 2$, P(−1, −9)
   c) $y = 2x^3 - 4x$, P(1, −2) d) $y = -2x^3 - 4x + 5$, P(0, 5)
2. Encuentre la tangente de la gráfica que pasa por el punto Q, fuera de la gráfica.
   a) $y = 2x^2 + x$, Q(1, −5) b) $y = -2x^2 + x$, Q(2, −4)
   c) $y = -x^2 - 2x + 1$, Q(1, 2) d) $y = x^2 + 4x - 2$, Q(3, −6)
3. Haga la gráfica teniendo los extremos relativos en cuenta. Clase 4 y 5
   a) $y = -2x^3 + 3x^2 + 36x$ b) $y = -x^3 - 6x^2 + 15x + 50$
   c) $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ d) $y = -4x^3 + 9x^2 + 12x$
   e) $y = -x^3 - 2x + 1$ f) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$
4. Encuentre el máximo y el mínimo en cada intervalo indicado. Clase 6
   a) $y = x^3 - 3x$, 1) $[-2, 2]$ 2) $[-2, 1]$ 3) $[-3, 0]$
   b) $y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 5$, 1) $[0, 8]$ 2) $(0,7)$ 3) $[-1, 5)$
5. Encuentre el número de distintas soluciones reales. Clase 8
   a) $2x^3 - 9x^2 - 10 = 0$ b) $x^3 - 12x - 16 = 0$
6. Investigue el número de distintas soluciones reales cuando el valor del número real a varía. Clase 9
   $4x^3 - 9x^2 + 6x - 3 + a = 0$
7. Demuestre la inecuación. Clase 10
   $2x^3 + 5 \geq 3x^2 + 36x$ si $x \geq 5$

Unidad III • Lección 3 • Clase 10. Aplicación a la demostración de inecuación • Ejercicios de la lección | 45

Ejercicio 2.11
(25 min) Solución
Veáse en página 57.

[Hasta aquí Clase 9]

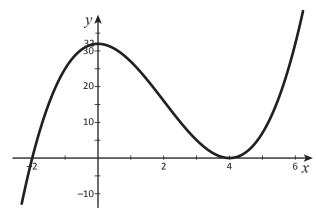
[Desde aquí Clase 10]

Ejemplo 2.13
(15 min)

Ejercicio 2.12
(30 min) Solución

a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$
$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

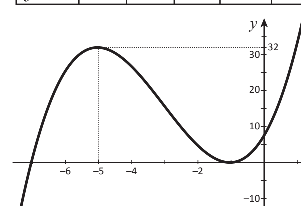
x		0		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗



De la gráfica se sabe que $x^3 - 6x^2 + 32 > 0$ en $(4, \infty)$

b) Sea $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 7$
$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15$
$= 3(x + 1)(x + 5)$

x		-5		-1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗



De la gráfica se sabe que $x^3 + 9x^2 + 15x + 7 > 0$ en $(-1, \infty)$. Luego $x^3 + 9x^2 + 15x > -7$ en $(-1, \infty)$.

Incisos c y d véase solución en la página 57.

Ejercicios de la lección
Soluciones
Veáse en página 58 y 59.

Unidad III. Lección 1. Ejercicios de la lección. Pág. 48. Solución

2. a) $f'(x) = 10x - 4$, $\quad f'(-1) = -14$

b) $g(x) = 6x^2 + 7x - 3$

$g'(x) = 12x + 7$, $\quad g'(-2) = -17$

c) $\dfrac{d}{dt}h(t) = gt$, $\quad \dfrac{d}{dt}h(1) = g$

Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.5. Pág. 51. Solución

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

x		0		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−32	↗
		máx. rel.		mín. rel.	

b) $f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$

x		−3		0	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	27	↘	0	↗
		máx. rel.		mín. rel.	

c) $f'(x) = -6x^2 + 18x + 24$
$= -6(x^2 - 3x - 4)$
$= -6(x-4)(x+1)$

x		−1		4	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−13	↗	112	↘
		mín. rel.		máx. rel.	

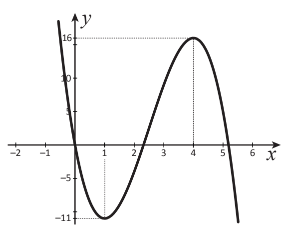
d) $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$
$= -6(x^2 - x - 2)$
$= -6(x-2)(x+1)$

x		−1		2	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−7	↗	20	↘
		mín. rel.		máx. rel.	

Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.6. Pág. 52. Solución incisos c y d

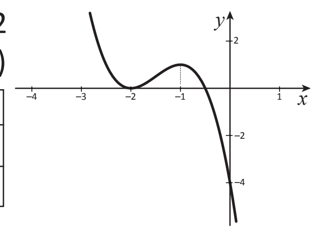
c) $f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$
$= -6(x-1)(x-4)$

x		1		4	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−11	↗	16	↘
		mín. rel.		máx. rel.	



d) $f'(x) = -6x^2 - 18x - 12$
$= -6(x+1)(x+2)$

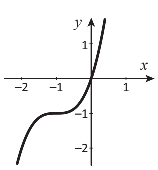
x		−2		−1	
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘
		mín. rel.		máx. rel.	



Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.7. Pág. 53. Solución

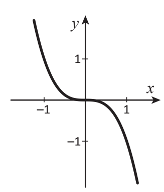
a) $y' = 3x^2 + 6x + 3$
$= 3(x+1)^2$

x		−1	
y'	+	0	+
y	↗	−1	↗



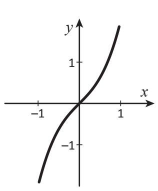
b) $y' = -3x^2$

x		0	
y'	−	0	−
y	↘	0	↘



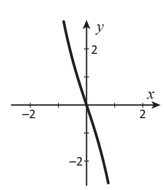
c) $y' = 3x^2 + 1$

x	
y'	+
y	↗



d) $y' = -3x^2 - 3$

x	
y'	−
y	↘



Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.9. Pág. 54. Solución

Sea x cm la medida del lado de los cuadrados. Para hacer un recipiente se debe a que: $x > 0$, $5 - 2x > 0$ y $8 - 2x > 0$, es decir $0 < x < \frac{5}{2}$ ... (1) La capacidad y cm³ es

$y = (5 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$

$y' = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x - 10)(x - 1) = 0$

$$x = \frac{10}{3}, 1$$

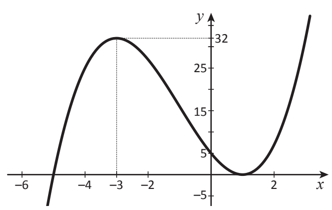
x	0		1		$\frac{5}{2}$
y'		+	0	–	
y	0	$\nearrow$	18	$\searrow$	0

Respuesta: 1 cm

Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.10. Pág. 54. Solución incisos b, c y d

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
$= 3(x + 3)(x - 1)$

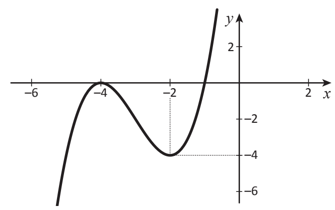
x		–3		1	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$



2 distintas soluciones reales.

c) $f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$
$= 3(x + 2)(x + 4)$

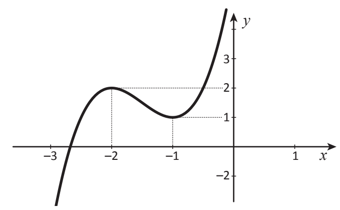
x		–4		–2	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	–4	$\nearrow$



2 distintas soluciones reales.

d) $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12$
$= 6(x + 1)(x + 2)$

x		–2		–1	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$



1 solución reales.

Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.11. Pág. 55. Solución

a) Sea $f(x) = x^3 + 6x^2$
$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x + 4)$

x		–4		0	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$

1 sol. si $a < 0$ ó $32 < a$.
2 sol. si $a = 0$ ó 32.
3 sol. si $0 < a < 32$.

b) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x$
$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x - 5)(x + 1)$

x		–1		5	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	–100	$\nearrow$

1 sol. si $a < -100$ ó $8 < a$.
2 sol. si $a = -100$ ó 8.
3 sol. si $-100 < a < 8$.

c) Sea $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$
$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x - 1)(x - 5)$

x		1		5	
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\searrow$	–7	$\nearrow$	25	$\searrow$

1 sol. si $a < -7$ ó $25 < a$.
2 sol. si $a = -7$ ó 25.
3 sol. si $-7 < a < 25$.

d) Sea $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x$
$f'(x) = -3x^2 - 12x - 9 = -3(x + 1)(x + 3)$

x		–3		–1	
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

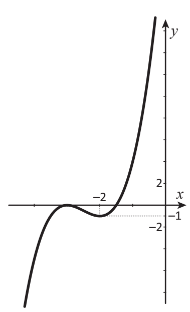
1 sol. Si $a < 0$ ó $4 < a$.
2 sol. Si $a = 0$ ó 4.
3 sol. Si $0 < a < 4$.

Unidad III. Lección 2. Ejercicio 2.12. Pág. 55. Solución incisos c y d

c) Sea $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 27$
$f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 6(x + 2)(x + 3)$

x		–3		–2	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	–1	$\nearrow$

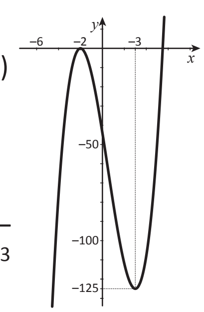
De la gráfica se sabe que $2x^3 + 15x^2 + 36x + 27 < 0$ en $(-\infty, -3)$. Luego $2x^3 + 15x^2 + 36x < -27$ en $(-\infty, -3)$.



d) Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 44$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x - 3)(x + 2)$

x		–2		3	
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	–125	$\nearrow$

De la gráfica se sabe que $2x^3 - 3x^2 - 36x - 44 < 0$ en $(-\infty, -2)$. Luego $2x^3 - 3x^2 - 36x < 44$ en $(-\infty, -2)$.



Unidad III. Lección 2. Ejercicios de la lección. Pág. 55. Soluciones

1. a) $y' = 4x - 4$, $y - 1 = 4(x - 2)$, $y = 4x - 7$

   b) $y' = -4x + 5$, $y + 9 = 9(x + 1)$, $y = 9x$

   c) $y' = 6x^2 - 4$, $y + 2 = 2(x - 1)$, $y = 2x - 4$

   d) $y' = -6x^2 - 4$, $y - 5 = -4x$, $y = -4x + 5$

2. Sea a la coordenada x del punto de tangente.

   a) $y' = 4x + 1$, la pendiente es $4a + 1$.
   La tangente es $y - (2a^2 + a) = (4a + 1)(x - a)$.
   Sustituyendo $(1, -5)$, se tiene que:
   $-5 - (2a^2 + a) = (4a + 1)(1 - a)$
   $2a^2 - 4a - 6 = 0$, $a = 3$, -1
   $y = 13x - 18$, $y = -3x - 2$

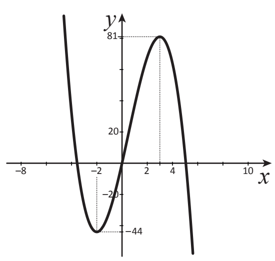
   b) $y' = -4x + 1$, la pendiente es $-4a + 1$.
   La tangente es $y - (-2a^2 + a) = (-4a + 1)(x - a)$.
   Sustituyendo $(2, -4)$, se tiene que:
   $-4 - (-2a^2 + a) = (-4a + 1)(2 - a)$
   $2a^2 - 8a + 6 = 0$, $a = 1, 3$
   $y = -3x + 2$, $y = -11x + 18$

   c) $y' = -2x - 2$, la pendiente es $-2a - 2$.
   La tangente es $y - (-a^2 - 2a + 1) = (-2a - 2)(x - a)$.
   Sustituyendo $(1, 2)$, se tiene que:
   $2 - (-a^2 - 2a + 1) = (-2a - 2)(1 - a)$
   $a^2 - 2a - 3 = 0$, $a = -1, 3$
   $y = 2$, $y = -8x + 10$

   d) $y' = 2x + 4$, la pendiente es $2a + 4$.
   La tangente es $y - (a^2 + 4a - 2) = (2a + 4)(x - a)$.
   Sustituyendo $(3, -6)$, se tiene que:
   $-6 - (a^2 + 4a - 2) = (2a + 4)(3 - a)$
   $a^2 - 6a - 16 = 0$, $a = -2, 8$
   $y = 20x - 66$, $y = -6$

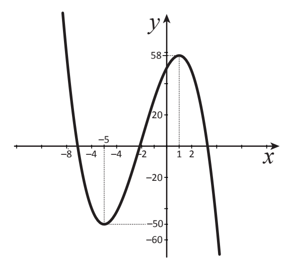
3. a) $y' = -6x^2 + 6x + 36$
   $= -6(x + 2)(x - 3)$

x		-2		3	
y'	$-$	0	+	0	$-$
y	↘	-44	↗	81	↘
		mín. rel.		máx. rel.	



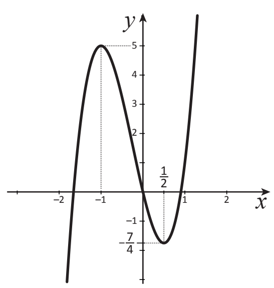
   b) $y' = -3x^2 - 12x + 15$
   $= -3(x + 5)(x - 1)$

x		-5		1	
y'	$-$	0	+	0	$-$
y	↘	-50	↗	58	↘
		mín. rel.		máx. rel.	



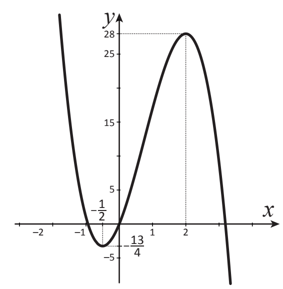
   c) $y' = 12x^2 + 6x - 6$
   $= 6(2x - 1)(x + 1)$

x		-1		$\frac{1}{2}$	
y'	+	0	$-$	0	+
y	↗	5	↘	$-\frac{7}{4}$	↗
		máx. rel.		mín. rel.	



   d) $y' = -12x^2 + 18x + 12$
   $= -6(2x + 1)(x - 2)$

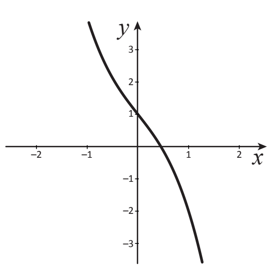
x		$-\frac{1}{2}$		2	
y'	$-$	0	+	0	$-$
y	↘	$-\frac{13}{4}$	↗	28	↘
		mín. rel.		máx. rel.	



   e) $y' = -3x^2 - 2$

x	
y'	$-$
y	↘

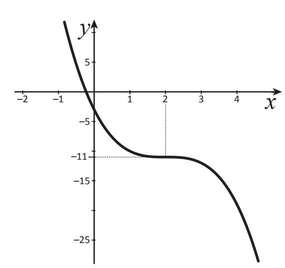
   No existe extremo relativo.



   f) $y' = -3x^2 + 12x - 12$
   $= -3(x - 2)^2$

x		2	
y'	$-$	0	$-$
y	↘	-11	↘

   No existe extremo relativo.



Unidad II. Lección 2. Ejercicios de la lección. Pág. 55. Soluciones

4. a) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

x	-3		-2		-1		0		1		2
y'	+	+	+	+	0	–	–	–	0	+	+
y	-18	↗	-2	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	2

	máx.	mín.
1) $[-2, 2]$	2 ($x = -1, 2$)	-2 ($x = -2, 1$)
2) $[-2, 1]$	2 ($x = -1$)	-2 ($x = -2, 1$)
3) $[-3, 0]$	2 ($x = -1$)	-18 ($x = -3$)

b) $y' = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x - 1)(x - 5)$

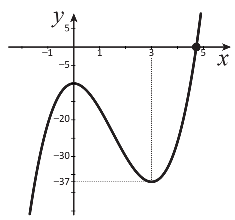
x	-1		0		1		5		7		8
y'	–	–	–	–	0	+	0	–	–	–	–
y	30	↘	5	↘	-2	↗	30	↘	-2	↘	-51

	máx.	mín.
1) $[0, 8]$	30 ($x = 5$)	-51 ($x = 8$)
2) $(0, 7)$	30 ($x = 5$)	-2 ($x = 1$)
3) $[-1, 5)$	30 ($x = -1$)	-2 ($x = 1$)

5. a) Sea $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 10$

$f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x - 3)$

x		0		3	
y'	+	0	–	0	+
y	↗	-10	↘	-37	↗

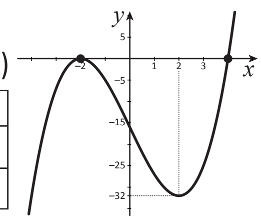


Respuesta: 1

b) Sea $f(x) = x^3 - 12x - 16$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

x		-2		2	
y'	+	0	–	0	+
y	↗	0	↘	-32	↗



Respuesta: 2

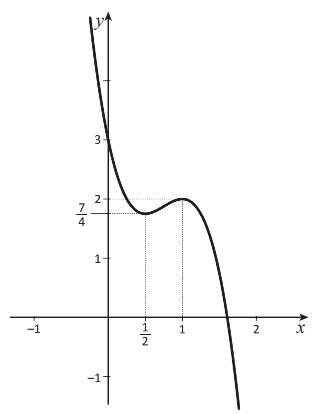
6. Sea $f(x) = -4x^3 + 9x^2 - 6x + 3$

$f'(x) = -12x^2 + 18x - 6 = -6(2x - 1)(x - 1)$

x		$\frac{1}{2}$		1	
y'	–	0	+	0	–
y	↘	$\frac{7}{4}$	↗	2	↘

La ecuación dada equivale a $f(x) = a$.

Nº de sol. real.	Valor de a
1	$a < \frac{7}{4}$ ó $2 < a$
2	$a = \frac{7}{4}$ ó 2
3	$\frac{7}{4} < a < 2$



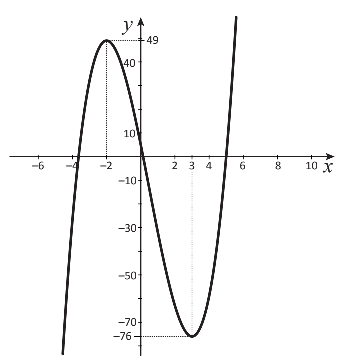
7. Sea $f(x) = (2x^3 + 5) - (3x^2 + 36x)$

$= 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$= 6(x - 3)(x + 2)$

x		-2		3		5
$f'(x)$	+	0	–	0	+	+
$f(x)$	↗	49	↘	-76	↗	0



De la gráfica se sabe que

$f(x) \geq 0$ si $x \geq 5$.

Luego

$2x^2 + 5 \geq 3x^2 + 36x$

si $x \geq 5$.

Unidad III. Lección 3.
Clase 1

Objetivo: Definir función primitiva y la integral indefinida.

Evaluación: Ejercicio 3.1

Función primitiva e Integral indefinida
(20 min)

Algunos autores llaman integral indefinida de $f(x)$ el conjunto de funciones primitivas.
En este libro integral indefinida de $f(x)$ significa alguna de las funciones primitivas de $f(x)$, es decir no es un conjunto sino una función.

Función primitiva de potencia de x
(5 min)

Ejercicio 3.1
(20 min) Solución
C sea constante de integración.

a) x + C

b) $\frac{1}{2}x^2$ (ó $\frac{x^2}{2}$) + C

c) $\frac{1}{3}x^3$ (ó $\frac{x^3}{3}$) + C

d) $\frac{1}{4}x^4$ (ó $\frac{x^4}{4}$) + C

Lección 3. Integrales

Clase 1. Integral indefinida

La Figura 3.1 muestra el conjunto de las funciones cuya derivada es $2x$.

Todas las funciones tienen la forma:
$x^2 + C$; C: constante

(Demostración: sea $F'(x) = 2x$.
Entonces $\{F(x) - 2x\}' = 0$.
De la nota en Clase 1.3, se sabe que $F(x) - x^2 = C$)

$$\left.\begin{matrix} \vdots \\ x^2-2 \\ x^2-1 \\ x^2 \\ x^2+1 \\ x^2+\frac{3}{2} \\ x^2+\pi \\ \vdots \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Diferenciar}} 2x$$

Figura 3.1

A la función $x^2 + C$ se le denomina **función primitiva** de $2x$ y se denota mediante $\int 2x\,dx$, es decir:
$\int 2x\,dx = x^2 + C$.

Generalmente si $F'(x) = f(x)$, se le llama a $F(x)$ función primitiva de $f(x)$.
A una función $f(x)$ corresponde varias funciones y todas tienen la forma:
$F(x) + C$ (C: constante).

Para representar la función primitiva de $f(x)$ en general se utiliza la notación $\int f(x)\,dx$.

En resumen:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Función primitiva de potencia de x

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Demostración: $\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^{(n+1)-1} = x^n$

Ejercicios 3.1. Calcule.

a) $\int dx$ b) $\int x\,dx$ c) $\int x^2\,dx$ d) $\int x^3\,dx$

Se llama también antiderivada.
Encontrar la función primitiva es lo que se dice **integrar.**
A la constante C se le denomina **constante de integración**.

A $\int f(x)\,dx$ se le llama **integral indefinida**.
A $f(x)$ se le denomina integrando.

En a) en lugar de $\int 1dx$ se escribe $\int dx$.

Objetivo: Encontrar funciones primitivas de funciones polinómicas.

Unidad III. Lección 3.
Clase 2

Evaluación: Ejercicio 3.2 y 3.3

Clase 2. Propiedad de la integral indefinida

Propiedad de integral indefinida

$\int 0dx = C$

$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$ $\quad$ k: constante

$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Demostración: Al derivar ambos lados utilizando la propiedad de derivada (Clase 1.3) se obtiene las mismas funciones.

En la igualdad que contiene integral indefinida, se entiende que ambos lados coinciden cuando se toman valores de constante de integral adecuadamente.

No es necesario utilizar diferentes constantes para cada integral indefinida. Basta una.

Ejemplo 3.1. Calcule: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$.

Solución: $\int (x^2 - 3x + 4)dx$

$= \int x^2\ dx - 3\int x\ dx + 4\int dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$ $\qquad$ (C: constante de integración)

Ejercicio 3.2. Calcule.

a) $\int (x^2 - 5x + 3)dx$ $\qquad$ b) $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

c) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)dx$ $\qquad$ d) $\int (-6x^2 + 8x - 5)dx$

Ejemplo 3.2. Calcule: $\int (x + 2)(2x - 1)dx$.

Solución: $\int (x + 2)(2x - 1)dx = \int (2x^2 + 3x - 2)dx$

$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$ $\qquad$ (C: constante de integración)

Primero desarrolle el integrando.

Ejercicio 3.3. Calcule.

a) $\int (x - 3)(2x + 1)dx$ $\qquad$ b) $\int (3x + 1)(3x - 1)dx$

c) $\int (2x + 3)(3x - 1)dx$ $\qquad$ d) $\int (3x - 2)(3x + 4)dx$

Ejemplo 3.3. Calcule: $\int xt\ dt$.

Solución: $\int xt\ dt = x\int t\ dt = x\left(\frac{1}{2}t^2 + C\right)$

$= \frac{1}{2}x\,t^2 + C'$ $\qquad$ (C': Constante de integración)

Nota: Como xC es un constante, es mejor utilizar signo más sencillo: C'.

dt significa integrar con respecto a la variable t. Se considera constante la variable x.

Ejercicio 3.4. Calcule.

a) $\int 3t^2\ dt$ $\qquad$ b) $\int gt\ dt$ $\qquad$ c) $\int 4\pi r^2\ dr$ $\qquad$ d) $\int xy^2 z\ dy$

*** Ejemplo 3.4.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

$F'(x) = 4x - 5$, $\quad F(1) = 2$.

Solución: $F(x) = \int (4x - 5)dx = 2x^2 - 5x + C$

Sustituyendo $x = 1$ en ambos lados, se tiene que: $2 = C - 3$, $C = 5$.

Luego $F(x) = 2x^2 - 5x + 5$ $\quad$ (Respuesta)

*** Ejercicio 3.5.** Encuentre la función $F(x)$ que satisface:

a) $F'(x) = 2x + 1$ $\quad F(0) = 3$ $\qquad$ b) $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $\quad F(1) = -2$

Unidad III • Lección 3 • Clase 2. Propiedad de la integral definida | 47

Propiedad de la integral indefinida. (10 min)

Esta propiedad corresponde a la de derivación.

La nota acerca de la igualdad entre integrales indefinidas es importante.

Ejemplo 3.1 (5 min)

No es necesario desarrollar así:

$\int x^2dx - 3\int xdx + 4\int dx$

$= \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) - 3\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) + 4(x + C_3)$.

Basta usar una constante C.

Ejercicio 3.2 (7 min) Solución:

a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C$

b) $x^3 - 2x^2 - x + C$

c) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x + C$

d) $-2x^3 + 4x^2 - 5x + C$

(C: constante de integración)

Ejemplo 3.2 (5 min)

Ejercicio 3.3 (8 min) Solución:

a) $\int (2x^2 - 5x - 3)dx$
$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$

b) $\int (9x^2 - 1)dx$
$= 3x^3 - x + C$

c) $\int (6x^2 + 7x - 3)dx$
$= 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C$

d) $\int (9x^2 + 6x - 8)dx$
$= 3x^3 + 3x^2 - 8x + C$

(C: constante de integración)

Ejemplo 3.3. (4 min)

Ejercicio 3.4. (6 min) Solución:

a) $t^3 + C$ $\qquad$ b) $\frac{1}{2}gt^2 + C$

c) $\frac{4}{3}\pi r^3 + C$ $\qquad$ d) $\frac{1}{3}xy^3z + C$

(C: constante de integración)

***Ejemplo 3.4**

Se trata de determinar la constante de integración por la condición $F(1) = 2$.

*** Ejercicio 3.5.** Solución

a) $F(x) = x^2 + x + 3$ $\quad$ b) $F(x) = x^3 - x^2 + x - 3$

Unidad III. Lección 3.
Clase 3

Objetivo: Definir la integral definida.

Evaluación: Ejercicio 3.6 y 3.7

Definición de la integral definida
(10 min)
Entre a y b no hay relaciones. Puede ser $b \leq a$.

Ejemplo 3.5
(4 min)

Ejercicio 3.6
(8 min) Solución

a) $[x^2]_1^3 = 8$

b) $[x^4]_0^1 = 1$

c) $[x]_2^5 = 3$

d) $[2x^2]_1^{-2} = 6$

Propiedad de la integral definida I
(10 min)

Ejemplo 3.6
(5 min)
Para facilitar el cálculo, es mejor escribir los coeficientes antes de los corchetes.

Clase 3. Integral definida

Sea $F'(x) = f(x)$. Sean a y b dos números.
Al valor $F(b) - F(a)$ se le denomina **integral definida** de $f(x)$ y se denota mediante $\int_a^b f(x)\,dx$.
Al mismo tiempo se representa la diferencia $F(b) - F(a)$ por $[F(x)]_a^b$.
Si $G(x)$ es otra función primitiva de $f(x)$, entonces existe una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.
Por lo tanto:

$$[G(x)]_a^b = [F(x)+C]_a^b = \{F(b)+C\} - \{F(a)+C\} = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

y este valor no depende de la selección de la función primitiva.
En resumen se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{donde} \quad F'(x) = f(x)$$

Se supone que el dominio de $f(x)$ contiene el intervalo $[a, b]$ o $[b, a]$.

A la constante b se le denomina límite superior y la constate a límite inferior.

Ejemplo 3.5. Calcule: $\int_1^2 3x^2\,dx$.

Solución: $\int_1^2 3x^2\,dx = [x^3]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

Ejercicio 3.6. Calcule.

a) $\int_1^3 2x\,dx$ b) $\int_0^1 4x^3\,dx$ c) $\int_2^5 dx$ d) $\int_1^{-2} 4x\,dx$

El límite superior no necesariamente mayor que el límite inferior.

Propiedades de la integral definida 1

a) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Demostración: Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$,
Entonces $kF(x)$, $F(x) + G(x)$ y $F(x) - G(x)$ son funciones primitivas de $kf(x)$, $f(x) + g(x)$ y $f(x) - g(x)$, respectivamente (Clase 1.3)
La conclusión sale de este hecho y la definición de la integral definida.

a) Por ejemplo
$\int_a^b kf(x)\,dx = [kF(x)]_a^b$
$= kF(b) - kF(a)$
$= k\{F(b) - F(a)\}$
$= k[F(x)]_a^b$
$= k\int_a^b f(x)\,dx$

Aplicando la propiedad se calcula por termino.

Es mejor poner coeficientes fuera de corchetes.

Ejemplo 3.6. Calcule $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx$.

Solución: $\int_1^3 (2x^3 - 4x + 6)\,dx = 2\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x\,dx + 6\int_1^3 dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{4}[x^4]_1^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}[x^2]_1^3 + 6[x]_1^3$

$= \frac{1}{2}(3^4 - 1^4) - 2[3^2 - 1^2] + 6(3 - 1) = 40 - 16 + 12 = 36$

Ejercicio 3.7. Calcule.

a) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$ b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

c) $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x - 2)\,dx$ d) $\int_{-2}^0 (-4x^2 - 3x - 2)\,dx$

48 | Unidad III • Lección 3 • Clase 3. Integral definida

Ejercicio 3.7. (8 min) Solución

a) $[x^3]_1^2 - [x^2]_1^2 + [x]_1^2 = 5$

b) $\frac{1}{3}[x^3]_0^3 + 2[x^2]_0^3 - [x]_0^3 = 24$

c) $\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 - 3[x^2]_{-1}^2 - 2[x]_{-1}^2 = -12$

d) $-\frac{4}{3}[x^3]_{-2}^0 - \frac{3}{2}[x^2]_{-2}^0 - 2[x]_{-2}^0 = -\frac{26}{3}$

Objetivo: Aplicar la propiedad de integral definida acerca de sus límites.

Unidad III. Lección 3.
Clase 4

Evaluación: Ejercicio 3.8, 3.10

Clase 4. Propiedad de integral definida

Propiedades de la integral definida 2

d) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

En f) los integrandos deben ser iguales.
En f) b no está necesariamente entre a y c.

Demostración: Sea que $F'(x) = f(x)$.

d) $\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

e) $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\}$

$= -[F(x)]_a^b = -\int_a^b f(x)\,dx$

f) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c$

$= \{F(b) - F(a)\} + \{F(c) - F(b)\} = F(c) - F(a) = [F(x)]_a^c = \int_a^c f(x)\,dx$

Ejemplo 3.7. Calcule: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

Solución: $\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

$= \int_1^4 (x^2 - 2x - 1)\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 - [x^2]_1^4 - [x]_1^4$

$= \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) - (4^2 - 1^2) - (4 - 1) = 21 - 15 - 3 = 3$

Aplique propiedad f).

Ejercicio 3.8. Calcule.

a) $\int_0^2 (-x^2 + 4x + 2)\,dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x + 2)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx$

Ejercicio 3.9. Demuestre.

a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$

Aplique e); luego f).

Ejercicio 3.10. Calcule.

a) $\int_2^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx - \int_1^4 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

b) $\int_{-1}^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx - \int_{-1}^0 (x^2 + 4x - 1)\,dx$

Unidad III • Lección 3 • Clase 4. Propiedad de integral definida | 49

Propiedad de la integral definida 2
(10 min)

Si no hay tiempo, se puede omitir estos cálculos.

Ejemplo 3.7
(8 min)

Ejercicio 3.8
(9 min) Solución:

a) $\int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)\,dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_0^3 + 2[x^2]_0^3 + 2[x]_0^3$

$= 15$

b) $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx$

$= \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 - [x^2]_{-1}^2 + 2[x]_{-1}^2$

$= 6$

Ejercicio 3.9
(10 min)

a) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ por e)

$= \int_a^c f(x)\,dx$ por f)

b) $\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$ por e)

$= \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

$= \int_c^b f(x)\,dx$ por f)

Ejercicio 3.10. (8 min) Aplicando Ejercicio 3.8

a) $\int_2^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = [x^3]_2^1 - [x^2]_2^1 + [x]_2^1 = -5$

b) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^3 + 2[x^2]_0^3 - [x]_0^3 = 24$

Unidad III. Lección 3.
Clase 5

Objetivo: Establecer la relación entre integral definida y derivación.

Evaluación: Ejercicio 3.11

Relación entre integral definida y derivación.
(10 min)

Ejemplo 3.8
(3 min)

Ejercicio 3.11
(5 min) Solución
a) $x^2 + 3x + 3$
b) $x^2 + x - 3$
c) $s + 3$
d) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (t^2 - t)\,dt$

$= \dfrac{d}{dx}\left\{-\displaystyle\int_x^1 (t^2 - t)\,dt\right\}$
por Clase 4 e)
$= -\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (t^2 - t)\,dt$
por Clase 1.3 b)
$= -(x^2 - x)$
$= -x^2 + x$

Ejemplo 3.9
(10 min)
Se puede omitir el Ejemplo 3.9 y Ejercicio 3.12, si no hay tiempo.

Ejercicio 3.12
(17 min) Solución
a) $f(x) = 2x - 3$
$a^2 - 3a + 2 = 0$
$a = 1, 2$
b) $f(x) = -2x + 2$
$-a^2 + 2a + 3 = 0$
$a = 3, -1$

Clase 5. Integral definida y derivación

Si $F'(x) = f(x)$ entonces $F'(t) = f(t)$.

Por lo tanto, para un número real a,
$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$
es una función de x.

Derivando ambos lados con respecto a x, se tiene que
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \{F(x) - F(a)\}' = F'(x) = f(x).$$

$F'(x)$ es una derivada con respecto a x.
$F'(t)$ es una derivada con respecto a t.

Relación entre integral definida y derivación
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Se le denomina a este resultado Teorema fundamental del cálculo infinitesimal, pero con diferente definición de la integral definida.

Ejemplo 3.8. Calcule: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1)\,dt$.

Solución: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-1}^x (3t^2 - 2t + 1)\,dt = 3x^2 - 2x + 1$

Ejercicio 3.11. Calcule.

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x (t^2 + 3t + 3)\,dt$ b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-2}^x (t^2 + t - 3)\,dt$

c) $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_1^s (x + 3)\,dt$ d) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^1 (t^2 - t)\,dt$

En d) aplique Clase 4 e).

Ejemplo 3.9. Encuentre la función $f(x)$ y el número real a, que satisfacen:
$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 + 3x - 4.$$
Solución: Derivando ambos lados con respecto a x,
se tiene que $f(x) = 2x + 3$.

Sustituyendo $x = a$ en ambos lados, se tiene que:
$0 = a^2 + 3a - 4$, $(a + 4)(a - 1) = 0$, $a = -4, 1$
Respuesta: $f(x) = 2x + 3$, $a = -4, 1$

$\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt = 0$ (Clase 4 d)

Ejercicio 3.12. Encuentre $f(x)$ y a.

a) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 3x + 2$ b) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = -x^2 + 2x + 3$

c) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2 - 3x + 1$ d) $\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt = -2x^2 + x + 6$

c) $f(x) = 4x - 3$
$2a^2 - 3a + 1 = 0$ $a = 1, \dfrac{1}{2}$

d) $f(x) = 4x - 1$
$-2a^2 + a + 6 = 0$ $a = -\dfrac{3}{2}, 2$

Objetivo: Representar área aplicando la integral definida.

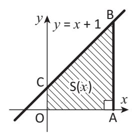
Evaluación: Reproducir la fórmula del área.

Unidad III. Lección 3.
Clase 6

Clase 6. Integral definida y área

Ejemplo 3.10. En la figura, la ecuación de la recta BC es $y = x + 1$. Sea $(x, 0)$ las coordenadas del punto A donde $x > 0$.

a) Exprese AB con x.
b) Sea $S(x)$ área del trapecio OABC. Exprese $S(x)$ con x.
c) Encuentre $S'(x)$.

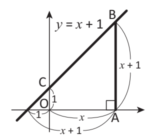


Solución: a) AB = (la coordenada y del punto B) = $x + 1$

b) $S(x) = \frac{1}{2}$ (0C + AB) · 0A = $\frac{1}{2}\{1 + (x + 1)\}x = \frac{1}{2}x^2 + x$

c) $S'(x) = x + 1$

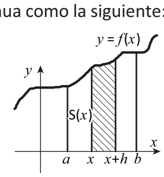
Ejemplo 3.10
(10 min)



En este ejemplo $S'(x)$ = (la ecuación de la gráfica).
Esta relación se verifica con cualquier función continua como la siguiente:

Derivada del área
(25 min)

Sea a y b dos números reales tal que $a < b$.
Sea $f(x)$ una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea S(x) el área de la parte delimitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas paralelas al eje y y que pasan por $(a, 0)$ y $(x, 0)$ donde $a < x < b$.



Sea h un número positivo tal que $x + h < b$.
Sea M_h el máximo y m_h el mínimo de $f(x)$ en $[x, x + h]$. Entonces el área de la parte sombreada, se tiene que:

$$h \cdot m_h \leq S(x + h) - S(x) \leq h \cdot M_h.$$

Como $h > 0$, se tiene que: $m_h \leq \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \leq M_h$.

Como $\lim\limits_{h \to 0^+} M_h = \lim\limits_{h \to 0^+} m_h = f(x)$, se tiene que: $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$.

De la misma manera se verifica $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$.

Luego $S'(x) = f(x)$.

Por lo tanto, se tiene que $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$.

Como $\lim\limits_{x \to a^+} S(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = 0$, se tiene que $C = 0$.

Sea S el área de la parte rodeada por $y = f(x)$, el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$.

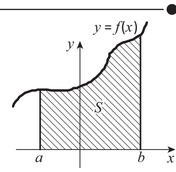
Como $\lim\limits_{x \to b^-} S(x) = S$ y $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)$, se tiene lo siguiente:

La función $\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable, por lo tanto, continua (Clase 1.2).
Luego, $\lim\limits_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Fórmula del área
(10 min)

Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el área S de la parte sombreada es:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Es esencial que la parte sombreada este por encima del eje x.

Unidad III. Lección 3.
Clase 7

Objetivo: Encontrar el área de la figura que está por encima del eje x.
Evaluación: Ejercicio 3.13

Clase 8

Objetivo: Encontrar el área comprendida entre dos gráficas.
Evaluación: Ejercicio 3.14

Ejemplo 3.11
(10min)
Lo importante es que la parte sombreada está por encima del eje x.

Ejercicio 3.13
(35 min) Solución

a) $\int_0^3 (x^2+1)dx$

$= \frac{1}{3}[x^3]_0^3 + [x]_0^3 = 12$

b) $\int_{-1}^2 (-x^2+5)dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^2 + 5[x]_{-1}^2$
$= 12$

c) $\int_0^1 (x^3+2x^2)dx$

$= \frac{1}{4}[x^4]_0^1 + \frac{2}{3}[x^3]_0^1 = \frac{11}{12}$

d) $\int_1^2 (-x^3+2x^2+3x)dx$

$= -\frac{1}{4}[x^4]_1^2 + \frac{2}{3}[x^3]_1^2 + \frac{3}{2}[x^2]_1^2$

$= \frac{65}{12}$

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

Fórmula del área entre dos gráficos (25 min)
El punto es subir las gráficas para poder aplicar la fórmula de la clase 6.

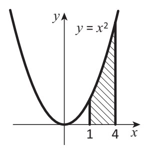
Ejemplo 3.12
(20 min)
Para saber qué gráfica está por encima de la otra, hay que dibujar el esquema.

Clase 7. Cálculo de área

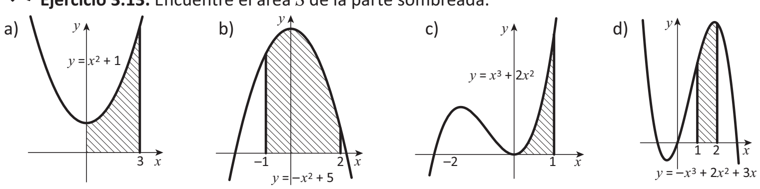
Ejemplo 3.11. Encuentre el área de la parte sombreada.

Solución: Como la parte está por encima del eje x,

$$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^4 = 21$$



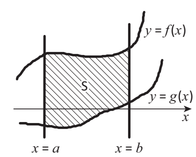
Ejercicio 3.13. Encuentre el área S de la parte sombreada.



Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$.
El área S de la parte delimitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$ es:

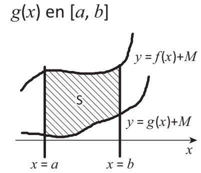
$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx.$$



Es esencial que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$

Demostración: Sea M un número tal que $g(x) + M \geq 0$ en $[a, b]$.
Sea S_1 el área de la parte delimitada por $y = f(x) + M$, el eje x, $x = a$ y $x = b$.
Sea S_2 el área de la parte delimitada por $y = g(x) + M$, el eje x, $x = a$ y $x = b$.
Entonces, se tiene que:

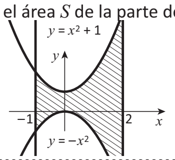
$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b \{f(x)+M\}dx - \int_a^b \{g(x)+M\}dx$$
$$= \int_a^b [\{f(x)+M\} - \{g(x)+M\}]dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



Lo importante es saber qué gráfica está por encima de la otra.

Ejemplo 3.12.
a) Haga la gráfica de las siguientes cuatro líneas: $y = x^2 + 1$, $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 2$
b) Encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas dadas.

Solución: a)



b) Como $-x^2 \leq x^2 + 1$ en $[-1, 2]$,

$S = \int_{-1}^2 \{(x^2+1) - (-x^2)\}dx$
$= \int_{-1}^2 (2x^2+1)dx$
$= \frac{2}{3}[x^3]_{-1}^2 + [x]_{-1}^2 = 6 + 3 = 9$

*** Ejercicio 3.14.** Haga la gráfica de las cuatro líneas y encuentre el área S de la parte delimitada por las líneas.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x - 2$, $x = -2$, $x = 1$ b) $y = -x^2$, $y = -2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$
c) $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 2$ d) $y = x^2 - 4$, $y = -x^2 + 4$, $x = -1$, $x = 1$

52 | Unidad III • Lección 3 • Clase 7. Cálculo de área • Clase 8. Área de la parte comprendida entre dos gráficos

*Ejercicio 3.14
Solucion. Véase la página 70.

Objetivo: Encontrar el área delimitada por dos gráficas.

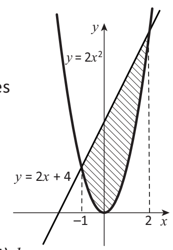
Evaluación: Ejercicio 3.15

Unidad III. Lección 3.
Clase 9

Clase 9. Área de la parte delimitada por dos líneas

Ejemplo 3.13. Encuentre el área S de la parte delimitada por dos líneas $y = 2x^2$ y $y = 2x + 4$.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de ambas líneas son las soluciones de la ecuación
$2x^2 = 2x + 4$;
$2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$
$(x - 2)(x + 1) = 0$, $x = 2, -1$



Como $2x^2 \leq 2x + 4$ en $[-1, 2]$.

$$S = \int_{-1}^{2} \{(2x + 4) - 2x^2\}dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx$$
$$= -\frac{2}{3}[x^3]_{-1}^{2} + [x^2]_{-1}^{2} + 4[x]_{-1}^{2} = -6 + 3 + 12 = 9$$

Primero haga la gráfica.

La parte en cuestión está delimitada por
$y = 2x^2$, $y = 2x + 4$,
$x = -1$ y $x = 2$.
Por lo tanto, se aplica la fórmula de Clase 8.

Ejercicio 3.15. Encuentre el área S de la parte delimitada por las dos líneas.

a) $y = 2x^2 - 4$, $y = -2x$ b) $y = x^2 - 9$, $y = 0$

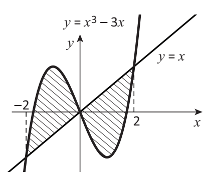
c) $y = -x^2 + 4$, $y = -2x - 4$ d) $y = -x^2$, $y = x - 6$

*** Ejemplo 3.14.** Encuentre el área S de la parte delimitada por $y = x^3 - 3x$ y $y = x$.

Solución: Las coordenadas x de los puntos comunes de las líneas:
$x^3 - 3x = x$, $x^3 - 4x = 0$.
$x(x + 2)(x - 2) = 0$,
$x = -2, 0, 2$

En $[-2, 0]$ $x \leq x^3 - 3x$

En $[0, 2]$ $x^3 - 3x \leq x$



$$S = \int_{-2}^{0} \{(x^3 - 3x) - x\}\, dx + \int_{0}^{2} \{x - (x^3 - 3x)\}dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3)dx$$
$$= \frac{1}{4}[x^4]_{-2}^{0} - 2[x^2]_{-2}^{0} + 2[x^2]_{0}^{2} - \frac{1}{4}[x^4]_{0}^{2}$$
$$= -4 + 8 + 8 - 4 = 8$$

Lo importante es la relación entre las dos gráficas.

*** Ejercicio 3.16.** Encuentre el área S de la parte delimitada.

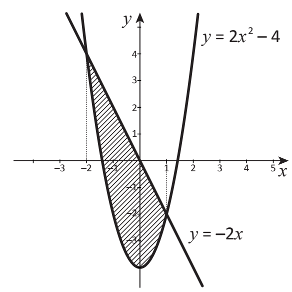
a) $y = x^3 + 6x^2$, $y = 7x$ b) $y = x^3 - 6x^2$, $y = 0$

*** Ejercicio 3.16**
Solucion. Véase la página 71.

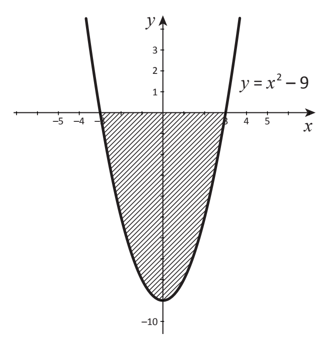
Ejemplo 3.13
(10 min)

Ejercicio 3.15
(35 min) Solución

a) $S = \int_{-2}^{1} \{-2x - (2x^2 - 4)\}dx$
$= \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)dx$
$= -\frac{2}{3}[x^3]_{-2}^{1} - [x^2]_{-2}^{1} + 4[x]_{-2}^{1}$
$= 9$



b) $S = \int_{-3}^{3} \{0 - (x^2 - 9)\}dx$
$= \int_{-3}^{3} (-x^2 + 9)dx$
$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-3}^{3} + 9[x]_{-3}^{3}$
$= 36$



Incisos c y d véase página 70.

*** Ejemplo 3.14**

Unidad III. Lección 3.
Ejercicios de la lección

1. a) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + C$

b) $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + C$

c) $\int(x^3-1)dx = \frac{1}{4}x^4 - x + C$

d) $\int(3t^2 - t - 2)dt$
$= t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + C$

2. $F(x) = \int(x^2 - x + 1)dx$
$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$
$F(-1) = -\frac{11}{6} + C = 2,$
$C = \frac{23}{6}$
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{23}{6}$

3.
a) $\int_{-2}^{1}(x^2 - 2x - 3)dx$
$= \frac{1}{3}[x^3]_{-2}^{1} - [x^2]_{-2}^{1} - 3[x]_{-2}^{1}$
$= -3$

b) $\int_{0}^{-3}(3x^2 + 2x - 1)dx$
$= [x^3]_0^{-3} + [x^2]_0^{-3} - [x]_0^{-3}$
$= -15$

c) $\int_{-1}^{3}(x^2 - 4)dx$
$= \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{3} - 4[x]_{-1}^{3}$
$= -\frac{20}{3}$

Ejercicios de la lección

1. Calcule. Sea C el constante de integración. — Clase 2
   a) $\int (x^2 - 4x + 5)dx$
   b) $\int (-2x^3 + 5x + 4)dx$
   c) $\int (x - 1)(x^2 + x + 1)dx$
   d) $\int (3t + 2)(t - 1)dt$

2. Encuentre la función $F(x)$ que satisface: — Clase 2
   $F'(x) = x^2 - x + 1, \quad F(-1) = 2.$

3. Calcule. — Clase 3
   a) $\int_{-2}^{1}(x-3)(x+1)\,dx$
   b) $\int_{0}^{-3}(3x-1)(x+1)\,dx$
   c) $\int_{-1}^{3}(x-2)(x+2)\,dx$

4. Calcule. — Clase 4
   a) $\int_{-1}^{3}(t-1)(t+2)\,dt - \int_{-1}^{2}(t-1)(t+2)\,dt$
   b) $\int_{3}^{2}(x^2-x)\,dx - \int_{4}^{2}(x^2-x)\,dx$

5. Encuentre $f(x)$ y constante a que satisfacen: — Clase 5
   a) $\int_{a}^{x} f(t)\,dt = 3x^2 + 2x - 1$
   b) $\int_{x}^{a} f(t)\,dt = x^2 - 4x + 4$

   Encuentre el área S delimitada con las líneas.

6. a) $y = -x^2 + 4, \quad x = -1, \quad x = 2, \quad y = 0$ — Clase 7
   b) $y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$

7. a) $y = x^2 - 4x$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$ — Clase 8
   b) $y = x^2 - 4$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$
   c) $y = -x^2 + 2x$, $y = -2x + 3$, $x = 0$

8. a) $y = x^2 + 2x$, $y = -x^2 - x + 2$ — Clase 9
   b) $y = 2x^2$, $y = x^2 - 2x + 3$

Incisos 4, 5, 6 y 7 a), b) véase solución en la página 71.

Inciso 7 c) y 8 véase solución en la página 72.

Problemas de la Unidad A

1. Sea n un número entero no negativo. Demuestre:
   a) $\int_{-a}^{a} x^{2n} dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n} dx$
   b) $\int_{-a}^{a} x^{2n+1} dx = 0$

2. Demuestre que $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$.

3. Haga la gráfica de $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

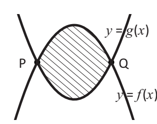
Problemas de la Unidad B

1. Si dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen puntos comunes P(α, $f(\alpha)$) y Q(β, $f(\beta)$), donde $\alpha < \beta$ y si:

   $$f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{en } [\alpha, \beta],$$

   entonces el área S de la parte delimitada por las dos gráficas es:
   $S = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$.

   Demuéstrelo utilizando Problema de la Unidad A2



Con este resultado se calcula el área de la parte delimitada por parábola y la recta o por dos parábolas.

2. La recta $y = ax$ divide en dos partes de la misma área la parte delimitada por

   $$y = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad y = 0.$$

   Encuentre el valor de a.

Aplique Problema de la Unidad B 1.

3. a) Encuentre las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ que satisfacen lo siguiente:

   $$|x^2 - 3x| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) & \text{si } 0 < x < 3 \\ h(x) & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

   b) Calcule $\int_{-2}^{4} |x^2 - 3x| dx$.

4. Encuentre la función $f(x)$ que satisface

   $$f(x) = x + \int_{0}^{2} f(t) dt$$

$\int_{0}^{2} f(t) dt$ es una constante.

Unidad III • Lección 3 • Problemas de la Unidad | 55

Problemas de la Unidad A. Inciso 3 véase solución en la página 72.

Problemas de la Unidad B véase solución en la página 73.

1.

a) $\int_{-a}^{a} x^{2n} dx$

$= \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1}\right]_{-a}^{a}$

$= \frac{1}{2n+1}\{a^{2n+1} - (-a)^{2n+1}\}$

$= \frac{2}{2n+1} \; a^{2n+1}$

$= \frac{2}{2n+1}\left[x^{2n+1}\right]_{0}^{a}$

$= 2\int_{0}^{a} x^{2n} dx$

b) $\int_{-a}^{a} x^{2n+1} dx$

$= \frac{1}{2n+2}\left[x^{2n+2}\right]_{-a}^{a}$

$= \frac{1}{2n+2}\{a^{2n+2} - (-a)^{2n+2}\}$

$= 0$

2. $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$

$= \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\} dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\left[x^2\right]_{\alpha}^{\beta}$

$+ \alpha\beta\left[x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$

$- \frac{(\alpha+\beta)}{2}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)$

$+ \alpha\beta(\beta-\alpha)$

$= \frac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$

$-3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+6\alpha\beta\}$

$= \frac{\beta-\alpha}{6}(-\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2)$

$= -\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

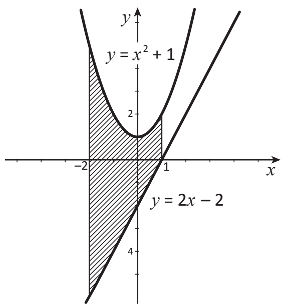
Unidad III. Lección 3. Ejercicio 3.14. Pág. 66. Solución

a) $S = \int_{-2}^{1} \{(x^2 + 1) - (2x - 2)\}dx$

$= \int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 3\}dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{1} - \left[x^2\right]_{-2}^{1} + 3\left[x\right]_{-2}^{1}$

$= 15$

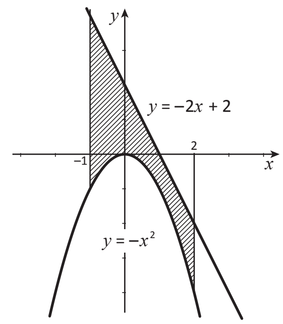


b) $S = \int_{-1}^{2} \{(-2x + 2) - (-x^2)\}dx$

$= \int_{-1}^{2} \{(x^2 - 2x + 2)dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} - \left[x^2\right]_{-1}^{2} + 2\left[x\right]_{-1}^{2}$

$= 6$

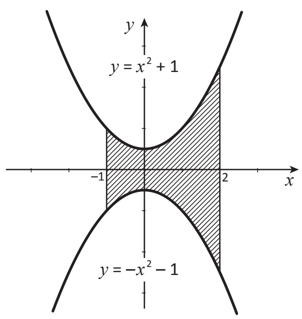


c) $S = \int_{-1}^{2} \{(x^2 + 1) - (-x^2 - 1)\}dx$

$= \int_{-1}^{2} (2x^2 + 2)dx$

$= \frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} + 2\left[x\right]_{-1}^{2}$

$= 12$

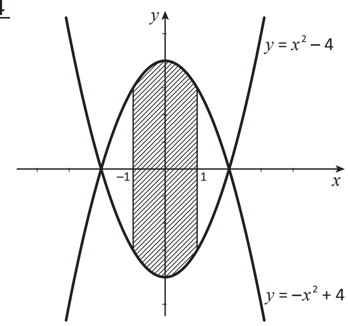


d) $S = \int_{-1}^{1} \{(-x^2 + 4) - (x^2 - 4)\}dx$

$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 8)dx$

$= -\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1} + 8\left[x\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{44}{3}$



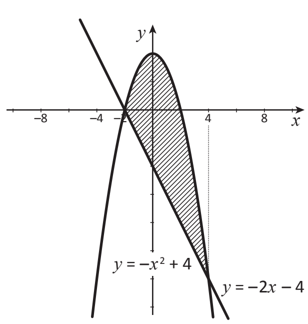
Unidad III. Lección 3. Ejercicio 3.15. Pág. 67. Solución incisos c y d.

c) $S = \int_{-2}^{4} \{(-x^2 + 4) - (-2x - 4)\}dx$

$= \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8\}dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{4} + \left[x^2\right]_{-2}^{4} + 8\left[x\right]_{-2}^{4}$

$= 36$

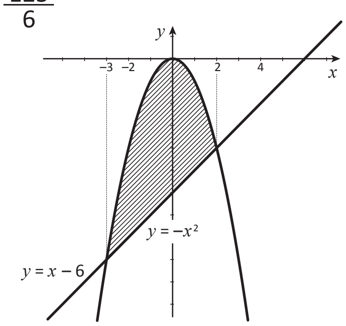


d) $S = \int_{-3}^{2} \{-x^2 - (x - 6)\}dx$

$= \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-3}^{2} - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-3}^{2} + 6\left[x\right]_{-3}^{2}$

$= \frac{125}{6}$

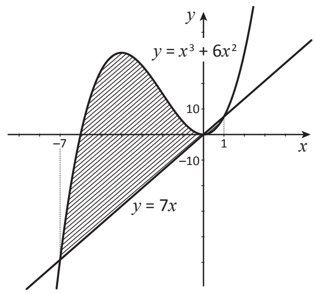


Unidad III. Lección 3. * Ejercicio 3.16. Pág. 67. Solución

a) $S = \int_{-7}^{0} \{(x^3 + 6x^2) - 7x\}dx + \int_{0}^{1} \{(7x - (x^3 + 6x^2)\}dx$

$= \int_{-7}^{0} (x^3 + 6x^2 - 7x\}dx + \int_{0}^{1} (-x^3 - 6x^2 + 7x)dx$

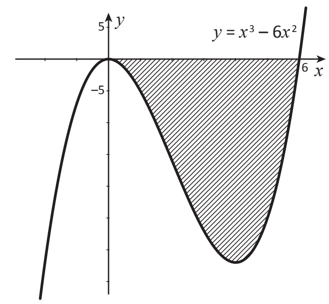
$= \dfrac{517}{2}$



b) $S = \int_{0}^{6} \{(0 - (x^3 - 6x^2)\}dx$

$= \int_{0}^{6} (-x^3 + 6x^2)dx$

$= 108$



Unidad III. Lección 3. Ejercicios de la Lección. Pág. 68. Solución incisos 4 - 7

4. a) $\int_{2}^{3} (t^2 + t - 2)dt = \frac{1}{3}[t^3]_2^3 + \frac{1}{2}[t^2]_2^3 - 2\,[t]_2^3$

$= \dfrac{41}{6}$

b) $\int_{3}^{4} (x^2 - x)dx = \frac{1}{3}[x^3]_3^4 - \frac{1}{2}[x^2]_3^4 = \dfrac{53}{6}$

5. a) $f(x) = 6x + 2$

$3a^2 + 2a - 1 = 0, \quad a = \frac{1}{3}, -1$

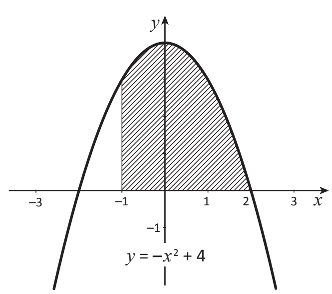
b) $f(x) = -2x + 4$

$a^2 - 4a + 4 = 0, \quad a = 2$

6. a) $S = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{2} + 4\,[x]_{-1}^{2}$

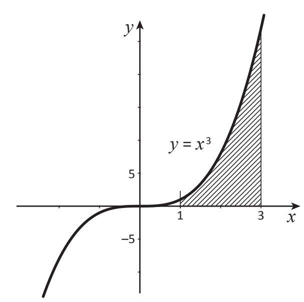
$= 9$



b) $S = \int_{1}^{3} x^3\, dx$

$= \frac{1}{4}[x^4]_1^3$

$= 20$

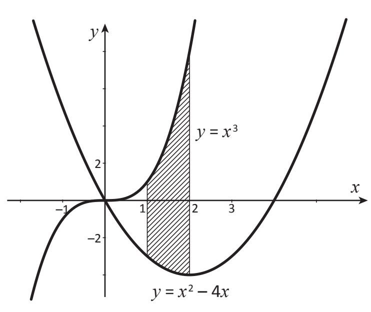


7. a) $S = \int_{1}^{2} \{x^3 - (x^2 - 4x)\}dx$

$= \int_{1}^{2} (x^3 - x^2 + 4x)dx$

$= \frac{1}{4}[x^4]_1^2 - \frac{1}{3}[x^3]_1^2 + 2\,[x^2]_1^2$

$= \dfrac{89}{12}$

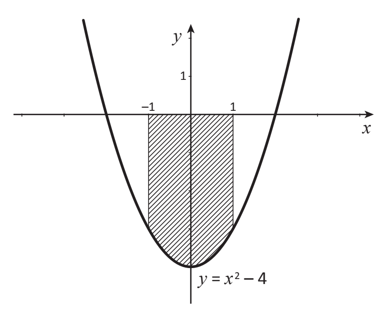


b) $S = \int_{-1}^{1} \{0 - (x^2 - 4)\}dx$

$= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 4)dx$

$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} + 4\,[x]_{-1}^{1}$

$= \dfrac{22}{3}$



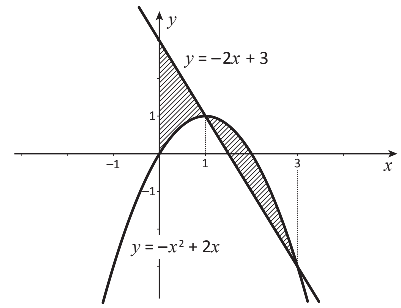
Unidad III. Lección 3. Ejercicios de la lección. Pág. 68. Solución incisos 7c y 8

7. c) $S = \int_0^1 \{(-2x + 3) - (-x^2 + 2x)\}dx + \int_1^3 \{(-x^2 + 2x) - (-2x + 3)\}dx$

$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 - 2\left[x^2\right]_0^1 + 3\left[x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^3 + 2\left[x^2\right]_1^3 - 3\left[x\right]_1^3$

$= \frac{8}{3}$

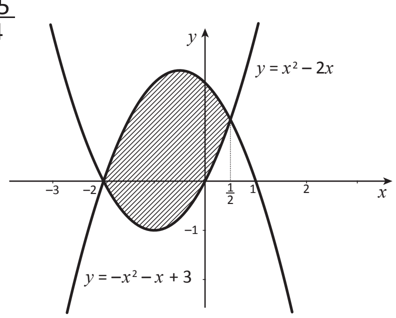


8. a) $S = \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \{(-x^2 - x + 2) - (x^2 + 2x)\}dx$

$= \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-2x^2 - 3x + 2)dx$

$= -\frac{2}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{\frac{1}{2}} + 2\left[x\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{125}{24}$

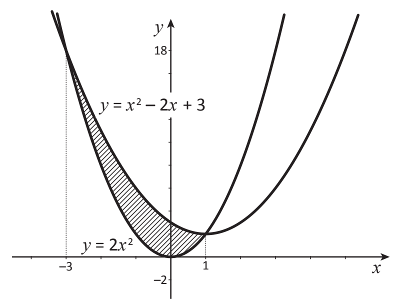


b) $S = \int_{-3}^{1} \{(x^2 - 2x + 3) - 2x^2\}dx$

$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)dx$

$= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-3}^{1} - \left[x^2\right]_{-3}^{1} + 3\left[x\right]_{-3}^{1}$

$= \frac{32}{3}$

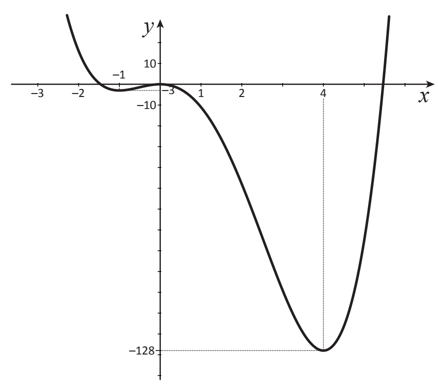


Unidad III. Problemas de la Unidad A. Pág. 69. Solución inciso 3

3. $y' = 4x^3 - 12x^2 - 16x$

$= 4x(x - 4)(x + 1)$

x		−1		0		4	
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	−3	↗	0	↘	−128	↗

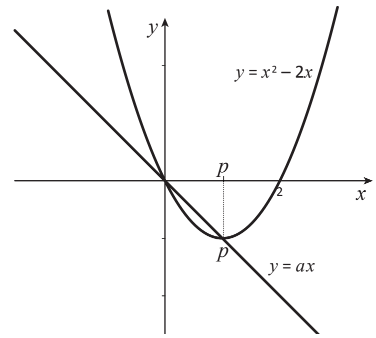


Unidad III. Problemas de la Unidad B. Pág. 69. Solución

1. Como la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene distintas soluciones α y β, por el teorema de factor se tiene que: $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$. Por lo tanto
   $S = \int_\alpha^\beta (ax^2 + bx + c)\,dx = \int_\alpha^\beta a(x - \alpha)(x - \beta)\,dx = -\dfrac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$ Aplicando Problema A2.

2. Sea $P(p, p^2 - 2p)$ el punto de intersección de las dos líneas el otro que el origen.
   El área S de la parte delimitada por $y = x^2 - 2x$ y $y = 0$ es $S = \int_0^2 \{0 - (x^2 - 2x)\}\,dx$

   $$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx$$
   $$= -\frac{-1}{6}(2 - 0)^3 \quad \text{por B1.}$$
   $$= \frac{4}{3}$$



   El área S_1 de la parte delimitada por $y = x^2 - 2x$ y $y = ax$ es
   $S_1 = \int_0^p \{ax - (x^2 - 2x)\}\,dx = \int_0^p \{-x^2 + (a+2)x\}\,dx$

   $$= -\frac{-1}{6}(p - 0)^3 = \frac{p^3}{6}$$

   Como $S_1 = \dfrac{1}{2}$ S, se tiene que $\dfrac{p^3}{6} = \dfrac{2}{3}$, $p^3 = 4$. Como $p > 0$, $p = \sqrt[3]{4}$
   (Respuesta)

3. a) $x^2 - 3x = x(x - 3)$, por lo tanto $x^2 - 3x \geq 0$ si $x \leq 0$ ó $3 \leq x$ y $x^2 - 3x < 0$ si $0 < x < 3$.
   Luego $f(x) = h(x) = x^2 - 3x$,
   $g(x) = -x^2 + 3x$

   b) $\int_{-2}^4 |x^2 - 3x|\,dx = \int_{-2}^0 |x^2 - 3x|\,dx + \int_0^3 |x^2 - 3x|\,dx + \int_3^4 |x^2 - 3x|\,dx$

   $$= \int_{-2}^0 (x^2 - 3x)\,dx + \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)\,dx$$
   $$= \frac{1}{3}[x^3]_{-2}^0 - \frac{3}{2}[x^2]_{-2}^0 - \frac{1}{3}[x^3]_0^3 + \frac{3}{2}[x^2]_0^3 + \frac{1}{3}[x^3]_3^4 - \frac{3}{2}[x^2]_3^4 = 15$$

4. Sea $a = \int_0^2 f(t)\,dt$, que es un constante y $f(x) = x + a$.

   Entonces $a = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (t + a)\,dt = \frac{1}{2}[t^2]_0^2 + a[t]_0^2 = 2a + 2$.

   Luego $a = -2$, $f(x) = x - 2$ (Respuesta)

Derivada de funciones trascendentales

1. Competencias de la Unidad

1. Establecer las definiciones de la función inversa y la compuesta.
2. Establecer las reglas básicas de derivación.
3. Establecer las fórmulas de derivada de funciones trigonométrica, exponencial y logarítmica.
4. Aplicar la derivada para resolver problemas científicos y tecnológicos.
5. Valorar la importancia de la derivada para resolver problemas de la ciencia y la tecnología.

2. Relación y Desarrollo

Matemática I

Unidad II: Introducción a la trigonometría

Matemática II

Unidad I: Funciones algebraicas
- Lección 6: Gráficas de funciones polinomiales
- Lección 7: Expresión algebraicas racionales

Unidad II: Funciones trascendentales
- Lección 1: Funciones exponenciales
- Lección 2: Funciones logarítmicas
- Lección 4: Las gráficas de las funciones triángulos

Matemática IV

Unidad I: Trigonometría

Unidad II: Límites y continuidad

Unidad III: Diferenciación e integral de funciones polinómicas

Matemáticas IV

Unidad IV: Derivadas de funciones trascendentales
- Lección 1: Derivación
- Lección 2: Derivada de las funciones trascendentales
- Lección 3: Aplicación de derivada

3. Plan de Estudio de la Unidad (21 horas)

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
1 Derivación	1	Definición de función inversa y su gráfica	función inversa $f^{-1}(x)$
	2	Definición de función compuesta	función compuesta, composición de dos funciones $g \circ f$
	3	Derivada del producto de funciones	
	4	Derivada del cociente	
	5	Derivada de la función compuesta	
	6	Derivada de la función inversa	
		Ejercicios de la lección	
2 Derivadas de las funciones trascendentales	1	Derivada de funciones trigonométricas.	
	2	Derivada de funciones logarítmicas con base natural.	base de logaritmo natural e
	3	Derivada de funciones logarítmicas con cualquier base, derivada del logaritmo del valor absoluto de la función.	
	4	Derivada de funcione exponenciales.	
	5	Derivada de la potencia de la función.	
	6	Derivada de orden superior.	segunda derivada, $f''(x)$ tercera derivada, $f'''(x)$ n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$
		Ejercicios de la lección	
3 Aplicación de derivada	1	Tangente	
	2	Teorema del valor medio	
	3	Definición de la convexidad de la gráfica, criterio de la convexidad por la segunda derivada	convexa hacia arriba (abajo)
	4	Definición del punto de inflexión	punto de inflexión
	5	Gráfica de funciones con exponenciales	

Lección	Clase/hora	Contenidos	Términos y signos
3 Aplicación de derivada	6	Gráfica de funciones racionales	
	7	Encontrar el número de distintas soluciones reales de ecuación	
	8	Velocidad y aceleración en la recta	velocidad, aceleración
	9	Movimiento circular uniforme	velocidad angular
		Ejercicios de la Lección	
Problemas de la Unidad		Problemas de la Unidad A	
		Problemas de la Unidad B	

Puntos de lección

Lección 1 Derivación

Como en esta etapa no se han enseñado todavía la derivada de funciones trigonométricas, exponenciales ni logarítmicas, no se puede usar muchos ejemplos.

Derivada del cociente: En lugar de utilizar la derivada del cociente, a veces es más rápido calcular utilizando la forma: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\{g(x)\}^{-1}$, y aplicando la fórmula de la derivada del producto.

Derivada de la función compuesta: En algunos libros hay explicación como lo siguiente:
Sean $u = f(x)$, $y = g(u)$, $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$ y $\Delta y = g(u + \Delta u) - g(u)$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = g'(u)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Sin embargo Δu puede tomar el valor 0, por lo tanto, no es una demostración.
Utilizando el siguiente hecho, se puede dar una demostración.
Existe $f'(x) \Leftrightarrow$ existen $j(x)$ y $\rho(x, h)$ tales que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = j(x) + \rho(x, h) \text{ y } \rho(x, h) \to 0 \quad (h \to 0).$$

Derivada de la función inversa Hay explicación como lo siguiente:
Sean $y = f(x)$, $x = g(y)$ y $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$.

$$g'(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Pero aquí no está explicado que se tiene que

$$\Delta x \to 0 \text{ cuando } \Delta y \to 0.$$

Se puede demostrar siguiendo las etapas:
1) Si una función es continua en el intervalo, ésta es creciente o decreciente en ese intervalo
2) La función inversa de una función continua es continua.
3) $\Delta x \to 0$ cuando $\Delta y \to 0$.

Lección 2: Derivadas de las funciones trascendentales

Funciones trigonométricas
En la demostración de la fórmula se utiliza el teorema de adición, pero no es necesario revisarlo.
No es necesario tratar secante, cosecante y cotangente.

Lección 3: Aplicación de derivada

Muchas partes como ser tangentes y variación de funciones son la aplicación de lo aprendido en la Lección 2 de la Unidad III a las funciones trascendentales. Temas nuevos son convexidad de la gráfica y velocidad y aceleración.

Unidad IV. Lección 1.

Clase 1

(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Definir la función inversa y la relación entre las gráficas.

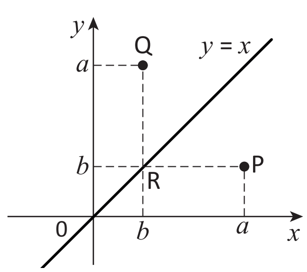
Evaluación: Ejercicio 1.1 y 1.2

[A]
Definición de la función inversa
(10 min)

Ejemplo 1.1
(5 min)

Ejercicio 1.1
(5 min) Solución
a) $[0, \infty)$
b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

[B]
Puntos simétricos con respecto a $y = x$.
(10 min)
Otra explicación intuitiva



PO = QO y PR = QR, por lo tanto la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento PQ.

Relación de las gráficas
(5 min)

Lección 1. Derivación

Clase 1. Función inversa

> **Definición 1.1 Función inversa**
> Sea $y = f(x)$ una función con el dominio D y el rango R. Se supone lo siguiente:
> A cualquier $y \in$ R, existe un único $x \in$ D tal que $f(x) = y$.
> Entonces se le denomina función inversa de f la correspondencia de y a x y se le denota mediante $x = f^{-1}(y)$.

Por la definición existe la relación

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = x^2$. Si se toma el intervalo $[0, \infty)$ como el dominio de $f(x)$, encuentre los siguientes:
a) rango de $f(x)$ b) $f^{-1}(x)$.

Solución: a) $[0, \infty)$ b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Ejercicio 1.1. En el Ejemplo 1.1, si se toma el intervalo $(-\infty, 0]$ como el dominio de $f(x)$, encuentre los siguientes:
a) rango de $f(x)$ b) $f^{-1}(x)$.

> **Puntos simétricos con respecto a la recta $y = x$.**
> Los puntos P(a, b) y Q(b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$

* Demostración: Sea R(c, c) cualquier punto en la recta $y = x$.
RP = $\sqrt{(c-a)^2 + (c-b)^2}$ y RQ = $\sqrt{(c-b)^2 + (c-a)^2}$.
Por lo tanto, RP = RQ, lo que significa que R está en la mediatriz del segmento PQ, es decir, la recta $y = x$ es la mediatriz del segmento PQ.
Luego P y Q son simétricos con respecto a la recta $y = x$.

> **La gráfica de la función inversa.**
> Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a $y = x$

Demostración: sean C y C' las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ respectivamente.
Se tiene que:
$$\text{P}(a, b) \in \text{C} \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow \text{Q}(b, a) \in \text{C}'$$
y que P(a, b) y Q(b, a) son simétricas con respecto a $y = x$.

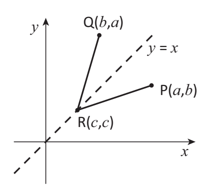
[A] Definición.

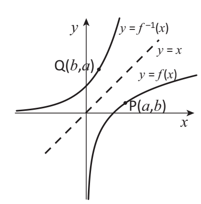
Se aprendió funciones trigonométricas inversas en la Unidad I.

El dominio de f^{-1} es R y el rango es D.

Como por lo general se utiliza la letra x para representar el elemento del dominio, se denota por
$y = f^{-1}(x)$

[B] Gráfica.





Objetivo: Definir la composición de funciones.

Evaluación: Ejercicio 1.3

Unidad IV. Lección 1.

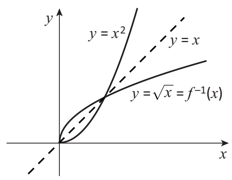
Clase 1

(Continuación)

Clase 2

Ejemplo 1.2. Haga la gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$ del Ejemplo 1.1.

Solución:



Ejercicio 1.2. Haga la gráfica de la función $y = f^{-1}(x)$ del Ejercicio 1,1.

Primero dibuje la gráfica de $y = f(x)$.

Clase 2. Función compuesta

Ejemplo 1.3. Sustituye $u = x + 1$ en $y = u^2$ y exprese y con x.

Solución: $y = u^2 = (x + 1)^2$

Como en el Ejemplo 1.3, se puede componer dos funciones.

Definición 1.2 Función compuesta

Sea $u = f(x)$ una función con el dominio D y el rango S.

Sea $y = g(u)$ una función con el dominio T y el rango R. Se supone que $S \subset T$. Entonces se puede sustituir $u = f(x)$ en $y = g(u)$: $y = g(f(x))$.

A esta función se le denomina la función compuesta de $u = f(x)$ y $y = g(u)$ y se denota mediante $g \circ f$.

$$x \xrightarrow{f} u \xrightarrow{g} y, \quad x \xrightarrow{g \circ f} y$$

También se le llama **composición** de f y g.

En resumen:

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

No confunda $g \circ f$ con $g(x)\ f(x)$, que es el producto de dos funciones.

Ejercicio 1.3. Encuentre la composición $g \circ f$ de $u = f(x)$ y $y = g(u)$.

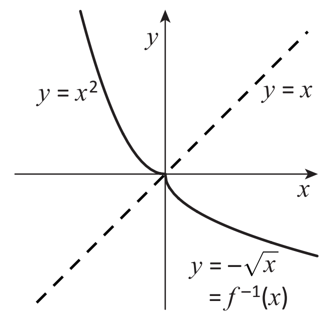
a) $f(x) = x - 2$, $g(u) = 3u$
b) $f(x) = x + 3$, $g(u) = \text{sen}2u$
c) $f(x) = \cos x$, $g(u) = 4u^3 - u^2$
d) $f(x) = 2^x$, $g(u) = 3u^2$

Con la notación de la función compuesta, se tiene que:

$$\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x, \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x}$$

Ejemplo 1.2
(5 min)

Ejercicio 1.2
(5 min) Solución



[Hasta aquí Clase 1]

[Desde aquí Clase 2]

Ejemplo 1.3
(5 min)

Definición de la función compuesta
(10 min)

Ejercicio 1.3
(20 min) Solución

a) $(g \circ f)(x) = 3(x - 2)$

b) $(g \circ f)(x) = \text{sen}2(x + 3)$

c) $(g \circ f)(x) = 4\cos^3 x - \cos^2 x$

d) $(g \circ f)(x) = 3(2^x)^2 = 3 \cdot 2^{2x}$

Relación con la función inversa (10 min)

Unidad IV. Lección 1.
Clase 3

Objetivo: Deducir la fórmula de la derivada del producto.

Evaluación: Ejercicio 1.4

Clase 4
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Deducir la fórmula de la derivada del cociente.

Evaluación: Ejercicio 1.6

Derivada del producto

Demostración (15 min)

Ejemplo 1.4
(8 min)
Sería más rápido derivar después de desarrollar el producto. Este ejemplo y el ejercicio 1.4 son para conocer la fórmula.

Ejercicio 1.4
(22 min) Solución

a) $(2x-5)(4x+1)+(x^2-5x)\cdot 4 = 12x^2-38x-5$

b) $6x(x^2-x)+(3x^2+1)(2x-1) = 12x^3-9x^2+2x-1$

c) $(3x^2-1)(x^2+3)+(x^3-x+1)\cdot 2x = 5x^4+6x^2+2x-3$

d) $(3x^2-2)(x^3+1)+(x^3-2x)\cdot 3x^2 = 6x^5-8x^3+3x^2-2$

*Ejercicio 1.5
Solución

$\{f(x)g(x)h(x)\}'$
$= [f(x)\{g(x)h(x)\}]'$
$= f'(x)\{g(x)h(x)\} + f(x)\{g(x)h(x)\}'$
$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\{g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\}$
$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

[Hasta aquí Clase 3]

Clase 3. Derivada del producto de funciones

Derivada del producto
Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables.
$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Demostración

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Está transformación es a veces eficaz en el cálculo infinitesimal.

Ejemplo 1.4. Calcule: $\{(x^2+3)(3x-1)\}'$
Solución: $\{(x^2+3)(3x-1)\}' = (x^2+3)'(3x-1)+(x^2+3)(3x-1)'$
$= 2x(3x-1)+(x^2+3)\cdot 3 = 9x^2-2x+9$

Por supuesto que también se puede calcular después del desarrollo.

Ejercicio 1.4. Calcule utilizando la fórmula anterior.

a) $\{(x^2-5x)(4x+1)\}'$
b) $\{(3x^2+1)(x^2-x)\}'$
c) $\{(x^3-x+1)(x^2+3)\}'$
d) $\{(x^3-2x)(x^3+1)\}'$

*** Ejercicio 1.5.** Sean f,g y h derivables. Demuestre que
$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.

Considere fgh como el producto de f y gh.

Clase 4. Derivada del cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ derivables, donde $g(x)\neq 0$. Se tiene que:
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}.\qquad \text{En particular}\qquad \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

Demostración:
$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{-1}{g(x+h)g(x)} = g'(x)\cdot\frac{-1}{\{g(x)\}^2} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$
$$= \frac{f'(x)}{g(x)}-f(x)\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

60 | Unidad IV • Lección 1 • Clase 3. Derivada del producto de funciones • Clase 4. Derivada del cociente

---

[Desde aquí Clase 4]

Fórmula de la derivada del cociente
Demostración (15 min)

Objetivo: Entender la fórmula de la derivada de la función compuesta.

Evaluación: Ejercicio 1.7

Unidad IV. Lección 1.

Clase 4

(Continuación)

Clase 5

(Continúa en la siguiente página)

Ejemplo 1.5. Calcule: $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'$.

Solución: $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{(x^2+1)'x-(x^2+1)(x)'}{x^2} = \frac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

Nota: Otra forma es:

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \left(x+\frac{1}{x}\right)' = (x)'+\left(\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2}\ \left(=\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)\,x^{-n-1}$$

Ejercicio 1.6. Calcule la derivada

a) $\frac{3x+1}{x^2}$ b) $\frac{x^2+1}{x+1}$ c) $\frac{x-3}{x^2+1}$ d) $\frac{1}{x^2+x+1}$

Clase 5. Derivada de la función compuesta

Sean $u = f(x)$ y $y = g(x)$ funciones derivables donde el dominio de g contiene el rango de f.
Entonces se tiene lo siguiente:

$$\boxed{g\circ f \text{ es derivable y } \{(g\circ f)(x)\}' = g'(f(x))f'(x)}$$

Otra notación: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

* Explicación: $\{(g\circ f)(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h)-f(x))}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \dots (1)$$

Sean $f(x) = u$ y $f(x+h)-f(x) = l$.

Una funcion derivable es continua (Véase Unidad III Clase 1.2).
Por lo tanto, $\lim_{h\to 0} l = 0$ y

$$(1) = \lim_{l\to 0}\frac{g(u+l)-g(u)}{l}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g'(u)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Lo anterior no es una demostración, porque l puede ser 0, por lo tanto la expresión $\frac{g(u+l)-g(u)}{l}$ puede perder el sentido.

Se omite la demostración rigurosa.

Ejemplo 1.6. Calcule: $\{(2x^2+3)^4\}'$
Solución: Sean $u = f(x) = 2x^2+3$ y $y = g(u) = u^4$.
Se tiene que $(2x^2+3)^4 = (g\circ f)(x)$. Por lo tanto
$\{(2x^2+3)^4\}' = g'(f(x))\,f'(x) = (u^4)'(2x^2+3)'$
$= 4u^3\cdot 4x = 16x(2x^2+3)^3$.

Después de entender la fórmula, basta escribir así: $\{(2x^2+3)^4\}'$
$= 4(2x^2+3)^3\,(2x^2+3)'$
$= 4(2x^2+3)^3\cdot 4x$
$= 16x(2x^2+3)^3$

Ejercicio 1.7. Calcule la derivada:

a) $(3x+4)^5$ b) $(2x^2-x)^4$ c) $(x^2-x+1)^3$ d) $(5x^2-x+1)^6$

Unidad IV • Lección 1 • Clase 5. Derivada de la función compuesta | 61

Ejemplo 1.5
(10 min)

(5 min)
Cuando el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, es más simple derivar después de escribir la fracción en la forma mixta.

Ejercicio 1.6
(15 min) Solución

a) $\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}$
$\left(=-\frac{3x+2}{x^3}\right)$

b) $\left(x-1+\frac{2}{x+1}\right)'$
$=1-\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

c) $\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$
$= \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$

d) $-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

Derivada de la función compuesta (5 min)
* Explicación
Véase "puntos de la Lección"

Ejemplo 1.6
(10 min)

Ejercicio 1.7. (10 min). Solución

a) $5(3x+4)^4\,(3x+4)' = 15\,(3x+4)^4$

b) $4(2x^2-x)^3\,(2x^2-x)' = 4(4x-1)(2x^2-x)^3$

c) $3(x^2-x+1)^2\,(x^2-x+1)' = 3(2x-1)(x^2-x+1)^2$

d) $6(5x^2-x+1)^5\,(5x^2-x+1)' = 6(10x-1)(5x^2-x+1)^5$

Unidad IV. Lección 1.
Clase 5 (Continuación)
Clase 6
Ejercicios de la lección

Objetivo: Explicar la fórmula de la derivada de la función inversa.

Evaluación: Ejercicio 1.8

Ejercicio 1.8
(10 min) Solución

a) $y = f(ax + b)$ es la composición de $u = ax + b$ y $y = f(u)$.
$\frac{d}{dx} f(ax + b)$
$= f'(u)\ (ax + b)'$
$= f'(ax + b) \cdot a$
$= af'(ax + b)$.

b) $y = \{f(x)\}^n$ es la composición de $u = f(x)$ y $y = g(u) = u^n$
$\frac{d}{dx}\ \{f(x)\}^n = g'(u)\ f'(x) = nu^{n-1}\ f'(x) = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$.

Ejercicio 1.9
(10 min) Solución:
$\{(h \circ g \circ f)(x)\}'$
$= \{(h \circ g)(f(x))\}'$
$= h'(g(f(x))\{g(f(x))\}'$
$= h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x)$

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

Fórmula de la derivada de la función inversa
(10 min) *Explicación
La demostración no es difícil. Véase "Puntos de Lección". Como la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es simétrica a la de $y = f(x)$, se entenderán intuitivamente con la figura.

Ejemplo 1.7
(15 min)

Ejercicio 1.8. Demuestre lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} f(ax + b) = af'(ax + b) \quad (a \text{ y } b \text{ son constantes})$$
$$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^n = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x) \quad (n \text{ es un número entero})$$

Son muy útiles estas fórmulas.

Ejercicio 1.9. Demuestre lo siguiente.
Sean $u = f(x)$, $v = g(u)$, $y = h(v)$ derivables.
Si la composición $h \circ g \circ f$ está definida, entonces verifique lo siguiente:

$$\{(h \circ g \circ f)(x)\}' = h'(g(f(x)))\ \ g'(f(x))\ \ f'(x)$$

Considere $(h \circ g)(f(x))$.

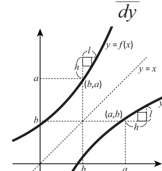
Otra forma:
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Clase 6. Derivada de la función inversa

Sea $f(x)$ una función derivable que tiene su inversa.

Si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, entonces $f^{-1}(x)$ es derivable en x y $\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Otra notación:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$



*** Explicación:** Se omite la demostración de derivabilidad.
Si se conoce la derivabilidad, entonces derivando ambos lados de $f(f^{-1}(x)) = x$ por x, se tiene que $f'(f^{-1}(x))\ \{f^{-1}(x)\}' = 1$.

Luego $\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

$\{f^{-1}(x)\}' = \lim_{h \to 0} \frac{l}{h}$

$f'(f^{-1}(x)) = \lim_{l \to 0} \frac{h}{l}$

Ejemplo 1.7. Sea $g(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$. Encuentre $g'(x)$ en $x > 0$.
Solución: Sea $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$. Entonces $g(x) = f^{-1}(x)$ y $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ cuando $x > 0$.
Por lo tanto, $g'(x) = \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2 \cdot f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

Ejercicio 1.10. Sea $h(x) = \sqrt[3]{x}$ en $(-\infty, \infty)$. Encuentre $h'(x)$ cuando $x \neq 0$.

Véase Ejemplo 1.1

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$. — Clase 1
   a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = \log_2 x$ c) $f(x) = \text{sen}^{-1}\ x$
2. Encuentre la composición $g \circ f$ de $u = f(x)$ y $y = g(u)$. — Clase 2
   a) $f(x) = |x|$, $g(u) = \log_3 u$ b) $f(x) = x + 1$, $g(u) = \frac{1}{u}$
3. Calcule la derivada.
   a) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ b) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ — Clase 3
   c) $\frac{x-1}{x^3+1}$ d) $(x^3 + 1)^5$ e) $\frac{1}{(x^2+1)^3}$ — Clase 4, Clase 5
4. Sea $g(x) = \sqrt{-x}$ $(x \leq 0)$. Encuentre $g'(x)$ en $x < 0$. — Clase 7

62 | Unidad IV • Lección 1 • Clase 6. Derivada de la función inversa • Ejercicios de la lección

---

Ejercicio 1.10. (20 min) Solución
Sea $f(x) = x^3$. Entonces $h(x) = f^{-1}(x)$. Por lo tanto $h'(x) = \{f^{-1}(x)\}'$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \left(= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \quad (x \neq 0)$$

Ejercicios de la lección. Solución en pág. 98.

Objetivo: Encontrar la derivada de seno, coseno y tangente.

Evaluación: Ejercicio 2.1 y 2.2

Unidad IV. Lección 2.
Clase 1

Lección 2. **Derivadas de las funciones trascendentales**

Clase 1. Derivada de funciones trigonométricas

$$\boxed{(\text{sen}\,x)' = \cos x}$$

Demostración: $(\text{sen}\,x)' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}\,x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{\text{sen}\,x\cos h + \cos x\,\text{sen}\,h - \text{sen}\,x\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{\text{sen}\,x(\cos h - 1) + \cos x\,\text{sen}\,h\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\{-\text{sen}\,x\cdot\dfrac{\text{sen}^2 h}{\cos h+1} + \cos x\,\text{sen}\,h\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}(-\text{sen}\,x\cdot\dfrac{\text{sen}\,h}{\cos h+1}\cdot\dfrac{\text{sen}\,h}{h} + \cos x\cdot\dfrac{\text{sen}\,h}{h})$

$= -\text{sen}\,x\cdot 0\cdot 1 + \cos x\cdot 1 = \cos x.$

[A]

$\text{sen}(\alpha+\beta)$
$= \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta$
(Unidad I)

$\cos h - 1$
$= \dfrac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{\cos h+1}$
$= \dfrac{\cos^2 h-1}{\cos h+1} = -\dfrac{\text{sen}^2 h}{\cos h+1}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{sen}h}{h} = 1$
(Unidad II)

Ejemplo 2.1. Calcule: $(\text{sen}\,2x)'$.
Solución: Sean $u = f(x) = 2x$ y $g(u) = \text{sen}\,u$. Se tiene que $\text{sen}2x = (g\circ f)(x)$.
Por lo tanto, $(\text{sen}\,2x)' = g'(f(x))\,f'(x) = (\text{sen}\,u)'\,(2x)' = \cos u\cdot 2$
$= 2\cos 2x$.

Forma más abreviada:
$(\text{sen}2x)' = \cos2x\cdot(2x)'$
$= 2\cos2x$

Ejercicio 2.1. Calcule:
a) $(\text{sen}\,3x)'$ b) $(\text{sen}^3 x)'$ c) $\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x}\right)'$ d) $(\text{sen}^4 3x)'$

$$\boxed{(\cos x)' = -\text{sen}\,x,\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Demostración: Como $\cos x = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, se tiene que:

$(\cos x)' = \left\{\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = -\text{sen}\,x$

$(\tan x)' = \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\text{sen}\,x)'\cos x - \text{sen}\,x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,x$

Ejemplo 2.2. Calcule. a) $(\cos 2x)'$ b) $(\tan^2 x)'$
Solución: a) $(\cos 2x)' = -\text{sen}\,2x\cdot(2x)' = -2\,\text{sen}\,2x$
b) $(\tan^2 x)' = 2\tan x\,(\tan x)' = 2\tan x\,\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos^3 x}$

Ejercicio 2.2. Calcule la derivada.
a) $\cos 3x$ b) $\tan 4x$ c) $\dfrac{1}{\cos x}$ d) $\dfrac{1}{\tan x}$
e) $\cos^2 3x$ f) $\tan^4 3x$

Unidad IV • Lección 2 • Clase 1. Derivada de funciones trigonométricas | 63

La derivada de seno (10 min)

Ejemplo 2.1 (5 min)

Ejercicio 2.1 (10 min) Solución:

a) $\cos3x\cdot(3x)' = 3\cos3x$

b) $3\,\text{sen}^2 x\cdot(\text{sen}x)'$
$= 3\text{sen}^2 x\cos x$

c) $-\dfrac{(\text{sen}\,x)'}{\text{sen}^2 x} = -\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

d) $4\text{sen}^3 3x\cdot\cos3x\cdot(3x)'$
$= 12\text{sen}^3 3x\cos3x$

Derivada de coseno y tangente (8 min)

Ejemplo 2.2 (5 min)

Ejercicio 2.2 (7 min) Solución

a) $-\text{sen}3x\cdot(3x)'$
$= -3\text{sen}3x$

b) $\dfrac{1}{\cos^2 4x}(4x)' = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$

c) $-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\text{sen}x}{\cos^2 x}$

d) $-\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x}$
$= -\dfrac{1}{\tan^2 x\cos^2 x}$
$= -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

e) $2\cos3x(-\text{sen}3x)\,(3x)' = -6\text{sen}3x\cos3x (= -3\text{sen}6x)$

f) $4\tan^3 3x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 3x}(3x)' = \dfrac{12\tan^3 3x}{\cos^2 3x}$ $(= 12(\tan^5 3x + \tan^3 3x))$

Unidad IV. Lección 2.
Clase 2

Objetivo: Encontrar la derivada del logaritmo natural.

Evaluación: Ejercicio 2.3

[A]
Definición de la base del logaritmo natural.
(10 min)

[B]
Derivada del logaritmo natural
(15 min)

Ejemplo 2.3
(5 min)

Ejercicio 2.3
(15 min) Solución

a) $\dfrac{1}{x^3+x}(x^3+x)'$

$= \dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$

b) $3(\ln x)^2 \dfrac{1}{x} = \dfrac{3(\ln x)^2}{x}$

c) $-\dfrac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

d) Como $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$,

$(\ln \dfrac{1}{x})' = (-\ln x)'$

$= -\dfrac{1}{x}$

otra manera:

$\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x}$

Clase 2. Derivada de funciones logarítmicas

La Tabla 1.1 muestra el valor de $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ en algunos valores de h. Como se parece, $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ existe.

Se omite demostración.

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$	h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
1	2		
0.1	2.593742…	– 0. 1	2.867971…
0.01	2.704813…	– 0. 01	2.731999…
0.001	2.716923…	– 0. 001	2,719642…

Tabla 1.1

[A] Base del logaritmo natural.

A este límite se le denomina **base de logaritmo natural** y se denota mediante e.

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$e = 2.718281…$

Como $0 < e \neq 1$, se puede usar e como base de logaritmo. Al $\log_e x$ se le llama **logaritmo natural** y a veces se denota madiante $\ln x$.

[B] Derivada del logaritmo natural:
En la literatura más avanzada, se utiliza la notación $\log x$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Demostración: $(\ln x)' = \lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\frac{h}{x}}\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$ …(1)

$\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$
$(a, b > 0)$

Ahora se pone $\dfrac{h}{x} = t$. Entonces $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$.

Por lo tanto (1) = $\dfrac{1}{x}\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$ … (2)

$t \ln a = \ln a^t \quad (a > 0)$

Como $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ y la función $\ln x$ es continua, (2) = $\dfrac{1}{x}\ln e = \dfrac{1}{x}$.

Ejemplo 2.3. Calcule: $\{\ln(x^2+1)\}'$.
Solución: $\{\ln(x^2+1)\}' = \dfrac{1}{(x^2+1)}\cdot(x^2+1)' = \dfrac{2x}{(x^2+1)}$

Ejercicio 2.3. Calcule la derivada.

a) $\ln(x^3+x)$ b) $(\ln x)^3$ c) $\dfrac{1}{\ln x}$ d) $\ln \dfrac{1}{x}$

Objetivo: **[A]** Resolver la derivación del logaritmo con cualquier base.
[B] Encontrar la derivada del logaritmo del valor absoluto.

Unidad IV. Lección 2.
Clase 3

Evaluación: [A] Ejercicio 2.4, [B] Ejercicio 2.5

Clase 3. Derivada de funciones logarítmicas 2

Ejemplo 2.4. a) Exprese $\log_2 x$ con $\ln x$.
b) Calcule: $(\log_2 x)'$.

Solución: a) $\log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

b) $(\log_2 x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln 2}$

En general se tiene que

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

Demostración: $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Ejercicio 2.4. Calcule la derivada.
a) $\log_3 x$ b) $\log_5(x^2+1)$ c) $(\log_{\frac{1}{2}} x)^3$ d) $(\log_{\frac{1}{3}}(x^4+1))^2$

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{donde } x \neq 0}$$

Demostración: $|x| = \begin{cases} x & \text{cuando } x > 0 \\ -x & \text{cuando } x < 0.\end{cases}$

Caso 1: $x > 0$. Entonces la fórmula es idéntica a la de la Clase 2.

Caso 2: $x < 0$. $(\ln|x|)' = \{\ln(-x)\}' = \dfrac{1}{-x}(-x)'$
$= \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$

Ejemplo 2.5. Calcule; $(\ln|x-1|)'$.
Solución: $(\ln|x-1|)' = \dfrac{1}{x-1}\cdot(x-1)' = \dfrac{1}{x-1}$

Ejercicio 2.5. Calcule.
a) $\ln|x+3|$ b) $\ln|3x-1|$ c) $\ln|\operatorname{sen} x|$ d) $\ln|\tan x|$

Nota: De la misma manera se tiene en general lo siguiente:

Si $f(x)$ es derivable, entonces $\ln|f(x)|$ lo es también y
$(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

[A]
Utilice la fórmula del cambio de base.

Se pone ln2 después de x para no confundir con $\ln(2x)$.

Esta fórmula no es para memorizar.

Cuando se trata de estas funciones, se entiende que x no toma los valores que hacen el argumento 0 o negativo.

[B]

Unidad IV • Lección 2 • Clase 3. Derivada de funciones logarítmicas 2 | 65

[A]

Ejemplo 2.4
(8 min)

Fórmula (5 min)

Ejercicio 2.4
(10 min) Solución

a) $\dfrac{1}{x\ln 3}$

b) $\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 5}$

c) $3(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 \dfrac{1}{x\ln\frac{1}{2}}$
$= -\dfrac{3(\log_{\frac{1}{2}} x)^2}{x\ln 2}$
$\left(= -\dfrac{3(\log_2 x)^2}{x\ln 2}\right)$

d) $2\log_{\frac{1}{3}}(x^4+1)\cdot\dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln\frac{1}{3}}$
$= -\dfrac{8x^3\log_{\frac{1}{3}}(x^4+1)}{(x^4+1)\ln 3}$
$\left(= -\dfrac{8x^3\log_3(x^4+1)}{(x^4+1)\ln 3}\right)$

[B]

Fórmula (8 min)

Ejemplo 2.5
(5 min)

Ejercicio 2.5. (9 min) Solución

a) $\dfrac{1}{x+3}$ b) $\dfrac{3}{3x-1}$ c) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ d) $\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}$ $\left(= \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}\right)$

Unidad IV. Lección 2.
Clase 4

Objetivo: Explicar la fórmula de derivada de la función exponencial.

Evaluación: Ejercicio 2.6, 2.7

Fórmula (10 min)

Ejemplo 2.6
(4 min)

Ejercicio 2.6
(7 min) Solución:

a) $e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$

b) $e^{-4x}(-4x)' = -4e^{-4x}$

c) $e^{x^2-x}(x^2-x)'$
$= (2x-1)e^{x^2-x}$

d) $e^{\cos x}(\cos x)'$
$= -\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}$

Nota (6 min)

Ejemplo 2.7
(5 min)

Nota (3 min)

Ejercicio 2.7
(10 min) Solución

a) $2^x \ln 2$

b) $5^x \ln 5$

c) $(e^{x^2 \ln 3})'$
$= e^{x^2 \ln 3} \cdot 2x \ln 3$
$= x3^{x^2} \cdot 2 \ln 3$

d) $(e^{\operatorname{sen} x \ln 7})'$
$= e^{\operatorname{sen} x \ln 7} \cdot \cos x \ln 7$
$= \cos x\, 7^{\operatorname{sen} x} \ln 7$

Clase 4. Derivada de funciones exponenciales

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Demostración: Sea $f(x) = \ln x$. Entonces $e^x = f^{-1}(x)$.
Como $f(x)$ es derivable, $f^{-1}(x)$ lo es también y se tiene que:

$$(e^x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(x)}} = e^x$$

Ejemplo 2.6. Calcule: $(e^{3x})'$.

Solución: $(e^{3x})' = e^{3x}(3x)' = 3e^{3x}$

Ejercicio 2.6. Calcule la derivada.

a) e^{2x} b) e^{-4x} c) e^{x^2-x} d) $e^{\cos x}$

Nota: De la misma manera se tiene lo siguiente:

Si $f(x)$ es derivable, entonces $e^{f(x)}$ lo es y
$(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$.

Ejemplo 2.7. Calcule: $(3^x)'$.

Solución: Como $3 = e^{\ln 3}$ y $3^x = e^{x \ln 3}$, se tiene que:

$$(3^x)' = (e^{x\ln 3})' = e^{x \ln 3} \cdot (x \ln 3)'$$
$$= 3^x \ln 3.$$

Nota: De la misma manera se tiene que:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a \qquad (0 < a \neq 1)}$$

Ejercicio 2.7. Calcule la derivada.

a) 2^x b) 5^x c) 3^{x^2} d) $7^{\operatorname{sen} x}$

Objetivo: Aplicar y explicar la fórmula de derivada de potencia de x.

Unidad IV. Lección 2.
Clase 5

Evaluación: Ejercicio 2.8

Clase 5. Aplicación de la derivada de funciones exponenciales

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ donde $x > 0$, α es un número real.

Demostración: Como $x = e^{\ln x}$ y $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, se tiene que:

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Es la generalización de la fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$ donde $n \geq 0$ es entero.

Ejemplo 2.8. Calcule: $(x^{\sqrt{2}})'$, $(x > 0)$.

Solución: $(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

Ejercicio 2.8. Calcule la derivada, $(x > 0)$.

a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $x^{-\frac{3}{4}}$ c) $x^{-\sqrt{2}}$ d) $(x^2+1)^{\sqrt{5}}$

Ejemplo 2.9. Encuentre la derivada aplicando la fórmula anterior en lugar de la derivada del cociente en:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3}$$

Solución: $\left\{\frac{1}{(x^2+1)^3}\right\}' = \{(x^2+1)^{-3}\}' = -3(x^2+1)^{-4}(x^2+1)'$

$= -6x(x^2+1)^{-4} \quad \left(= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}\right)$.

Compare:

$$-\frac{\{(x^2+1)^3\}'}{\{(x^2+1)^3\}^2}$$
$$= -\frac{3(x^2+1)^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^6}$$
$$= -\frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

Ejercicio 2.9. Encuentre la derivada.

a) $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ b) $\frac{1}{x^{10}}$ c) $\frac{1}{\text{sen}^2 x}$

*** Ejemplo 2.10.** Calcule: $(x^{\text{sen}\,x})'$ donde $x > 0$.

Solución: Si $x > 0$, entoces $x = e^{\ln x}$ y

$x^{\text{sen}\,x} = e^{\ln x \cdot \text{sen}\,x}$. Por lo tanto

$(x^{\text{sen}\,x})' = (e^{\ln x \cdot \text{sen}\,x})' = e^{\ln x \cdot \text{sen}\,x}(\ln x \cdot \text{sen}\,x)'$

$= x^{\text{sen}\,x}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x} + \ln x \cos x\right)$

*** Ejercicio 2.10.** Calcule la derivada.

a) $x^{\cos x}$ $(x > 0)$ b) $(x^2+1)^{\tan x}$ c) x^x $(x > 0)$ d) $x^{\ln x}$ $(x > 0)$

Unidad IV • Lección 2 • Clase 5. Aplicación de la derivada de funciones exponenciales | 67

***Ejercicio 2.10.** Solución

a) $(x^{\cos x})' = (e^{\ln x \cdot \cos x})' = e^{\ln x \cdot \cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \text{sen}\,x\right) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \text{sen}\,x\right)$

b) $\{(x^2+1)^{\tan x}\}' = (e^{\ln(x^2+1)\cdot \tan x})' = (x^2+1)^{\tan x}\left(\frac{2x\tan x}{x^2+1} + \frac{\ln(x^2+1)}{\cos^2 x}\right)$

c) $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(\ln x + 1)$ d) $(x^{\ln x})' = (e^{(\ln x)^2})' = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x} = 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$

Fórmula (15 min)

La condición $x > 0$ es esencial para definir x^{α} únicamente y verificarse la ley de exponentes.

Ejemplo 2.8
(5 min)

Ejercicio 2.8
(10 min) Solución

a) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ b) $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

c) $-\sqrt{2x}^{\,-\sqrt{2}-1}$

d) $\sqrt{5}(x^2+1)^{\sqrt{5}-1}(x^2+1)'$

$= 2\sqrt{5}x(x^2+1)^{\sqrt{5}-1}$

Ejemplo 2.9
(5 min)

Con esta manera no hay necesidad de simplificar.

Ejercicio 2.9
(10 min)

a) $\{(x^2+x+1)^{-2}\}'$

$= -2(x^2+x+1)^{-3}(x^2+x+1)'$

$= -2(2x+1)(x^2+x+1)^{-3}$

b) $(x^{-10})' = -10x^{-11}$

c) $(\text{sen}^{-2}x)'$

$= -2\text{sen}^{-3}x(\text{sen}\,x)'$

$= -2\text{sen}^{-3}x\cos x$

***Ejemplo 2.10**

Unidad IV. Lección 2.
Clase 6

Objetivo: Definir derivadas de orden superior.

Evaluación: Ejercicio 2.11, 2.12

Ejercicios de la lección

Definición de la segunda y la tercera derivada (6 min)

Ejemplo 2.11
(5 min)

Ejercicio 2.11
(10 min) Solución
a) $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x,$
$f'''(x) = 6$
b) $f'(x) = 2x, f''(x) = 2,$
$f'''(x) = 0$
c) $f'(x) = f''(x)$
$= f'''(x) = e^x$
d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}, f''(x) = -\dfrac{1}{x^2},$
$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

Definición de n-ésima derivada (6 min)

Por lo general a partir de la cuarta derivada se utiliza la notación $f^{(n)}(x)$.

Ejemplo 2.12
(5 min)

Ejercicio 2.12
(13 min) Solución
a) $f'(x) = -\text{sen } x,$
$f''(x) = -\cos x$
$f'''(x) = \text{sen } x,$
$f^{(4)}(x) = \cos x$

b) $f'(x) = (1 + x)e^x,$
$f''(x) = (2 + x)e^x$
$f'''(x) = (3 + x)e^x,$
$f^{(4)}(x) = (4 + x)e^x$
$f^{(5)}(x) = (5 + x)e^x$

c) $f'(x) = e^x(\text{sen } x + \cos x)$
$f''(x) = 2e^x \cos x$
$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \text{sen } x)$
$f^{(4)}(x) = -4e^x \text{ sen } x$

Ejercicio de la Lección.
Soluciones en pág. 98

Clase 6. Derivadas de orden superior

Sea $f(x)$ una función derivable. Si $f'(x)$ es derivable, su derivada $(f'(x))'$ se le denomina la **segunda derivada** de $f(x)$ y se denota mediante $f''(x)$.

Es decir $f''(x) = (f'(x))'$. De igual manera se define la **tercera derivada** $f'''(x)$ y así sucesivamente.

Otras notaciones:
$\dfrac{d^2}{dx^2} f(x)$. Si $y = f(x)$,
$y'', \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Ejemplo 2.11. Sea $f(x) = x^4$. Encuentre $f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$.
Solución: $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$; $f''(x) = (4x^3)' = 12x^2$;
$f'''(x) = (12x^2)' = 24x$

Ejercicio 2.11. Encuentre $f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$
a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = e^x$ d) $f(x) = \ln x$

Generalmente a la función obtenida después de derivar n veces la función $f(x)$, se le denomina ***n*-ésima** derivada de $f(x)$ y se denota mediante $f^{(n)}(x)$.

$f^{(1)}(x) = f'(x)$
$f^{(2)}(x) = f''(x)$
$f^{(3)}(x) = f'''(x)$

Otras notaciones: $\dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$. Si $y = f(x)$, entonces $y^{(n)}$ y $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ representan lo mismo.

Ejemplo 2.12. Sea $f(x) = \text{sen } x$. Encuentre $f^{(4)}(x)$.
Solución: $f'(x) = (\text{sen } x)' = \cos x$, $f''(x) = (\cos x)' = -\text{sen } x$,
$f'''(x) = (-\text{sen } x)' = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = (-\cos x)' = \text{sen } x$ (Respuesta).

Ejercicio 2.12. Encuentre la derivada del orden superior que se pide.
a) $f(x) = \cos x$, $f^{(4)}(x)$ b) $f(x) = xe^x$, $f^{(5)}(x)$
c) $f(x) = e^x \text{ sen } x$, $f^{(4)}(x)$

Ejercicios de la lección

1. Calcule la derivada.

a) $\cos^{-2} x$	b) $\text{sen } x \cos 2x$	c) $\text{sen}(\cos x)$	Clase 1
d) $\ln(\text{sen } x)$	e) $\cos(\ln x)$	f) $\ln\left\lvert \dfrac{x}{x^2+1} \right\rvert$	Clase 2, Clase 3
g) $e^{\text{sen}^2 x}$	h) $3^{\ln x}$	i) $(\text{sen } x)^{\sqrt{3}}$	Clase 4, Clase 5
j) $\text{sen } x \cdot \ln x$			

*2. Encuentre la derivada de orden superior indicada. Clase 6
$f(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)$, $f^{(n)}(x)$
(n es un número natural)

68 | Unidad IV • Lección 2 • Clase 6. Derivadas de orden superior | Ejercicios de la lección

---

Objetivo: Encontrar la tangente de una función.

Evaluación: Ejercicio 3.1 a)

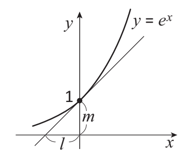
Unidad IV. Lección 3.
Clase 1

Lección 3. Aplicación de derivada

Clase 1. Tangente

Ejemplo 3.1. Encuentre la tangente a la gráfica de $y = e^x$ en el punto (0, 1).

Solución: Sea $f(x) = e^x$. Entonces
$f'(x) = e^x$ y $f'(0) = e^0 = 1$ (pendiente de la tangente).
Le ecuación de la tangente es:
$y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, $y = x + 1$ (Respuesta)



La recta cuya pendiente es m y que pasa por (a, b):
$y - b = m(x - a)$
(Mat. I Unidad IV).

Ejercicio 3.1. Encuentre la tangente en el punto indicado.

a) $y = \ln x$, (1, 0) b) $y = \operatorname{sen} x$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

c) $y = \tan 2x$, $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ d) $y = \frac{1}{x+1}$, (0,1)

*** Ejemplo 3.2.** Encuentre la tangente a la gráfica de $y = e^x$ que pasa por el origen.

Solución: Sea (a, e^a) el punto de tangencia.
Como $y' = e^x$, la pendiente de la tangente es e^a.
Como la pendiente pasa por el punto (a, e^a), la ecuación es
$y - e^a = e^a (x - a)$,
Esta recta para por el origen (0, 0).
Luego $0 - e^a = e^a (0 - a)$, $(a - 1)\, e^a = 0$,
Como $e^a > 0$, $a = 1$. La tangente es:
$y - e = e(x - 1)$, $y = ex$ (Respuesta).

Véase Ejemplo 2.2 (Unidad III)

*** Ejercicio 3.2.** Encuentre la tangente que pasa por el punto indicado.

a) $y = e^x$, (–1, 0) b) $y = \frac{1}{x}$, (3, –1)

*** Ejemplo 3.3.** Encuentre la tangente a la gráfica $y = \ln x$ cuya pendiente es 2.

Solución: La pendiente es $y' = \frac{1}{x} = 2$, por lo tanto, el punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$.

Luego la tangente es: $y - (-\ln 2) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $y = 2x - 1 - \ln 2$ (Respuesta)

*** Ejercicio 3.3.** Encuentre la tangente que tiene la pendiente indicada.

a) $y = \frac{1}{x-1}$, pendiente – 1 b) $y = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, pendiente 4.

Unidad IV • Lección 3 • Clase 1. Tangente | 69

La tangente: $y - 1 = -1\,(x - 0)$, $y = -x + 1$
(Respuesta)

***Ejemplo 3.2**

***Ejercicio 3.2.** Solución en pág. 99.

***Ejemplo 3.3**

***Ejercicio 3.3.**
Solución en pág. 99

La definición de la tangente y los problemas de encontrar la tangente se trataron en la Unidad III. El único aspecto nuevo es que las funciones son trascendentales.

Ejemplo 3.1
(15 min)

Ejercicio 3.1
(30 min) Solución:

a) Sea $f(x) = \ln x$. $f'(x) = \frac{1}{x}$
La pendiente: $f'(1) = 1$
La tangente: $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, $y = x - 1$
(Respuesta)

b) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$.
$f'(x) = \cos x$
La pendiente:
$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
La tangente:
$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{12} + \frac{1}{2}$$
(Respuesta)

c) Sea $f(x) = \tan 2x$.
$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$$
La pendiente: $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$
La tangente:
$$y - 1 = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$y = 4x - \frac{\pi}{2} + 1$$
(Respuesta)

d) Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$
La pendiente: $f'(0) = -1$

Unidad IV. Lección 3.
Clase 2

Clase 3
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Aplicar el teorema del valor medio a la variación de función

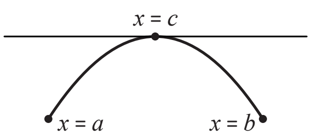
Evaluación: Ser capaz de reproducir la demostración del segundo teorema.

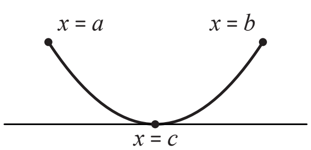
Objetivo: Entender la definición de convexidad y su criterio por $f''(x)$.

Evaluación: Ejemplo 3.4 y ser capaz de reproducir el segundo teorema.

Teorema del valor medio (10 min)
Cuando $f(x)$ no es constante ni función de primer grado, se puede tomar c el punto donde la siguiente función toma el máximo o el mínimo en $[a, b]$;

F$(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.





Teorema (10 min)

Demostración (25 min)
En el problema de la unidad B hay problema de aplicación del teorema del valor medio.

[Hasta aquí Clase 2]

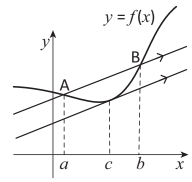
[Desde aquí Clase 3]

En esta clase lo que se utiliza posteriormente es el segundo teorema.

Definición de convexidad (10 min)
Basta que los estudiantes puedan reconocer la convexidad intuitivamente:

Clase 2. Teorema del valor medio

Teorema del valor medio
Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



Se omite demostración.

Explicación: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ representa la pendiente de la recta AB.

$f'(c)$ representa la pendiente de la tangente en $(c, f(c))$. Dos rectas son paralelas.

Aplicando este teorema, se tiene que:

Teorema 3.1
Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ (respectivamente $f'(x) < 0$) en (a, b), entonces $f(x)$ es creciente (respectivamente decreciente) en $[a, b]$.

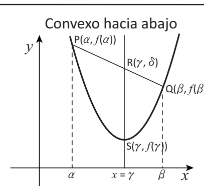
Ya se utilizó este Teorema en la Unidad III.

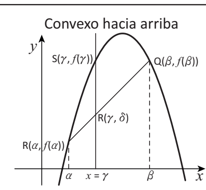
Demostración: Sean $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Aplicando el Teorema del valor medio en $[\alpha, \beta]$, se tiene que $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(c)$ donde $\alpha < c < \beta$.
Si $f'(c) > 0$ (respectivamente $f'(c) < 0$), entonces $f(\alpha) < f(\beta)$ (respectivamente $f(\alpha) > f(\beta)$).

Clase 3. Convexidad de la gráfica

Definición 3.1 Convexidad
Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Se dice que la gráfica C de $y = f(x)$ es convexa hacia abajo (convexa hacia arriba) cuando C cumple la siguiente condición:
Para cualquier $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, se toman P$(\alpha, f(\alpha))$ y Q$(\beta, f(\beta))$ en C. La parte de C comprendida entre $x = \alpha$ y $x = \beta$ excluidos P y Q está abajo (respectivamente arriba) de la recta PQ, es decir para cualquier $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $f(\gamma) < \delta$ (respectivamente $f(\gamma) > \delta$),
$(\delta = f(\alpha) + \dfrac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}(f(\beta) - f(\alpha))$ es la coordenada y del punto R).

También se dice que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o abajo.





70 | Unidad IV • Lección 3 • Clase 2. Teorema del valor medio • Clase 3. Convexidad de la gráfica

convexo hacia abajo

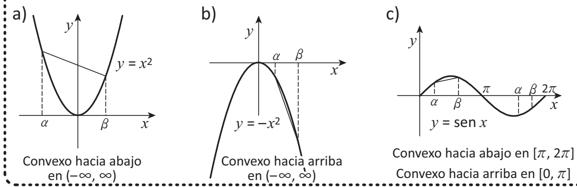
convexo hacia arriba

Ejemplo 3.4. Investigue la convexividad.

a) $y = x^2$ b) $y = -x^2$ c) y = sen x $(0 \leq x \leq 2\pi)$

Solución:

a) b) c)



Teorema 3.2

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

$f(x)$ es convexa hacia abajo (respectivamente arriba) en $[a, b]$ $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ es creciente (respectivamente decreciente) en (a, b)

Ejemplo 3.5. Confirme el Teorema con las funciones del Ejemplo 3.4.

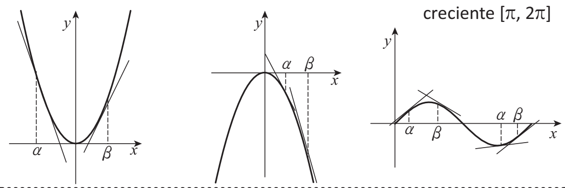
Solución:

a) $y' = 2x$ es creciente en $(-\infty, \infty)$

b) $y' = -2x$ es decreciente en $(-\infty, \infty)$

c) y' = cos x decreciente $[0, \pi]$ creciente $[\pi, 2\pi]$

y' representa la pendiente de la tangente.



Teorema 3.3

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable hasta dos veces en (a, b). Entonces

$f''(x) > 0$ en (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es convexa hacia abajo.

$f'' < 0$ en (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ es convexa hacia arriba.

Demostración:

$f''(x) > 0$ en (a, b) $\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente en (a, b)

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ es convexo hacia abajo

$f''(x) < 0$ en (a, b) $\Rightarrow$ $f'(x)$ es decreciente en (a, b)

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ es convexo hacia arriba.

Unidad IV • Lección 3 • Clase 3. Convexidad de la gráfica | 71

Ejemplo 3.4
(10 min)

No es necesario comprobar la definición con el cálculo como lo siguiente:

a) La recta pasa por $P(\alpha, \alpha^2)$ y $Q(\beta, \beta^2)$: $y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$.
Sean $\alpha < r < \beta$, $R(r, (\alpha + \beta)r - \alpha\beta)$ y $Q(r, r^2)$. Entonces $\{(\alpha + \beta)r - \alpha\beta\} - r^2 = -(r - \alpha)(r - \beta) > 0$.

Teorema (5 min)
Sería una manera de explicar el teorema con el Ejemplo 3.5

Ejemplo 3.5
(10 min)
Basta la comprensión intuitiva.

Teorema (10 min)

Unidad IV. Lección 3.
Clase 4

Objetivo: Definir el concepto del punto de inflexión y aplicarlo en la gráfica.

Evaluación: Ejercicio 3.4

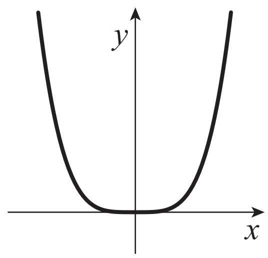
Clase 5
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Hacer gráficas de funciones exponenciales.

Evaluación: Ejercicio 3.5 a)

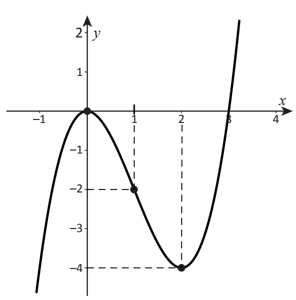
Definición (5 min)

Ejemplo 3.6
(20 min)
Lo importante es la condición necesaria del punto de inflexión.
Que $f''(c) = 0$ no necesariamente significa que $(c, f(c))$ es el punto de inflexión como muestra el ejemplo $f(x) = x^4$



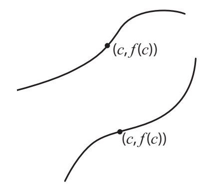
Ejercicio 3.4
(20 min) Solución
a) $y' = 3x^2 - 6x = 0$, $x = 0, 2$
$y'' = 6x - 6 = 0$, $x = 1$.

x		0		1		2	
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	0	↘	−2	↘	−4	↗
		Máx. rel.		punt. infl.		min. rel.	



Clase 4. Punto de inflexión

Definición 3.2 PUNTOS DE INFLEXIÓN
Sea $f(x)$ una función continua. Al punto P$(c, f(c))$ de la gráfica de $y = f(x)$ se le denomina punto de inflexión, si existen intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ tales que
$f(x)$ es convexa hacia abajo (respectivamente arriba) en $[a, c]$ y
$f(x)$ es convexa hacia arriba (respectivamente abajo) en $[c, b]$.



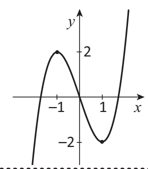
Del último Teorema de la Clase 3 se sabe que: $f''(x)$ cambia de signo en $x = c \Rightarrow (c, f(c))$ es punto de inflexión.

↗ Crece y convexa hacia arriba.
↘ Decrece y convexa hacia arriba.
↘ Decrece y convexa hacia abajo.
↗ Crece y convexa hacia abajo.

Ejemplo 3.6. Investigue los extremos relativos y convexidad de $y = x^3 - 3x$ y haga la gráfica.

Solución: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$
$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. $\quad y'' = 6x$. $\quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		−1		0		1	
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	2	↘	0	↘	−2	↗
		Máx. rel.		Punto infl.		Mín. rel.	



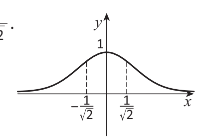
Ejercicio 3.4. Investigue los extremos relativos y convexidad y haga la gráfica.
a) $y = x^3 - 3x^2$ b) $y = -x^3 - 3x^2$
c) $y = x^3$ d) $y = \tan x$, $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Clase 5. Gráfica 1 (Funciones exponenciales)

Ejemplo 3.7. Investigue los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas de $y = e^{-x^2}$ y haga la gráfica.

Solución: $y' = -2xe^{-x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	+	+	+	0	−	−	−
y''	+	0	−	−	−	0	+
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘
		Punto infl.		Máx. rel.		Punto infl.	



$\lim_{h\to\infty} y = \lim_{h\to-\infty} y = 0$, por lo tanto la recta $y = 0$ es la asíntota.

Unidad II Clase 1.7

72 | Unidad IV • Lección 3 • Clase 4. Punto de inflexión • Clase 5. Gráfica 1 (Funciones exponenciales)

Incisos b, c y d solución en pág. 99.

[Hasta aquí Clase 4]

[Desde aquí Clase 5]

Ejemplo 3.7. (20 min)

Unidad IV. Lección 3.

Clase 5 (Continuación)
Clase 6
Clase 7
(Continúa en la siguiente página)

Objetivo: Hacer gráficas de funciones racionales.

Evaluación: Ejercicio 3.6

Objetivo: Encontrar el número de distintas soluciones reales utilizando la gráfica.

Evaluación: Ejercicio 3.7

Ejercicio 3.5. Haga la gráfica investigando los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas.

a) $y = xe^x$ b) $y = xe^{-x^2}$

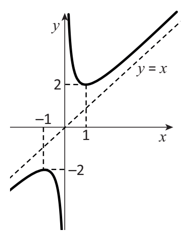
Clase 6. Gráfica 2 (Funciones racionales)

Ejemplo 3.8. Investigue los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas de $y = \frac{x^2+1}{x}$ y haga la gráfica.

Solución: $y = x + \frac{1}{x}$, $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

x		-1		0		1	
y'	+	0	−	/	−	0	+
y''	−	−	−	/	+	+	+
y	↗	-2	↘	/	↘	2	↗
		Máx rel.				Mín. rel.	



$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(y-x) = 0$, por lo tanto la recta $y = x$ es una asíntota.

La otra es $x = 0$, y $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$.

Cuando $f(x) = g(x) + \frac{h(x)}{l(x)}$ donde $g(x)$, $h(x)$ y $l(x)$ son polinomios tal que deg $h(x)$ < deg $l(x)$, entonces

$\lim\limits_{h\to\infty}\{f(x) - g(x)\} =$

$\lim\limits_{h\to-\infty}\{f(x) - g(x)\} = 0.$

Ejercicio 3.6. Haga la gráfica investigando los extremos relativos, convexidad y las asíntotas.

a) $y = \frac{x^2-1}{x}$ b) $y = x^2 - \frac{1}{x}$

Clase 7. Aplicación a la ecuación

Ejemplo 3.9. Sea $2x^3 - ax^2 + 1 = 0$ ...(1) una ecuación en x donde a es un número real. Investigue el número de distintas soluciones reales en (1).

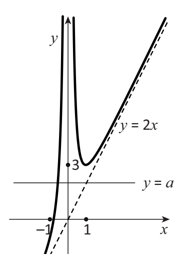
Solución: $x = 0$ no es una solución de (1).

Por lo tanto (1) equivale a $\frac{2x^3+1}{x^2} = a$ .... (2).

Sea $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$, $y = 2x + \frac{1}{x^2}$, $y' = 2 - \frac{2}{x^3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ cuando x toma el valor real.

x		0		1	
y'	+	/	−	0	+
y	↗	/	↘	3	↗



$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^+} y = \infty$

Véase Unidad III Clase 2.9

$y = 2x$ y $x = 0$ son las asíntotas.

Unidad IV • Lección 3 • Clase 6. Gráfica 2 (Funciones racionales) • Clase 7. Aplicación a la ecuación | 73

Ejercicio 3.5

(25 min) Solución

a) $y' = (1+x)e^x = 0, x = -1$

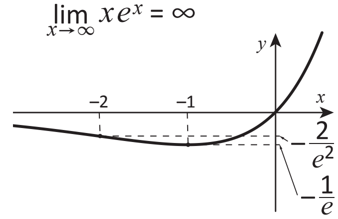
$y'' = (2+x)e^x = 0, x = -2$

x		-2		-1	
y'	−	−	−	0	+
y''	−	0	+	+	+
y	↘	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗
		punt. infl.		min. rel.	

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$,

$y = 0$ es la asíntota.

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^x = \infty$



Inciso b) solución en pág. 100.

[Hasta aquí Clase 5]

[Desde aquí Clase 6]

Ejemplo 3.8
(20 min)

Ejercicio 3.6
(25 min)
Solución en pág. 100

[Hasta aquí Clase 6]

[Desde aquí Clase 7]

Ejemplo 3.9
(20 min)

Unidad IV. Lección 3.

Clase 7

(Continuación)

Clase 8

Objetivo: Explicar la definición de la velocidad y la aceleración en la dimensión uno.

Evaluación: Ejercicio 3.8

Ejercicio 3.7
(25 min) Solución

a) $4x^3 - ax^2 - 1 = 0 \iff$

$4x - \frac{1}{x^2} = a$

Sea $y = 4x - \frac{1}{x^2}$.

$y' = 4 + \frac{2}{x^3} = 0,$

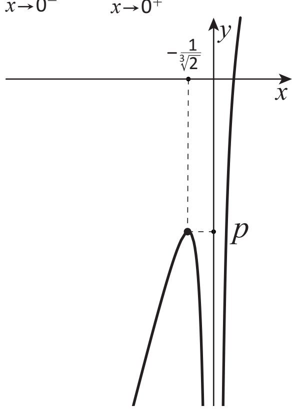
$x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

x		$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		0	
y'	+	0	−	/	+
y	↗	p	↘	/	↗

$p = -3\sqrt[3]{4}$

$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \ \lim_{x\to\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^+} y = -\infty$



a	$a < p$	$a = p$	$p < a$
# de sol.	3	2	1

Inciso b) solución en pág. 101

[Hasta aquí Clase 7]

[Desde aquí Clase 8]

Definición: la velocidad y la aceleración.
(10 min)

(El número de distintas soluciones reales de (1)) = (El de (2)) = (El número de distintos puntos comunes de dos gráficas $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$ y $y = a$)
Luego,

a	$a < 3$	$a = 3$	$3 < a$
Número sol.	1	2	3

Ejercicio 3.7. Investige el número de las distintas soluciones reales de la ecuación, donde a es es un número real.

a) $4x^3 - ax^2 - 1 = 0$ b) $ae^{x} - x = 0$

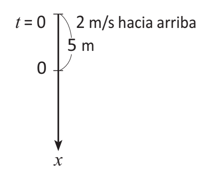
Clase 8. Velocidad y aceleración en la recta

Definición 3. 3
Sea P un punto que se mueve en una recta numérica. Se supone que la coordenada x de P está dada como una función derivable del tiempo $t : x = f(t)$.
Entonces la velocidad de P es $\frac{dx}{dt}$ y si $f(x)$ posee f'', entonces la aceleración de P es $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Cuando no hay cambio de velocidad, velocidad = (diferencia de coodenadas) / (diferencia del tiempo).
Cuando hay cambio se toma límite.

Ejemplo 3.10. Cuando un objeto cae por la gravedad, su aceleración es alrededor de 9.8 m/s², si se ignora la resistencia del aire.

a) Si la velocidad en el tiempo $t = 0$ fue 2 m/s hacia arriba, ¿cuánto es la velocidad hacia abajo en el tiempo t (segundos)?
b) Si la posición en el tiempo $t = 0$ fue 5 m del punto 0 hacia arriba, ¿cuál es la posición en el tiempo t (segundos) midiendo desde 0 hacia abajo?



Solución: Sea $x(t)$ m la coordenada del punto en el tiempo t (el origen es 0 y la orientacion es hacia abajo). Sea v m/s la velocidad.

a) $\frac{d^2x}{dt^2} = 9.8$, por lo tanto

$v = \frac{dx}{dt} = \int_0^t 9.8\, dt - 2 = 9.8\, t - 2$ (Respuesta)

b) $x = \int_0^t v\, dt - 5 = 4.9\, t^2 - 2t - 5$ (Respuesta)

Que la velocidad hacia arriba es 2 m/s es que la velocidad hacia el eje x (hacia abajo) es −2 m/s.

Ejercicio 3.8

a) Si se cae un objeto del techo del edificio de 19.6 m de altura, ¿cuántos segundos tarda en llegar a la tierra?
b) Un coche está acelerando la velocidad con 2 m/s² de aceleración. Ahora la velocidad es 5 m/s.
¿Cuántos metros va a correr en 4 segundos a partir de ahora. Se supone que el coche corre en línea.

Ejemplo 3.10 (20 min)
Es la situación en que se lanzó un objeto hacia arriba

Ejercicio 3.8 (15 min). Solución en pág. 101

Objetivo: Explicar la velocidad y la aceleración del movimiento circular uniforme a través de derivada.

Unidad IV. Lección 3.
Clase 9

Evaluación: Ejercicio 3.9, 3.10

Clase 9. Movimiento circular uniforme

Definición 3.4 Velocidad y aceleración en el plano
Sea P un punto que se mueve en el plano y sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas de P en el tiempo t.

La velocidad de P es el vector $\boldsymbol{\upsilon} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$.

La aceleración de P es el vector $\alpha = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$.

Se supone que son derivables.

$\alpha = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\upsilon}$

Ejemplo 3.11. Un punto P está rotando en la circunferencia con el centro (0, 0) y el radio r. Sus coordenadas están dadas por (r cos ωt, r sen ωt), donde ω es un número real y t representa el tiempo.

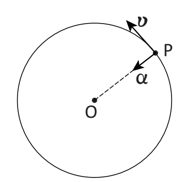
Encuentre la velocidad $\boldsymbol{\upsilon}$ de P.
Encuentre la aceleración α de P.

Solución:

a) $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d}{dt}(r \cos \omega t, r \operatorname{sen} \omega t)$
$= (-r\,\omega \operatorname{sen} \omega t, r\omega \cos \omega t)$

b) $\alpha = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\upsilon} = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) = -r\omega^2(\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t)$.

A ω se le llama **velocidad angular**.



Ejercicio 3.9. En el Ejemplo 3.11, sea $\boldsymbol{p}$ el vector $\overrightarrow{OP}$. Demuestre los siguientes:
a) $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{\upsilon}$ y $|\boldsymbol{\upsilon}| = |\omega|\,|\boldsymbol{p}|$ b) $\alpha = -\omega^2 \boldsymbol{p}$ y $|\alpha| = r\,\omega^2$.

Ejercicio 3.10. Un objeto gira en la circunferencia del radio 5 m, tardando 10 segundos en dar una vuelta. Encuentre las magnitdes de su velocidad en m/s y su aceleración en m/s².

Definición de la velocidad y la aceleración en el plano (5 min)

Ejemplo 3.11 (20 min)

Ejercicio 3.9 (10 min) Solución
$\overrightarrow{OP} = (r\cos\omega t, r\operatorname{sen}\omega t)$
a) $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\upsilon} = r\cos\omega t \cdot (-r\omega\operatorname{sen}\omega t) + r\operatorname{sen}\omega t \cdot r\omega\cos\omega t = 0$. Como $\boldsymbol{p} \neq 0$ y $\boldsymbol{\upsilon} \neq 0$, $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{\upsilon}$.

$|\boldsymbol{\upsilon}| = \sqrt{(-r\omega\operatorname{sen}\omega t)^2 + (r\omega\cos\omega t)^2}$
$= \sqrt{r^2\omega^2} = r|\omega|$
$|\boldsymbol{p}| = r$, por lo tanto
$|\boldsymbol{\upsilon}| = |\omega|\,|\boldsymbol{p}|$

b) $\alpha = -\omega^2(r\cos\omega t, r\operatorname{sen}\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{p}$, $|\alpha| = r\omega^2$

Ejercicio 3.10 (10 min) Solución
Sea t el tiempo.
Se toma el centro como origen y el eje x de modo que el objeto está en (5, 0) cuando $t = 0$.
Sea ω la velocidad angular. $\omega = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.
Las coordenadas del objeto son $\boldsymbol{p} = (5\cos\frac{\pi}{5}t, 5\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}t)$,

Velocidad $\boldsymbol{\upsilon} = (-\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}t, \pi\cos\frac{\pi}{5}t)$, $|\boldsymbol{\upsilon}| = \pi$ (m/s)

Aceleración $\alpha = (-\frac{\pi^2}{5}\cos\frac{\pi}{5}t, -\frac{\pi^2}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}t)$, $|\alpha| = \frac{\pi^2}{5}$ (m/s)

Unidad IV. Lección 3.
Ejercicios de la lección

Problemas de unidad
(Continúa en la siguiente página)

Ejercicios de la lección

1. Encuentre la tangente en el punto indicado. — Clase 1
   a) $y = \cos x$, $\left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\right)$ b) $y = e^{3x}$, (0, 1)
   c) $y = \text{sen}^{-1} x$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ $\left(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

2. Haga la grafica investigando los extremos relativos, la convexidad y las asíntotas. — Clase 5, Clase 6
   a) $y = x^2 e^x$ b) $y = 4x + \frac{1}{x-1}$

3. Investigue el número de distintas soluciones reales con respecto al número real a. — Clase 7. En b) utilice $\lim_{h\to 0^+} x^2 \ln x = 0$ (véase Unidad II Clase 1.7)
   a) $x^3 - ax^2 - x + 1 = 0$ b) $\ln x - \frac{a}{x^2} = 0$ $(x > 0)$

4. La coordenada del punto P, que se mueve en la recta numérica, está dada por $x(t) = t^3 - 9t^2 + 4t - 5$ (t: tiempo). — Clase 8
   a) Encuentre la velocidad (v) y la aceleración (α) en el tiempo $t = 1$.
   b) Encuentre la velocidad mínima ($t \in (-\infty, \infty)$)

Problemas de la Unidad A

1. Sea $f(x) = \text{sen}\, x$. Encuentre $f^{(4n)}(x)$, $f^{(4n+1)}(x)$, $f^{(4n+2)}(x)$ y $f^{(4n+2)}(x)$ donde n es un número entero no negativo. — $f^{(0)}(x)$ significa $f(x)$.

2. a) Calcule $\{(ax+b)^n\}'$ donde $a \neq 0$ y n es un número natural.
   b) Encuentre $\int (ax+b)^n\, dx$ donde n es un número entero no negativo y $a \neq 0$.

76 | Unidad IV • Lección 3 • Ejercicios de la lección • Problemas de la Unidad A

---

1. Sea $f(x) = y$

a) $f'(x) = -\text{sen}\, x$,

$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$

b) $f'(x) = 3e^{3x}$, $f'(0) = 3$

$y - 1 = 3x$, $y = 3x + 1$

c) $f'(x) = \frac{1}{\cos y}$,

$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$

$y - \frac{\pi}{3} = 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$y = 2x - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

Inciso 2a solución en pág. 101. Incisos 2b, 3 en pág. 102 y 4 solución en pág. 103.

[Hasta aquí Ejercicios de la lección]

[Desde aquí problemas de la unidad]

Problemas de la Unidad "A"

1. $f'(x) = \cos x$,
$f''(x) = -\text{sen}\, x$,
$f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \text{sen}\, x = f(x)$,
por lo tanto
$f^{(4n)}(x) = f(x) = \text{sen}\, x$,
$f^{(4n+1)}(x) = f'(x) = \cos x$,
$f^{(4n+2)}(x) = f''(x) = -\text{sen}\, x$
$f^{(4n+3)}(x) = f'''(x) = -\cos x$.

2. a) $n(ax+b)^{n-1}(ax+b)' = an(ax+b)^{n-1}$

b) De a) $\{(ax+b)^{n+1}\}' = a(n+1)(ax+b)^n$,

por lo tanto $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$

(C: constante)

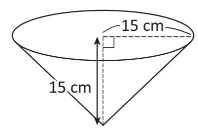
* Problemas de la Unidad B

Clase 9

1. Hay un satélite que rota alrededor de la tierra en una órbita circular. La propulsión viene de la fuerza de gravedad, es decir, la aceleración del movimiento circular uniforme es igual a la aceleración de gravedad, que está en razón inversa al cuadrado de la distancia desde el centro de la tierra.

   a. Exprese el radio r (metros) de la órbita con los datos siguientes:
   R (metros): el radio de la tierra.
   ω(radianes/segundo): la velocidad angular del satélite.
   g(metros/segundo^2): la aceleración de gravedad en la superficie terrestre.

   b. Suponga que esto es un satélite geoestacionario, es decir, su velocidad angular es igual a la de la tierra.
   Exprese r con R, g y π.
   Luego sustituye las siguientes valores y calcule r con la calculadora:
   R = 6.378 x 10^6 (m), g = 9.8 (m/s^2), π = 3.14

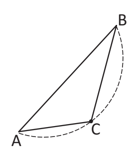


2. Hay un recipiente de forma de cono cuyo radio y profundidad miden 15 cm. Se vierte 100 cm^3 de agua por segundo en éste. Cuando la profundidad del agua es 10 cm, encuentre la velocidad (cm/s) del aumento del radio de la superficie del agua.

3. Sean a, b y c números reales tales que $0 < a < b < c$. Demuestre la siguiente inecuación:
$$a^c\, b^a\, c^b < a^b\, b^c\, c^a.$$

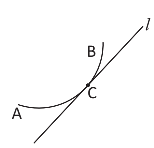
Tome el logarítmo y aplique el Teorema del valor medio.

4. Sea $f(x)$ convexo hacia abajo en $[a, b]$. Sean A($a, f(a)$) y B($b, f(b)$) dos puntos en la gráfica. Tome cualquier $c \in (a, b)$ y ponga C($c, f(c)$). Demuestre lo siguiente:



   a) pen (A, C) < pen (A, B) < pen (C, B), donde pen (A, B) etc. representan la pendiente de la recta AB, etc. respectivamente.

   b) Sea $f(x)$ derivable en (a, b). Sea $c \in (a, b)$. Sea l: $y = f'(c)\,x + n$ la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en C($c, f(c)$).
   Entonces en $[a, b]$ excepto c, l queda debajo de $y = f(x)$, es decir, $f'(c)d + n < f(d)$ para cualquier $d \in [a, b]$, $d \neq c$.



Unidad IV • Lección 3 • Problemas de la Unidad B | 77

Soluciones:

1.

a) La aceleración del movimiento circular uniforme es $r\omega^2$ (Clase 9 Ejercicio 3.8).
Sea g' (m/s^2) la aceleración de gravedad en la posición del satélite.
Se tiene que:
$g : g' = \dfrac{1}{R^2} : \dfrac{1}{r^2}$,
$g' = \dfrac{R^2}{r^2} g$
Luego $r\omega^2 = \dfrac{R^2}{r^2} g$,
$r = \sqrt[3]{\dfrac{R^2}{\omega^2} g}$ (Respuesta)

b) La velocidad angular de la tierra es $\dfrac{2\pi}{60 \times 60 \times 24}$
$= \dfrac{\pi}{3^3 \times 4^3 \times 5^2}$(rad/s), lo que es igual a ω. Por lo tanto,
$r = \sqrt[3]{\dfrac{3^6 \times 4^6 \times 5^4}{\pi^2} R^2 g}$
$= 3^2 \times 4^2 \times 5 \sqrt[3]{5 \dfrac{R^2}{\pi^2} g}$
(Respuesta)
Sustituyendo los valores indicados, se tiene que:
$r = 3^2 \times 4^2 \times 5 \times 10^4 \times \sqrt[3]{\dfrac{5 \times 6.378^2 \times 9.8}{3.14^2}}$
$\approx 4.2 \times 10^7$ (m)
Respuesta: 42000 km.

2. Sea t (segundos) el tiempo.
Sea $x(t)$ (cm) el radio de la superficie del agua. Sea V(t) (cm^3) la cantidad del agua.

Como la profundidad del agua es x cm, se tiene que $V(t) = \dfrac{\pi}{3}\{x(t)\}^3$. Derivando ambos lados por t, $V' = \pi\{x(t)\}^2\ x'(t)$. Como $V' = 100$, $x'(t) = \dfrac{100}{\pi\{x(t)\}^2}$.

Cuando $t = t_0$, donde $x(t_0) = 10$, $x'(t_0) = \dfrac{100}{\pi(10)^2} = \dfrac{1}{\pi}$ (cm/s) (Respuesta)

Incisos 3 y 4 solución en página 103.

Unidad IV. Lección 1. Ejercicios de la lección. Pág. 82. Soluciones

1. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ b) $f^{-1}(x) = 2^x$ c) $f^{-1}(x) = \text{sen}x$

2. a) $(g \circ f)(x) = \log_3 |x|$ b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

3. a) $(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4-1$, por lo tanto $\{(x-1)(x^3+x^2+x+1)\}' = 4x^3$
   b) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) = x^5+1$, por lo tanto $\{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\}' = 5x^4$
   c) $\left(\dfrac{x-1}{x^3+1}\right)' = \dfrac{1\cdot(x^3+1)-(x-1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-2x^3+3x^2+1}{(x^3+1)^2}$
   d) $\{(x^3+1)^5\}' = 5(x^3+1)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3+1)^4$
   e) $\left(\dfrac{1}{(x^2+1)^3}\right)' = -\dfrac{3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6} = -\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

4. Sea $f(x) = -x^2$ $(x \geq 0)$. Entonces $g(x) = f^{-1}(x)$. Por lo tanto en $x < 0$,
   $g'(x) = \{f^{-1}(x)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{-2f^{-1}(x)} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

Unidad IV. Lección 2. Ejercicios de la lección. Pág. 88. Soluciones

1. a) $-2\cos^{-3} x(\cos x)' = 2\text{sen}\, x \cos^{-3}x$
   b) $\cos x \cdot \cos 2x + \text{sen}x(-2\text{sen}\, 2x) = \cos x\cos 2x - 2\text{sen}x\text{sen}2x$
   c) $\cos(\cos x)\cdot(\cos x)' = -\text{sen}\, x \cdot \cos(\cos x)$
   d) $\dfrac{1}{\text{sen}\, x}(\text{sen}\, x)' = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$
   e) $-\text{sen}(\ln x)\cdot(\ln x)' = -\dfrac{\text{sen}(\ln x)}{x}$
   f) $\left(\ln\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\right)' = (\ln|x| - \ln(x^2+1))' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{(x^2+1)-2x^2}{x(x^2+1)} = \dfrac{-x^2+1}{x(x^2+1)}$
   g) $e^{\text{sen}^2 x}(\text{sen}^2 x)' = 2\text{sen}\, x\cos x e^{\text{sen}^2 x} = \text{sen}\, 2x e^{\text{sen}^2 x}$
   h) $(3^{\ln x})' = (e^{\ln 3\cdot\ln x})' = e^{\ln 3\cdot\ln x}(\ln 3 \ln x)' = \dfrac{\ln 3\cdot 3^{\ln x}}{x}$
   i) $\sqrt{3}\ \text{sen}\, x^{\sqrt{3}-1}\ (\text{sen}\, x)' = \sqrt{3}\ \cos x\ \text{sen}\, x^{\sqrt{3}-1}$
   j) $\cos x \ln x + \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

2. $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ $a_1,..,a_n$ constantes. Como $(x^m)^{(n)} = 0$ $(m < n)$, $f^{(n)}(x) = (x^n)^{(n)} = n!$

Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.2. Pág. 89. Solución

a) Sea (a, e^a) punto de tangencia.
La tangente: $y - e^a = e^a(x - a)$.
Sustituyendo $(-1, 0)$, $-e^a = e^a(-1 - a)$, $a = 0$. $y = x + 1$ (Respuesta)

b) Sea $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ punto de tangencia.
La tangente: $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$. Sustituyendo $(3, -1)$, $-1 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(3 - a)$, $a^2 + 2a - 3 = 0$, $a = -3, 1$
$y = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}$, $y = -x + 2$ (Respuesta)

Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.3. Pág. 89. Solución

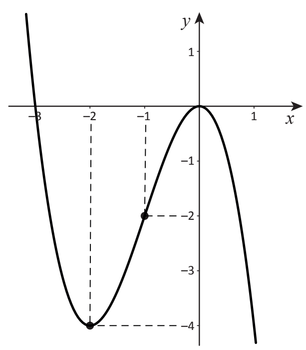
a) La pendiente: $-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$. $x = 0, 2$. $y = -1, 1$ respectivamente
$y = -x - 1$, $y = -x + 3$ (Respuesta)

b) La pendiente: $\frac{1}{\cos^2 x} = 4$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$ respectivamente,
$y = 4x - \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$, $y = 4x + \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ (Respuesta)

Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.4. Pág. 92. Incisos b, c y d. Solución

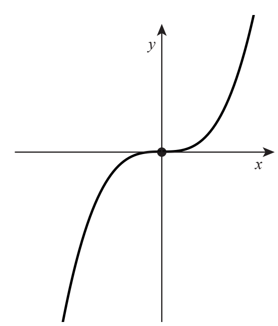
b) $y' = -3x^2 - 6x = 0$, $x = 0, -2$
$y'' = -6x - 6 = 0$ $x = -1$.

x		-2		-1		0	
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	-4	↗	-2	↗	0	↘
		min. rel.		punt. infl.		máx. rel.	



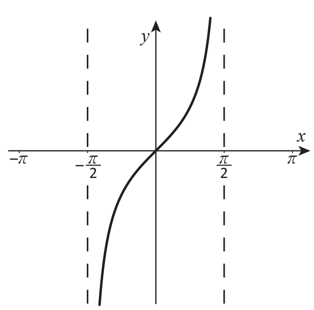
c) $y' = 3x^2 = 0$, $x = 0$
$y'' = 6x = 0$ $x = 0$.

x		0	
y'	$+$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$
y	↗	0	↗
		punt. infl.	



d) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 0$, no tiene solución
$y'' = -2\cos^{-3}x(-\operatorname{sen} x) = 0$ $x = 0$.

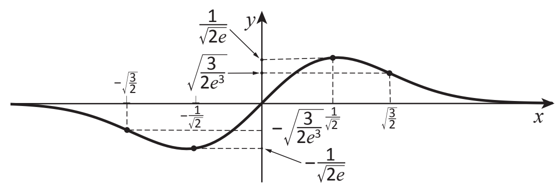
x		0	
y'	$+$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$
y	↗	0	↗
		punt. infl.	



Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.5. Pág. 93. Inciso b. Solución

b) $y' = (1 - 2x^2)\, e^{-x^2} = 0, \quad x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad y'' = (4x^3 - 6x)\, e^{-x^2} = 0, \quad x = 0, \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

x		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
y'	–	–	–	0	+	+	+	0	–	–	–
y''	–	0	+	+	+	0	–	–	–	0	+
y	↘	$-\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↗	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	$\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$	↘
		punt. infl.		min. rel.		punt. infl.		máx rel.		punt. infl.	



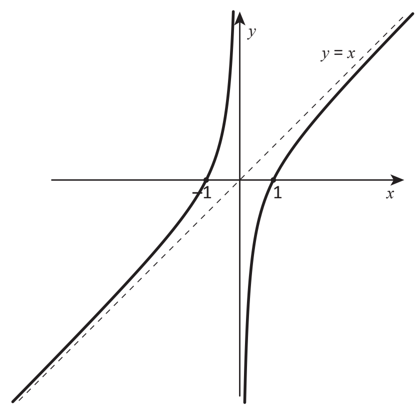
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0,$

$y = 0$ es la asíntota.

Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.6. Pág. 93. Solución

a) $y = x - \dfrac{1}{x} \qquad y' = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0. \qquad y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

x		0	
y'	+	/	+
y''	+	/	–
y	↗	/	↗

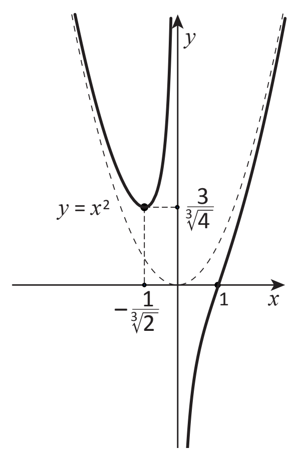


$\lim\limits_{x\to\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - x) = 0,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^-} y = \infty, \qquad y = x$ y $x = 0$ son las asíntotas.

b) $y' = 2x + \dfrac{1}{x^2} = 0, \quad x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \qquad y'' = 2 - \dfrac{2}{x^3} = 0 \qquad x = 1$

x		$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		0		1	
y'	–	0	+	/	+	+	+
y''	+	+	+	/	–	0	+
y	↘	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	↗	/	↗	0	↗
		min. rel.				punt. infl.	



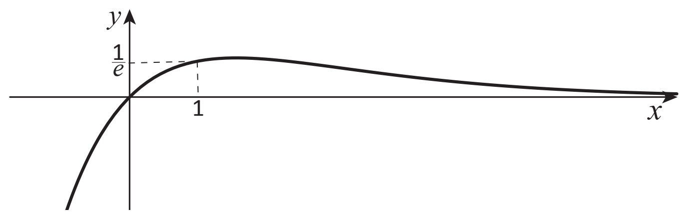
$\lim\limits_{x\to\infty} (y - x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - x^2) = 0,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} y = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} y = -\infty. \qquad x = 0, \; y = x^2$ son las asíntotas

Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.7. Pág. 94. Inciso b. Solución

b) $ae^x - x = 0 \Leftrightarrow xe^{-x} = a$. Sea $y = xe^{-x}$. $y' = (1-x)e^{-x} = 0$, $x = 1$

x		1	
y'	+	0	−
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘



$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} y = 0$

a	$a \le 0$	$0 < a < \frac{1}{e}$	$a = \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < a$
# de sol.	1	2	1	0

Unidad IV. Lección 3. Ejercicio 3.8. Pág. 94. Solución

a) Se toma el eje x hacia el centro de la tierra y con origen en el techo del edificio. Sea t el tiempo y cuando $t = 0$, el objetivo está en el origen.

$\frac{d^2x}{dt^2} = 9.8$, $\frac{dx}{dt} = 9.8t + C_1$. Como la velocidad en $t = 0$ es 0, $C_1 = 0$. $x = 4.9t^2 + C_2$. Como $x = 0$ en $t = 0$, $C_2 = 0$. Ahora $4.9t^2 = 19.6$, $t^2 = 4$. Como $t > 0$, $t = 2$.

Respuesta: 2 segundos

b) Se toma el eje x hacia donde corre el coche. Sea t el tiempo.

$\frac{d^2x}{dt^2} = 2$, $\frac{dx}{dt} = 2t + C_1$,

Como $\frac{dx}{dt} = 5$ en $t = 0$, $C_1 = 5$. $x = t^2 + 5t + C_2$

Como $x = 0$ en $t = 0$, $C_2 = 0$ entonces $x = t^2 + 5t$. Cuando $t = 4$, $x = (4)^2 + 5(4) = 36$

Respuesta: 32 m

Unidad IV. Lección 3. Ejercicios de la lección Pág. 96 Inciso 2 a). Solución

2. a) $y' = (2x + x^2)e^x = 0$, $x = 0, -2$

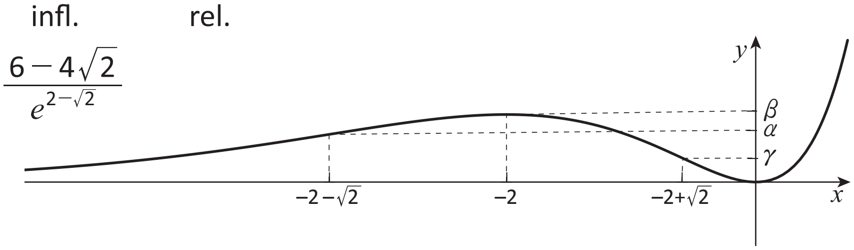
$y'' = (2 + 4x + x^2)e^x = 0$, $x = -2 \pm \sqrt{2}$

x		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		0	
y'	+	+	+	0	−	−	−	0	+
y''	+	0	−	−	−	0	+	+	+
y	⤴	α	↗	β	↘	γ	↘	0	⤴
		punt. infl.		máx. rel.		punt. infl.		mín rel.	

$\alpha = \frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$, $\beta = \frac{4}{e^2}$, $\gamma = \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$

$\lim_{x\to\infty} y = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} y = 0$

$y = 0$ es la asíntota

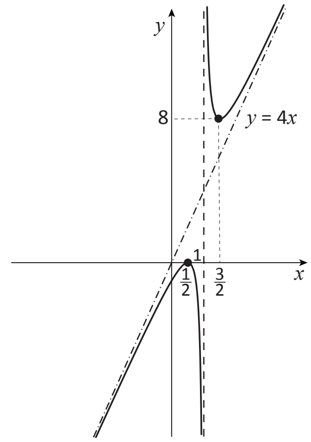


2. b) $y' = 4 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0,\qquad x = \dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\qquad y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

x		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	
y'	+	0	−	/	−	0	+
y''	−	−	−	/	+	+	+
y	↗	0	↘	/	↘	8	↗
		máx rel.				mín rel.	

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-4x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(y-4x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^+} y = \infty.$

$y = 4x$ y $x = 1$ son las asíntotas.



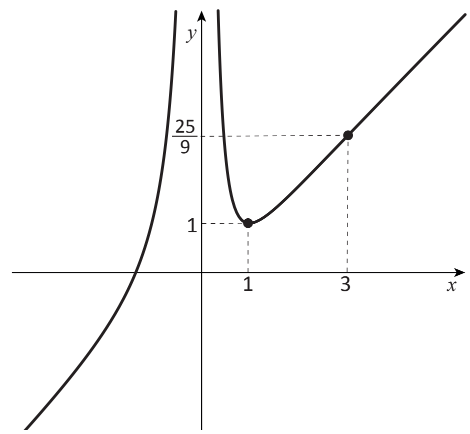
3. a) $x^3 - ax^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = a$

Sea $y = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2},\ y' = 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} = 0,\quad x = 1$

x		0		1	
y'	+	/	−	0	+
y	↗	/	↘	1	↗

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty,\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty\qquad \lim\limits_{x\to 0^-} y = \lim\limits_{x\to 0^+} y = \infty$

a	$a < 1$	$a = 1$	$1 < a$
# de sol.	1	2	3

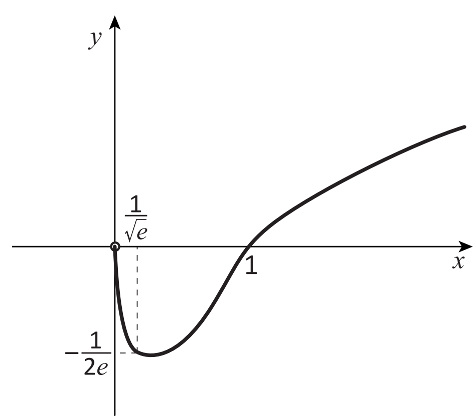


b) $\ln x - \dfrac{a}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x = a.$ Sea $y = x^2 \ln x$

$y' = x(2\ln x + 1) = 0,\qquad x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}.\qquad \lim\limits_{x\to\infty} y = \infty,\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} y = 0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
y'	/	−	0	+
y	/	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

a	$a < -\frac{1}{2e}$	$a = -\frac{1}{2e}$	$-\frac{1}{2e} < a < 0$	$0 \le a$
# de sol.	0	1	2	1



Unidad IV. Lección 3. Ejercicios de la lección Pág. 96 Inciso 4. Solución

4. a) $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 4$, $\alpha(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 6t - 18$

En el tiempo $t = 1$, la velocidad es $v(1) = -11$ y la aceleración es $\alpha(1) = -12$.

b)

t		3	
$\boldsymbol{v}'(t)$	–	0	+
$\boldsymbol{v}(t)$	↘	–23	↗

La velocidad mínima es –23.

* Unidad IV. Problemas de la Unidad B Pág. 97 Inciso 3 y 4. Solución

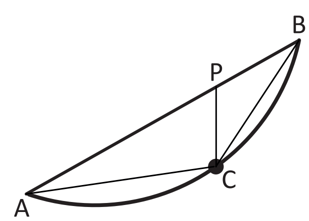
3. Como ln$x$ es una función creciente, $a^c\, b^a\, c^b < a^b\, b^c\, c^a$

$\Leftrightarrow \ln(a^c\, b^a\, c^b) < \ln(a^b\, b^c\, c^a) \Leftrightarrow c\ln a + a\ln b + b\ln c < b\ln a + c\ln b + a\ln c$

$$\Leftrightarrow (b-a)(\ln c - \ln b) < (c-b)(\ln b - \ln a) \Leftrightarrow \frac{\ln c - \ln b}{c-b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} \quad \text{...(1)}$$

Por el teorema del valor medio, considerando $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, existen α y β tales que $a < \alpha < b < \beta < c$ y que $\dfrac{\ln b - \ln a}{b-a} = \dfrac{1}{\alpha}$ y $\dfrac{\ln c - \ln b}{c-b} = \dfrac{1}{\beta}$

Como $\dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{\alpha}$, la relación (1) está demostrada.



4. a) Sea P(c, p) el punto de intersección de dos rectas AB y $x = c$.

Como $f(x)$ es convexo hacia abajo $f(c) < p$. Por lo tanto

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{p-f(a)}{c-a} \text{ y } \frac{f(b)-p}{b-c} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$\dfrac{p-f(a)}{c-a}$ = pen (A, P), $\dfrac{f(b)-p}{b-c}$ = pen(P, B) y pen (A, P) = pen(P, B) = pen(A, B).

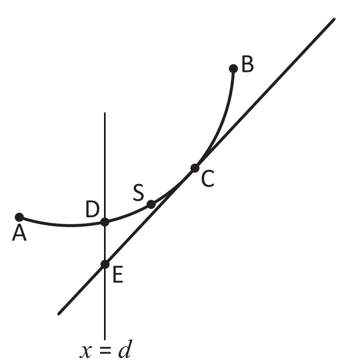
Luego pen(A, C) < pen(A, B) < pen(C, B)

b) Tome $d \in (a,c)$. Sean D y E los puntos de intersección de la recta $x = d$ con la gráfica y la tangente.

Tome S($s, f(s)$) ($d < s < c$). $f'(c)$ es el límite de pen(S, C) cuando $s \to c^-$. De a) se sabe que pen(D,C) < pen(S, C) y que pen(S, C) aumenta cuando $s \to c^-$.

Por tanto pen(D, C) < $f'(c)$. Luego $f'(c)d + n < f(d)$, porque $n = f(c) - cf'(c)$.

Se puede tratar el caso donde $d \in (c, b)$ de la misma manera.



AGRADECIMIENTO

La Secretaría de Educación, La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán y La Agencia de Cooperación Internacional del Japón, AGRADECEN al personal docente y estudiantes de los centros educativos gubernamentales de Educación Media que participaron en el proceso de validación de los contenidos de los Libros y las Guías de Matemática para 10mo y 11mo grado que fueron elaborados en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática Fase III (PROMETAM FASE III).

DISTRITO CENTRAL - FRANCISCO MORAZÁN
Instituto Héctor Pineda Ugarte
Braulio Joel Gómez Sierra
Gustavo Adolfo Padilla Maradiaga
Allison Xiomara Chávez Ogando

Instituto España Jesús Milla Selva
Edna Evelyn Henríquez Rivera
Franklin Sadí Flores Osorto
Thesla Mariella Cerrato Coello

Instituto Blanca Adriana Ponce
Verónica Teodorlinda Acuña Sarantes
Víctor Manuel Mejía C.

Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE–UPNFM)
Rooy Estiven Fúnez Posadas

CHOLUTECA, CHOLUTECA
Instituto José Cecilio del Valle
Margarita Alvarenga Sandoval

COPÁN,
Instituto Copán Galel - Corquín
Rubén Arturo Álvarez Calidonio

Instituto Bernardo Galindo y Galindo – La Entrada, Nueva Arcadia
Walter Ananías Murillo Domínguez

SAN PEDRO SULA, CORTÉS
Instituto José Trinidad Reyes
Geovanni Javier Andino Sevilla
Martha Elena Perdomo Fernández

DANLÍ, EL PARAÍSO
Instituto Departamental de Oriente
Lilibeth Carolina López Zavala

Escuela Normal España Villa Ahumada
Digna Zulema Laínez Berríos

GRACIAS, LEMPIRA
Centro de Investigación e Innovación Educativa (CIIE – UPNFM)
Dioselina Serrano Benítez